Chapitre 1

Convolution et application à la régularisation

On introduit dans ce chapitre le produit de convolution, essentiellement dans $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue. Le produit de convolution apparaît naturellement dans un certain nombre de contextes. Typiquement, et c'est l'une des motivations principales, le produit de convolution est intimement lié au produit usuel via la transformée de Fourier, que l'on introduira plus tard. L'autre application importante, que l'on développera dans la deuxième partie de ce chapitre, est la régularisation des fonctions.

Sans l'avoir forcément mentionné, on a en fait déjà rencontré le produit de convolution et les liens qu'il peut entretenir avec le produit usuel. Petit tour d'horizon non exhaustif avant d'entrer dans le vif du sujet.

Commençons par considérer deux suites réelles ou complexes $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ presque nulles (il existe $N, M \in \mathbb{N}$ tels que $a_j = 0$ pour $j > N$ et $b_k = 0$ pour $k > M$). On note P et Q les polynômes correspondants :

$$P = \sum_{j=0}^{N} a_j X^j \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{M} b_k X^k.$$

Le produit usuel de ces polynômes est alors

$$PQ = \sum_{n=0}^{N+M} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \right) X^n.$$

C'est le polynome associé à la suite presque nulle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}. \tag{1.1}$$

Si on étend les suites $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par 0 pour les voir comme des suites indéxées par $\mathbb{Z}$, on obtient que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est exactement ce qu'on définira comme étant le produit de convolution des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ainsi, le produit usuel des polynômes est en fait défini par le produit de convolution des suites correspondantes.

Si l'on retire l'hypothèse que les suites $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont presque nulles, les polynômes deviennent des séries entières, mais la discussion reste la même. Le produit des séries $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$ est la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ où c_n est encore défini par (1.1).

Cette observation a par exemple des applications en probabilités. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$P(X+Y=n) = \sum_{j=0}^{n} P\big(X = j \text{ et } Y = n-j\big) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j)P(Y=n-j).$$

Ainsi, la loi de $A + B$ est donnée par le produit de convolution des lois de A et de B. C'est pourquoi on associe à une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ la série entière (appelée fonction génératrice) définie par

$$G_X(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j) z^j.$$

On a alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ (au sens de la multipliciation usuelle des séries entières), ce qui peut permettre d'identifier $X + Y$.

Dans le même esprit, mais plus proche des enjeux de ce cours, considérons le cas des séries de Fourier. Soient f et g deux fonctions localement intégrables et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On note $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ leurs coefficients de Fourier. Ainsi, au sens de $L^2(\mathbb{S})$ on a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n e^{inx}.$$

Les coefficients de Fourier du produit fg sont alors donnés par le produit de convolution des suites de coefficients de f et de g :

$$(fg)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \beta_{n-k} \right) e^{inx}.$$

On observera exactement le même phénomène pour la transformée de Fourier. Plus précisément, la transformée de Fourier d'un produit de fonctions sera le produit de convolution des transformées de Fourier de ces deux fonctions. On y reviendra au chapitre sur la transformée de Fourier, mais pour cela on aura besoin du produit de convolution pour des fonctions sur $\mathbb{R}^d$. C'est l'objet de ce chapitre.

On verra lors de l'étude de la tranformée de Fourier que son intérêt principal, comme pour les séries de Fourier, est son bon comportement vis-à-vis des équations différentielles. Cela suggère que le produit de convolution lui-même apparaîtra naturellement dans la résolution d'équations différentielles. C'est effectivement le cas, et on peut déjà l'observer sur des cas simple que l'on sait déjà résoudre. Considérons $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Par la méthode de variation de la constante, on sait que l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + \alpha y = f(t), & t \geqslant 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

est la fonction

$$y : t \mapsto \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} f(s)\, ds.$$

C'est précisément le produit de convolution de la fonction $s \mapsto e^{-\alpha s}$, c'est à dire la solution du problème

$$\begin{cases} y' + \alpha y = 0, & t \geqslant 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

avec le second membre f (ces deux fonctions étant prolongées par 0 sur $\mathbb{R}_-^*$). Tout ça n'est pas du tout un hasard, et généraliser cette remarque sera l'un des objectifs des chapitres suivants.

1.1 Produit de convolution

On munit $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}$ de leurs tribus boréliennes usuelles. Sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ on considère la mesure de Lebesgue.

1.1.1 Définition et premières propriétés

Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. On observe que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. Cette remarque étant faite une fois pour toute, on passera ce point sous silence dans toutes les démonstrations de ce chapitre.

Définition 1.1. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ tel que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy.$$

La fonction $(f * g)$ ainsi obtenue est appelée *produit de convolution* de f et de g.

Exemple 1.2. • Pour toute fonction f mesurable sur $\mathbb{R}^d$ on a $f * 0 = 0$.

• Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$(1 * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,dy.$$

• Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]})(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\,dy = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2], \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2]. \end{cases}$$

• On note f l'indicatrice de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit $g \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(f * g)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(y)\,dy.$$

Ainsi, en prenant la convolée de g avec f, on remplace en x la valeur $g(x)$ (qui, d'ailleurs, n'aura plus de sens si on identifie des fonctions égales presque partout) par la moyenne de g sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (qui elle a toujours un sens même pour g dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$). On observe que la fonction $(f * g)$ obtenue est continue. En outre, si g est de classe C^k pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $(f * g)$ est de classe C^{k+1}.

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère maintenant la fonction $g_n : x \mapsto \alpha + \cos(nx)$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(f * g_n)(x) = \alpha + \frac{\sin\left(n(x+\frac{1}{2})\right) - \sin\left(n(x-\frac{1}{2})\right)}{n}.$$

La fonction g_n est de classe C^∞ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais ses oscillations sont de plus en plus importantes quand n devient grand. Le produit de convolution « gomme » ces oscillations haute fréquence et $(f * g_n)$ se rapproche alors de la valeur moyenne α.

Ces premiers exemples montrent très clairement l'effet régularisant du produit de convolution annoncé en introduction. On reviendra sur cet aspect dans la deuxième partie de ce chapitre. En attendant, on commence par décrire un certain nombre de propriétés générales du produit de convolution.

Proposition 1.3. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Le produit de convolution $(f * g)(x)$ est défini si et seulement si $(g * f)(x)$ l'est, et dans ce cas leurs deux valeurs coïncident.*

Démonstration. En appliquant le changement de variable $\eta = x - y$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\eta)|\,|g(x-\eta)|\,d\eta.$$

Cela prouve que $(f * g)(x)$ est défini si et seulement si $(g * f)(x)$ l'est. Dans ce cas, le même calcul avec f et g au lieu de $|f|$ et $|g|$ montre que $(f * g)(x) = (g * f)(x)$. □

Proposition 1.4. *On suppose qu'il existe $R_1, R_2 > 0$ tels que f est nulle en dehors de la boule $B(R_1)$ et g est nulle en dehors de $B(R_2)$. Alors pour $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| > R_1 + R_2$ le produit de convolution $(f * g)$ est bien défini en x et $(f * g)(x) = 0$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| > R_1 + R_2$. Soit $y \in \mathbb{R}^d$. Si $|y| \leqslant R_2$ alors $|x-y| > R_1$ donc $f(x-y) = 0$, tandis que si $|y| > R_2$ on a $g(y) = 0$. Dans tous les cas on a $f(x-y)g(y) = 0$. Ainsi la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est nulle, donc intégrable d'intégrale nulle. □

1.1.2 Convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$

Le but de ce paragraphe est, à l'instar de l'inégalité de Hölder pour le produit usuel, de donner des conditions suffisantes en termes d'appartenance à des espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ sur deux fonctions f et g pour que leur produit de convolution $(f * g)$ soit lui-même (bien défini et) dans un certain espace de fonctions intégrables.

Comme pour le produit usuel, il y a quelques cas évidents.

Proposition 1.5. (i) *On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors $(f * g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $(f * g) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

(ii) *On suppose que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^d$. Alors $(f * g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

Bien entendu, on a des propriétés analogues en échangeant les rôles de f et de g.

Démonstration. Pour cette première démonstration, on détaille la distinction entre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. On ne le fera plus par la suite.

On considère donc $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a $|g(y)| \leqslant \|g\|_\infty$, donc

$$\int_{y \in \mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \leqslant \|g\|_\infty \int_{y \in \mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, dy.$$

En faisant le changement de variables affine $\eta = x - y$, $d\eta = dy$, on obtient

$$\int_{y \in \mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \leqslant \|g\|_\infty \int_{\eta \in \mathbb{R}^d} |f(\eta)| \, d\eta = \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

Cela prouve que $(f * g)(x)$ est bien défini et

$$|(f * g)(x)| \leqslant \int_{y \in \mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

D'où $\|f * g)\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

On considère maintenant $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ deux représentants de f, et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ deux représentants de g. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Les fonctions $y \mapsto f_1(x-y)g_1(y)$ et $y \mapsto f_2(x-y)g_2(y)$ sont toutes deux intégrables sur $\mathbb{R}^d$. Et comme $f_1(x-y)g_1(y)$ coïncide pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$ avec $f_2(x-y)g_2(y)$, leurs intégrales sont égales, soit $(f_1 * g_1)(x) = (f_2 * g_2)(x)$. On peut alors noter $(f * g)(x)$ cette valeur commune. En outre on a

$$\|f * g\|_\infty = \|f_1 * g_1\|_\infty \leqslant \|f_1\|_1 \|g_1\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

D'où la première propriété.

Pour la deuxième propriété on ne donne plus autant de détail, et on identifie directement f et g avec des représentants dans $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec g nulle presque partout en dehors d'un compact. Soit $R > 0$ tel que g est presque partout nulle en dehors de la boule $B(0, R)$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On a comme précédemment

$$\begin{aligned}
\int_{y \in \mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy &= \int_{y \in B(0,R)} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \\
&\leqslant \|g\|_\infty \int_{y \in \mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, dy \\
&\leqslant \|g\|_\infty \int_{\eta \in B(x,R)} |f| \, d\eta.
\end{aligned}$$

Puisque f est intégrable sur $B(x, R)$, cela prouve que $(f * g)(x)$ est bien défini. $\square$

On passe maintenant au premier véritable résultat sur le produit de convolution. On montre que le produit de convolution de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable, et qu'en plus la norme du produit est inférieure ou égale au produit des normes des deux facteurs. De ce point de vue, le produit de convolution des fonctions est bien plus agréable que le produit usuel.

Proposition 1.6. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable (et donc $(f*g)(x)$ est bien défini) pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. La fonction $(f*g)$ ainsi définie est alors intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et*

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Démonstration. On identifie f et g à des représentants dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ (et on vérifie mentalement au fur et à mesure de la preuve que tout est bien indépendant des choix de ces représentants). L'application $(x,y) \mapsto |f(x-y)|\,|g(y)|$ est mesurable de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $[0,+\infty[$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli on obtient que la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy$$

est bien définie et mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $[0,+\infty]$. En outre

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\eta)|\,d\eta\right)dy \\
&= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,dy \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1 .
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Pour la troisième égalité on a effectué le changement de variables $\eta = x-y$, $d\eta = dx$, dans l'intégrale en x. Cela prouve que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy < +\infty.$$

Ainsi $(f*g)(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)dx = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

D'où le résultat. □

Le but de la suite du paragraphe est de donner des résultats du même genre, à savoir montrer que si f et g sont dans des espaces de Lebesgue bien choisis, leur produit de convolution est bien défini et vérifie lui-même différentes propriétés.

Le résultat suivant généralise la première propriété de la Proposition 1.5 et la Proposition 1.6. Si une fonction est dans un certain espace de Lebesgue, alors son produit de convolution avec une fonction L^1 l'est également.

Proposition 1.7. *Soit $p \in [1,+\infty]$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors le produit de convolution $(f*g)(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $(f*g) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f*g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p} .$$

Par commutativité du produit de convolution, on observe qu'on a des résultats analogues pour $f \in L^p$ et $g \in L^1$.

Démonstration. On identifie f et g à des représentants dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Le résultat est déjà connu si $p = +\infty$, on peut donc supposer que $p \in [1,+\infty[$. On note $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de p. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}\,|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|\,dy \\
&\leqslant \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli on obtient alors

$$\begin{aligned}
\left\| |f| * |g| \right\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \right|^p dx \\
&\leqslant \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)|^p \, dy \right) dx \\
&\leqslant \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, dx \right) dy \\
&\leqslant \|f\|_1^p \, \|g\|_p^p .
\end{aligned}$$

On en déduit que $(|f| * |g|) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\left\| |f| * |g| \right\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$. En particulier la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, dy \right|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \right|^p dx \leqslant \|f\|_1^p \, \|g\|_p^p .$$

Ainsi $(f * g) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$. □

Remarque 1.8. Pour $p \in [1, +\infty]$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a montré que l'application $F : g \mapsto f * g$ est une application linéaire continue sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $\|F\|_{\mathcal{L}(L^p(X))} \leqslant \|f\|_1$.

On donne maintenant une autre généralisation de la Proposition 1.5. Cette fois on arrive toujours dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, par contre on prend f et g dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^q(\mathbb{R}^d)$ avec p et q conjugués. Ce résultat est à comparer avec l'inégalité de Hölder pour le produit usuel des fonctions.

Proposition 1.9. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors le produit de convolution $(f * g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. En outre $(f * g)$ est bornée sur $\mathbb{R}^d$ et*

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} .$$

De plus, $(f * g)$ est uniformément continue et, si p et q sont finis, alors $(f * g)(x)$ tend vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. On identifie f et g à des représentants dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Par l'inégalité de Hölder on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q .$$

Ainsi $(f * g)(x)$ est bien défini et

$$|(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Cela prouve que $(f * g)$ est bornée avec

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

- Soit maintenant $h \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $p < +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on a, toujours par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h-y) - f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \\
&\leqslant \|g\|_q \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h-y) - f(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \|\tau_{-h} f - f\|_p \|g\|_q
\end{aligned}$$

(on rappelle que $\tau_{-h} f$ est la fonction $\eta \mapsto f(\eta + h)$) D'après la Proposition 0.68 on obtient que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| \leqslant \|\tau_h f - f\|_p \|g\|_q \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

ce qui signifie que $(f * g)$ est uniformément continue. Si $p = +\infty$ alors $q = 1$ et on conclut de la même façon en écrivant, par commutativité du produit de convolution,

$$\begin{aligned}|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,|g(x+h-y) - g(x-y)|\;dy\\ &\leqslant \|f\|_p \|\tau_{-h} g - g\|_q\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

- On suppose maintenant que p et q sont finis. Alors il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à supports compacts qui tendent vers f et g dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^d)$, respectivement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $(f_n * g_n)$ est à support compact (voir la Proposition 1.4). Par linéarité du produit de convolution par rapport à chacune des deux fonctions, on peut écrire

$$(f * g) - (f_n * g_n) = (f - f_n) * g + f_n * (g - g_n),$$

d'où

$$\|(f * g) - (f_n * g_n)\|_\infty \leqslant \|f - f_n\|_p \|g\|_q + \|f\|_p \|g - g_n\|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi $(f * g)$ est une fonction continue qui peut être approchée en norme L^∞ par des fonctions à supports compacts. Cela implique que $(f * g)$ tend vers 0 à l'infini. □

On peut donner un résultat complètement général pour l'existence du produit de convolution dans les différents espaces de Lebesgue.

Proposition 1.10. *Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors le produit de convolution $(f * g)(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. En outre on a $(f * g) \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Démonstration. Cette proposition est conséquence de la Proposition 1.7 si $q = 1$ et $r = p$ (ou $p = 1$ et $r = q$) et de la Proposition 1.9 si $r = \infty$. On peut donc supposer que $r < \infty$ et $p, q \in]1, +\infty[$. On note alors que $\max(p, q) < r$. Comme précédemment, on identifie f et g à des représentants dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$. La fonction $(|f| * |g|)$ est mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$ et pour $x \in \mathbb{R}^d$ on peut écrire

$$(|f| * |g|)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} \right) |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(y)|^{1-\frac{q}{r}}\; dy.$$

D'après l'inégalité de Hölder généralisée appliquée avec les exposants r, $\frac{rp}{r-p}$ et $\frac{rq}{r-q}$ on a alors

$$(|f| * |g|)(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q\; dy \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p\; dy \right)^{\frac{r-p}{rp}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q\; dy \right)^{\frac{r-q}{rq}}.$$

On obtient

$$|(|f| * |g|)(x)|^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q\; dy.$$

En intégrant par rapport à $x \in \mathbb{R}^d$ on obtient par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\||f| * |g|\|_r^r &\leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q\; dy \right) dx\\ &\leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p\; dx \right) dy\\ &\leqslant \|f\|_p^{r} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q\; dy\\ &\leqslant \|f\|_p^{r} \|g\|_q^{r}.\end{aligned}$$

D'où $|f| * |g| \in L^r(\mathbb{R}^d)$ avec $\||f| * |g|\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$. On conclut alors comme précédemment. □

1.1.3 D'autres produits de convolution

Le but de ce chapitre est d'étudier le produit de convolution sur $\mathbb{R}^d$, mais puisqu'on en a parlé en introduction on peut mentionner brièvement les produits de convolutions standards dans d'autres contextes.

Si u et v sont deux suites dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ alors on définit la suite $(u * v)$ par

$$(u * v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} v_k. \tag{1.3}$$

On peut également considérer le produit de convolution sur l'ensemble des fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si f et g sont deux telles fonctions on pose

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y)\, dy.$$

On ne peut pas définir ce produit de convolution sur tout espace mesuré. On voit ici qu'on a besoin d'avoir un groupe additif (pour donner un sens à $f(x-y)$). Ainsi on ne peut pas définir un produit de convolution sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{R}_+$. Pour contre on peut toujours prolonger par des termes nuls une suite indéxée par $\mathbb{N}$ en une suite indéxée par $\mathbb{Z}$. Ainsi, si u et v sont des suites dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ que l'on prolonge en des suites indéxées par $\mathbb{Z}$ en posant $u_{-m} = v_{-m} = 0$ pour $m \in \mathbb{N}$, alors (1.3) donne

$$(u * v)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k & \text{si } n \geqslant 0. \end{cases}$$

On obtient de nouveau une suite dont les termes d'indices négatifs sont nuls, et on ne perd donc rien à voir $(u * v)$ comme une suite indéxée par $\mathbb{N}$.

De même, si f et g sont des fonctions sur $\mathbb{R}_+$, on les prolonge par 0 sur $\mathbb{R}_-$ (on note toujours f et g les fonctions ainsi prolongées), et le produit de convolution de f et g est donnée par

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x f(x-y) g(y)\, dy & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Comme pour les suites, on ne perd rien à voir $(f * g)$ comme une fonction sur $\mathbb{R}_+$.

1.2 Régularisation de fonctions

Depuis qu'on les a introduits, on travaille beaucoup avec les fonctions dans les espaces de Lebesgue, éventuellement très irrégulières. On a déjà vu que l'ensemble des fonctions continues à supports compacts est dense dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1, +\infty[$. Le but de cette section est d'aller plus loin est d'approcher les fonctions intégrables par des fonctions de classe C^∞ (et toujours à supports compacts).

1.2.1 Approximation de l'unité

On a vu que que le produit de convolution définit un produit sur l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$. Une question naturelle est de se demander si ce produit admet une unité, c'est-à-dire un élément neutre $\mathbf{1}$, tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbf{1} * f = f * \mathbf{1} = f.$$

Un calcul formel montre facilement que ce qui pourrait jouer ce rôle serait la « fonction de Dirac », nulle en dehors de $\{0\}$ mais d'intégrale 1. Mais on a déjà dit qu'une telle fonction ne peut exister.

On note qu'on pourrait introduire le produit de convolution d'une fonction avec une mesure. Lorsque cela a un sens, on pourrait poser pour une fonction f et une mesure μ

$$(\mu * f)(x) = (f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, d\mu(y).$$

Avec la mesure de Dirac en 0 on obtiendrait bien $(\delta * f)(x) = f(x)$. Cela sera fait dans le cadre encore plus général des distributions.

Pour le moment, on ne travaille qu'avec des (classes d'équivalence de) fonctions. Il n'y a donc pas d'unité pour le produit de convolution, mais on peut considérer des fonctions qui en sont arbitrairement proches, au sens où ce sont des fonctions d'intégrale égale à 1 et dont l'essentiel de la masse est concentré très proche de 0. Plus précisément, on introduit la notion suivante.

Définition 1.11. On appelle approximation de l'unité (ou approximation de la masse de Dirac) une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ telles que

(i) ρ_n est à valeurs positives [1] pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n \, d\lambda = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iii) pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \rho_n \, d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut considérer des approximations de l'unité paramétrées par un réel plutôt qu'un entier.

En général on utilise le résultat suivant pour construire des suites d'approximation de l'unité.

Proposition 1.12. *Soit $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho \, d\lambda = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose*

$$\rho_n(x) = n^d \rho(nx).$$

Alors la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^d$.

Par exemple, on peut considérer le noyau défini par

$$\rho(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \tag{1.4}$$

ou, sur $\mathbb{R}$,

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \tag{1.5}$$

La preuve de la Proposition 1.12 repose simplement sur le changement de variable affine $y = nx$. On la laisse en exercice.

Le but d'une appoximation de l'unité est donc... d'approcher l'unité. En particulier on s'attend à ce que $(\rho_n * f)$ soit proche de f pour n grand. C'est bien le cas dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1, +\infty[$. En prenant par exemple $\rho_n = 2n\mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ on voit que le résultat suivant ne peut pas être valable avec $p = +\infty$.

Proposition 1.13. *Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On a*

$$\|(f * \rho_n) - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. On identifie f à un représentant dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n \, d\lambda = 1$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}(f * \rho_n)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\, \rho_n(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\, \rho_n(y)^{\frac{1}{p}} \rho_n(y)^{\frac{1}{q}} \, dy,\end{aligned}$$

1. On peut en aussi considérer des approximations de l'unité de signe variable, mais alors il faut s'assurer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1. En pratique, on utilise des approximations de l'unité à valeurs positives.

où q est l'exposant conjugué de p. Par l'inégalité de Hölder on obtient

$$|(f * \rho_n)(x) - f(x)|^p \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p \, \rho_n(y)\, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\, dy \right)^{\frac{p}{q}}.$$

La dernière intégrale vaut 1. En intégrant par rapport à $x \in \mathbb{R}^d$ et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli on obtient

$$\|f * \rho_n - f\|_p^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right) \rho_n(y)\, dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p \, \rho_n(y)\, dy.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition 0.68 il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|y| \leqslant \eta$ on a

$$\|\tau_y f - f\|_p^p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe ensuite $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$2^p \, \|f\|_p^p \int_{|y| \geqslant \eta} \rho_n(y)\, dy \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geqslant N$ on a alors

$$\|f * \rho_n - f\|_p^p \leqslant \int_{|y| \leqslant \eta} \|\tau_y f - f\|_p^p \, \rho_n(y)\, dy + \int_{|y| \geqslant \eta} \|\tau_y f - f\|_p^p \, \rho_n(y)\, dy \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$\|f * \rho_n - f\|_p^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \qquad \square$$

On a observé en début de chapitre que le produit de convolution a un effet régularisant. On peut donc s'attendre à ce que $\rho_n * f$ soit une fonction plus régulière que f. Et ce d'autant plus que ρ_n est elle-même régulière. Ainsi la Proposition 1.13 va nous permettre d'approcher une fonction L^p par une suite de fonctions régulières. Pour cela, on devra utiliser une suite d'approximation de l'unité constituée de fonctions régulières, par exemple en la construisant à partir des noyaux réguliers (1.4) ou (1.5). Si on souhaite approcher f par des fonctions régulières qui sont par ailleurs à support compact, il faudra utiliser des fonctions régularisantes à support compact. Ce qui n'est pas le cas pour (1.4) ou (1.5).

1.2.2 Fonctions régulières et localisées

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On commence par donner les propriétés de base de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω et à supports compacts. En particulier, le fait que cet ensemble n'est pas réduit à $\{0\}$.

Définition 1.14. On note $C_0^\infty(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur Ω dont le support est compact.

Avant toute chose, on commence par s'assurer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Proposition 1.15. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2} \right) & si \ |x| < 1, \\ 0 & si \ |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Son support est la boule fermée $\overline{B}(0,1)$.

Démonstration. • La fonction f est à valeurs strictement positives sur la boule ouverte $B(0,1)$ et s'annule sur $\mathbb{R} \backslash B(0,1)$, donc son support est bien $\overline{B}(0,1)$. En outre f est de classe C^∞ sur les ouverts $B(0,1)$ et sur $\mathbb{R} \backslash \overline{B}(0,1)$.

• Pour $r > 0$ on pose

$$g(r) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-r} \right) & \text{si } r < 1, \\ 0 & \text{si } r \geqslant 1. \end{cases}$$

g est de classe C^∞ sur $]0,1[$. On vérifie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $r \in]0,1[$ on a

$$g^{(n)}(r) = P_n\left(\frac{1}{1-r}\right)\exp\left(-\frac{1}{1-r}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées, la fonction $s \mapsto P_n(s)e^{-s}$ tend vers 0 quand s tend vers $+\infty$, donc

$$g^{(n)}(r) \xrightarrow[r\to 1]{} 0.$$

En particulier, g est continue en 1. Par ailleurs, toutes les dérivées de g sont nulles sur $]1,+\infty[$. Par le théorème de prolongement C^1 (qui repose sur le théorème des accroissements finis) on obtient par récurrence que g est n fois dérivable en 1 avec $g^{(n)}(1) = 0$. Finalement g est bien de classe C^∞ sur tout $]0,+\infty[$.

- Par composition de g avec la fonction lisse $x \mapsto |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$, on obtient que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Puisqu'elle l'est aussi sur $B(0,1)$, elle est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. □

A partir de ce premier exemple non trivial de fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on peut construire des « fonctions pic » dont on se servira ensuite comme approximation de l'unité.

Proposition 1.16. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ telle que $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subset \overline{B}(0,\varepsilon)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon = 1$.*

Démonstration. Soit f la fonction donnée par la proposition 1.15. Elle est continue et à support compact et donc intégrable sur $\mathbb{R}^d$. En outre, elle est à valeurs positives mais n'est pas identiquement nulle, donc son intégrale est strictement positive. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on peut alors poser

$$\rho(x) = \frac{f(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\,dt}.$$

La fonction ρ ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est de classe C^∞, elle est à valeurs positives, son support est $\overline{B}(0,1)$ est son intégrale vaut 1. On conclut alors en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$ □

1.2.3 Régularisation de fonctions

On montre maintenant que le produit de convolution d'une fonction très générale avec une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est bien défini et régulier. On en déduira ensuite que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.

On commence par rappeler quelques notations pour les fonctions régulières en dimension quelconque. Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^d$ on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d,$$

puis, pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} f.$$

On rappelle que d'après le théorème de Schwarz, l'ordre de dérivation n'a pas d'importance.

Proposition 1.17. *Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on a $(\rho * f) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a*

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\rho * f) = \left(\frac{\partial^\alpha \rho}{\partial x^\alpha}\right) * f. \tag{1.6}$$

Démonstration. Le produit de convolution est bien défini par la Proposition 1.5. Soit $j \in [\![1, d]\!]$. Il existe $R > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$|\partial_j \rho(x)| \leqslant M \mathbb{1}_{B(0,R)}(x).$$

Soit $r > 0$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ l'application $x \mapsto \rho(x-y)f(y)$ est de classe C^1 sur $B(0,r)$ et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \big(\rho(x-y)f(y)\big) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \rho(x-y) \right| |f(y)| \leqslant M \mathbb{1}_{B(0,R+r)}(y) \, |f(y)| \, .$$

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, la fonction $(\rho * f)$ est dérivable par rapport à x_j sur $B(0,r)$ de dérivée

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho * f) = (\partial_j \rho) * f.$$

Ceci étant valable pour tout $r > 0$, la proposition est démontrée pour $|\alpha| = 1$. On conclut alors par récurrence en remplaçant ρ par ses dérivées successives. $\square$

Théorème 1.18. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $R > 0$ tel que $g = \mathbb{1}_{B(R)} f$ vérifie $\|f - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'approximation de l'unité constituée de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors $(\rho_n * g)$ est de classe C^∞ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En outre $(\rho_n * g)$ est à support compact car ρ_n et g le sont (voir la Proposition 1.4). Enfin, d'après la Proposition 1.13, on a $\|g - (g * \rho_n)\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand, donc $\|f - (g * \rho_n)\|_p \leqslant \varepsilon$. $\square$

Remarque 1.19. Soient $p, q \in [1, +\infty[$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varepsilon > 0$. Dans la démonstration précédente on peut choisir R tel que $\|f - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|f - g\|_q \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $(g * \rho_n)$ tend vers g dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^q(\mathbb{R}^d)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - g_n\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|g - g_n\|_q \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Cela prouve qu'on peut construire une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que f_m tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^d)$.

1.2.4 Partitions de l'unité

On termine ce chapitre avec les partitions de l'unité. Le but est de pouvoir localiser un problème, en voyant une fonction f sur une ouvert Ω comme la somme de fonctions localisées sur dans des petits ouverts plus simples que Ω. On pourrait le faire en multipliant f par les indicatrices de parties formant une partition de Ω, mais on peut avoir besoin de localiser avec des fonctions régulières. C'est l'objet de ce paragraphe.

Proposition 1.20. *Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant K. Alors il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de K et $\chi = 0$ au voisinage de $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$.*

Démonstration. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$ on a $B(x, 4\varepsilon) \subset \mathcal{O}$. Soit alors ρ_ε la fonction pic donnée par la proposition 1.16. On pose alors

$$K_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} B(x, 2\varepsilon)$$

(de sorte que K_ε est « pris en sandwich » entre K et $\mathcal{O}$). Il ne reste plus qu'à régulariser la fonction indicatrice de K_ε. Pour cela on pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{K_\varepsilon}(x-y) \rho_\varepsilon(y) \, dy.$$

On vérifie alors que χ vérifie bien les propriétés attendues. $\square$

Proposition 1.21. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega_1, \dots, \omega_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^n \omega_j.$$

Alors il existe des fonctions $\chi_1, \dots, \chi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ telles que $\operatorname{supp}(\chi_j) \subset \omega_j$ pour tout $j \in [\![1, N]\!]$ et $\sum_{j=1}^n \chi_j$ est égale à 1 sur K.

Démonstration. • Soit $x \in K$. Il existe $j(x) \in [\![1, n]\!]$ et $r(x) > 0$ tels que $\overline{B}(x, r(x)) \subset \omega_{j(x)}$. La famille des $B(x, r(x))$ est un recouvrement ouvert de K donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_k \in K$ tels que

$$K \subset \mathcal{O} = \bigcup_{l=1}^{k} B(x_k, r(x_k)).$$

Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on pose

$$K_j = \bigcup_{\substack{1 \leqslant l \leqslant k \\ j(x_l) = j}} \overline{B}(x_l, r(x_l)),\tilde{.}$$

Alors K_j est un compact inclus dans ω_j. En outre on a

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j.$$

• On considère $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d, [0, 1])$ égale à 1 en dehors de $\mathcal{O}$ et nulle sur K. Pour cela on peut poser $\phi_0 = 1 - \chi$, où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, [0, 1])$ est donnée par la Proposition 1.20. Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on considère également $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, [0, 1])$ telle que $\phi_j = 1$ sur K_j et $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset \omega_j$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a alors

$$\sum_{i=0}^{n} \phi_i > 0.$$

Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on pose

$$\chi_j = \frac{\phi_j}{\sum_{i=0}^{n} \phi_i}.$$

Les χ_j, $0 \leqslant j \leqslant n$ sont de classe C^∞ à valeurs dans $[0, 1]$, leur somme vaut 1 partout et χ_j est à support compact pour $j \neq 0$. En outre, comme χ_0 est nulle sur K, on a bien $\sum_{j=1}^{n} \chi_j = 1$ sur K. □