Chapitre 4

Transformée de Fourier

4.1 Motivation

La transformée de Fourier que l'on va introduire dans ce chapitre sera un outil fondamental pour l'étude des équations aux dérivées partielles. La motivation est en fait la même que la diagonalisation d'un endomorphisme en dimension finie. On la rappelle ici.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soient A un endomorphisme de E et $u_0 \in E$. On considère sur E le problème

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où l'inconnue u est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans E. Le cas favorable est le cas où u_0 est un vecteur propre de A, associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, il est facile de voir qu'on obtient une solution en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = e^{t\lambda} u_0.$$

En effet, la fonction u ainsi définie est de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans E, on a $u(0) = u_0$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = e^{t\lambda} \lambda u_0 = e^{t\lambda} A u_0 = Au(t).$$

Comme l'équation $u' = Au$ est linéaire par rapport à u, on obtient que si u_0 est une combinaison linéaire de vecteurs propres, c'est-à-dire si

$$u_0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j,$$

où $k \leqslant n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$ le vecteur e_j est un vecteur propre de A associée à une valeur propre $\lambda_j \in \mathbb{C}$, alors une solution de (4.1) est donnée par

$$u(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{t\lambda_j} \alpha_j e_j.$$

L'intérêt des résultats de réduction des endomorphismes est alors de donner des critères assurant que tout vecteur u_0 de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs propres de A. Ainsi, si A est un endomorphisme diagonalisable et si on peut déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres, on pourra alors résoudre *facilement* le problème (4.1) *pour n'importe quelle donnée initiale* u_0.

Il se trouve que beaucoup de modèles issus de problèmes concrêts peuvent s'écrire sous la forme (4.1), mais avec un espace E qui est un espace de fonctions (typiquement $L^2(\mathbb{R}^d)$), et donc de dimension infinie, et une application linéaire A qui est un opérateur différentiel.

Un exemple qui revient souvent (par exemple pour l'équation de la chaleur, mais aussi pour l'équation de Schrödinger ou encore l'équation des ondes) est l'opérateur Laplacien

$$A = \Delta = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

L'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ s'écrit par exemple

$$\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x), \quad \forall t \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

L'étude est évidemment plus compliquée qu'en dimension finie, raison de plus pour l'aborder du bon point de vue.

Pour simplifier la suite de la discussion, on suppose que $d = 1$. Considérons pour le moment l'exemple le plus simple d'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$:

$$Av(x) = v'(x).$$

On cherche des vecteurs propres pour l'opérateur A, c'est-à-dire des fonctions v telles que $v' = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. Les candidats sont alors les fonctions exponentielles $x \mapsto e^{\lambda x}$. Ces fonctions apparaissent déjà dans la théorie des *séries de Fourier*, séries qui ont précisément été introduites pour résoudre l'équation de la chaleur, mais sur un intervalle borné. Joseph Fourier affirmait que toute fonction T-périodique (pour un certain $T > 0$) s'écrit comme série de fonctions de la forme $\cos(2\pi nx/T)$ ou $\sin(2\pi nx/T)$. Avec les notations exponentielles, cela revient à dire que toute fonction s'écrit comme série (ou plutôt comme limite de combinaisons linéaires) des fonctions

$$e_n : x \mapsto e^{\frac{2i\pi nx}{T}}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Cela date d'une époque où le concept de fonction était moins clair qu'aujoud'hui, mais toujours est-il qu'un résultat central de la théorie des séries de Fourier est que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une *base hilbertienne* de l'espace $L_T^2(\mathbb{R})$ des fonctions f mesurables et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{L_T^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Muni de cette norme, $L_T^2(\mathbb{R})$ est alors un espace de Hilbert, dont la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une base hilbertienne. Ainsi pour toute fonction $f \in L_T^2(\mathbb{R})$ on a dans $L_T^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n \quad \text{où} \quad c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{2i\pi ny}{T}} f(y)\, dy.$$

En outre, chaque e_n est un vecteur propre pour l'opérateur de dérivation. Si f est régulière on a alors

$$f' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2i\pi n}{T} c_n(f) e_n.$$

Ici, on s'intéresse à des fonctions qui ne sont pas périodiques. Formellement, on a envie de voir ce qu'il se passe si on fait tendre T vers $+\infty$ dans les expressions précédentes. En observant que pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\frac{2\pi}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi)\, d\xi \tag{4.2}$$

(c'est essentiellement une somme de Riemann), on a très envie d'écrire $f(x)$ comme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} f(y)\, dy\right) e^{ix\xi}\, d\xi. \tag{4.3}$$

Mais pour cela il va falloir clarifier pas mal de choses. Et c'est l'objet de ce chapitre.

Si cette écriture a un sens, et qu'elle donne vraiment une expression de $f(x)$, alors on aura écrit f comme une intégrale (qui peut être vue comme la limite d'une série, voir (4.2), ou encore comme une « somme continue ») de fonctions de la forme $c_\xi(f)e^{ix\xi}$, qui sont bien des « vecteurs propres » (encore faudrait-il préciser l'espace dans lequel on travaille) associé à l'opérateur de dérivation. En outre le coefficient $c_\xi(f)$ s'écrit comme le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ de f avec la fonction conjuguée $x \mapsto \overline{e^{ix\xi}} = e^{-ix\xi}$. Petit détail, la fonction $x \mapsto e^{ix\xi}$ n'est pas du tout dans $L^2(\mathbb{R})$...

4.2 Définition et premières propriétés

On commence par définir ce qui jouera le rôle de « coefficient de Fourier » pour une fonction qui n'est pas périodique. C'est dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ que la définition suivante a naturellement un sens.

Définition 4.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ on note

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx.$$

La fonction $\hat{f}$ ainsi définie sur $\mathbb{R}^d$ est appelée *transformée de Fourier* de f.

Cette définition est bien licite car la fonction $x \mapsto e^{-ix\cdot\xi} f(x)$ est intégrable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. En outre, la définition de $\hat{f}(\xi)$ ne dépend pas du choix d'un représentant pour f. On remarque qu'on a en particulier

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Exemple 4.2. Soit $a > 0$. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{[-a,a]}$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(0) = 1$ et pour $\xi \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.$$

Exemple 4.3. Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = e^{-a|x|}$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a (exercice)

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}.$$

Remarque 4.4. Plusieurs conventions co-existent pour la définition de $\hat{f}$. On peut poser

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx,$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx,$$

ou encore

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi x\cdot\xi} f(x)\,dx.$$

Aucune n'est meilleure que les autres, si on retire le facteur $(2\pi)^d$ à un endroit de la théorie il réapparait ailleurs. Ainsi, quand on utilise la transformée de Fourier, il est préférable de toujours commencer par rappeler la définition utilisée.

On donne maintenant un certain nombre de propriétés de base pour la transformée de Fourier.

Proposition 4.5. *(i) L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire.*

(ii) Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|f\|_1$.

(iii) Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ et tend vers 0 quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. La première propriété résulte de la linéarité de l'intégrale, et la seconde de l'inégalité triangulaire. La continuité de f s'obtient en utilisant le théorème de continuité sous l'intégrale.

Montrons que $\hat{f}$ tend vers 0 quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$. On commence par supposer que f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $j \in [\![1,d]\!]$. Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^d$ tel que $\xi_j \neq 0$. On a

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi_j} \int_{\mathbb{R}^d} -\partial_{x_j} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx = \frac{1}{i\xi_j} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \partial_{x_j} f(x)\,dx = \frac{1}{i\xi_j} \widehat{\partial_{x_j} f}(\xi).$$

Puisque $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a $\widehat{\partial_{x_j} f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et donc $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 quand $|\xi_j|$ tend vers $+\infty$. Ceci étant valable pour chaque j, on obtient le résultat pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On considère maintenant le cas général. Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|f - g\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. En outre il existe $R > 0$ tel que pour $|\xi| \geqslant R$ on a $|\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $|\xi| \geqslant R$ on a alors

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|f - g\|_{L^1} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que $\hat{f}$ tend vers 0 quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$. □

Proposition 4.6. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.*

(i) *Si f est paire (respectivement impaire), alors $\hat{f}$ paire (respectivement impaire).*

(ii) *Si f est à valeurs réelles alors $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

(iii) *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $g : x \mapsto f(x - x_0)$. Alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-ix_0\cdot\xi}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

(iv) *Soient $\alpha > 0$ et $g : x \mapsto f(\alpha x)$. Alors $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\alpha^d} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

Une propriété remarquable (et qui jouera un rôle important dans les applications) est que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit usuel des transformées de Fourier. Après les propriétés de régularisation, c'est une deuxième application extrêmement importante du produit de convolution.

Proposition 4.7. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a*

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f}\hat{g}.$$

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$. L'application $(x,y) \mapsto e^{-ix\cdot\xi} f(x-y) g(y)$ est mesurable et d'après le théorème de Fubini-Tonelli et les propriétés du produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left| e^{-ix\cdot\xi} f(x-y) g(y) \right| dx\,dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \right) dx \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

D'après le théorème de Fubini-Lebesgue on a alors

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} (f * g)(\xi)\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\,dy \right) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)\,dx \right) dy \\
&= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

4.3 Formule d'inversion

La propriété qui fait que la transformée de Fourier est utilisable en pratique est qu'on peut retrouver la fonction de départ si on connaît sa transformée de Fourier.

Proposition 4.8. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Remarque 4.9. On observe que la formule donnant la transformée de Fourier inverse est quasiment la même que celle donnant la transformée de Fourier elle-même (seul le signe dans l'exponentielle change). Ainsi, si on note $\mathcal{F}_1$ l'application qui à $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ associe $\hat{f}$ et $\mathcal{T}$ l'application qui à une fonction f associe $x \mapsto f(-x)$ on a, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_1 f = \mathcal{T} f.$$

Démonstration. • Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad \text{et} \quad F_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon(|\xi_1|+\cdots+|\xi_d|)} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Par le théorème de continuité sous l'intégrale, ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^d$. En outre, par le théorème de convergence dominée on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$F_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F(x).$$

• Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. La fonction

$$(y, \xi) \mapsto e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon(|\xi_1|+\cdots+|\xi_d|)} f(y)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, donc par le théorème de Fubini-Lebesgue on a

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon(|\xi_1|+\cdots+|\xi_d|)} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi} f(y)\, dy \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{i(x_j - y_j)\xi_j} e^{-\varepsilon|\xi_j|}\, d\xi_j \right) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, d]\!]$. Le calcul de l'exemple 4.3 donne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(x_j - y_j)\xi_j} e^{-\varepsilon|\xi_j|}\, d\xi_j = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x_j - y_j)^2}.$$

Pour $s = (s_1, \ldots, s_j) \in \mathbb{R}^d$ on note

$$\chi(s) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{\pi(1 + s_j^2)} \quad \text{et} \quad \chi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon^d} \chi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right).$$

On a alors

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(2\varepsilon)^d f(y)}{\prod_{j=1}^d (\varepsilon^2 + (x_j - y_j)^2)}\, dy = (\chi_\varepsilon * f)(x).$$

Comme $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ définit une approximation de l'unité, $F_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|F_\varepsilon - f\|_{L^1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$. En particulier, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que F_{ε_n} tend vers f presque partout. Cela prouve que $F = f$ presque partout. □

Ainsi on a montré que sous les hypothèses de la proposition 4.8, l'expression obtenue formellement en (4.3) est bien valable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

On observe que la proposition 4.8 prouve par ailleurs l'injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 4.10. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\hat{f} = 0$ presque partout, alors $f = 0$.*

Démonstration. Si $\hat{f} = 0$ alors en particulier $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On peut donc appliquer la proposition 4.8, qui montre que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. □

4.4 Dérivation et multiplication par un polynôme - Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

On en vient maintenant à la propriété pour laquelle on a introduit la transformée de Fourier : le bon comportement vis-à-vis des opérateurs de dérivation. On travaille avec les fonctions $x \mapsto e^{ix\cdot\xi}$ car les dériver revient à les multiplier par un scalaire. Ainsi, si on a

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi,$$

on voudrait pouvoir écrire

$$\partial_{x_j} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} i\xi_j e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Évidemment ces expressions n'ont pas de sens pour n'importe quelle fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On se contente pour le moment d'établir les propriétés liées à la dérivation pour les fonctions f dans la classe de Schwartz. On reviendra sur ces propriétés avec une très grande généralité au chapitre suivant.

Le calcul effectué pour la preuve de la proposition 4.5 donne la propriété suivante :

Proposition 4.11. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a*

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$$

En particulier, l'application $\xi \mapsto \xi_j \hat{f}(\xi)$ est dans L^∞.

Du fait que la transformée de Fourier inverse a une expression analogue à la transformée de Fourier elle-même, il n'est pas surprenant de constater qu'on a en fait une propriété analogue dans l'autre sens. C'est-à-dire que la transformée de Fourier change la multiplication par la variable x_j en une dérivation par rapport à ξ_j :

Proposition 4.12. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors $\hat{f}$ est dérivable par rapport à ξ_j et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\widehat{x_j f}(\xi) = i\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi).$$

Démonstration. Pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ on note $\varphi(x, \xi) = e^{-ix\xi} f(x)$. Alors φ est dérivable par rapport à ξ et pour tout $(x, \xi) \in (\mathbb{R}^d)^2$ on a

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(x, \xi) \right| = \left| -ix_j e^{-ix\xi} f(x) \right| = \left| x_j f(x) \right|.$$

Comme la fonction $x \mapsto |x_j f(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient par le théorème de dérivation sous l'intégrale que $\hat{f}$ est dérivable par rapport à ξ_j sur $\mathbb{R}^d$ et, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$i\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} x_j f(x)\, dx = \widehat{x_j f}(\xi). \qquad \square$$

Exercice 4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
1. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f' est intégrable. Montrer que pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi).$$

En déduire que l'application $\xi \mapsto \xi \hat{f}(\xi)$ est bornée.
2. On suppose que $xf \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$i\hat{f}'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}(-ixf(x))\, dx = \widehat{(xf)}(\xi).$$

L'espace de Schwartz est l'espace des fonctions pour lesquelles on peut dériver et multiplier par la variable autant de fois que l'on veut. En outre ces deux opérations jouent des rôles symétriques. Avec les deux propositions précédentes, tout indique que c'est un espace dans lequel la transformée de Fourier est particulièrement agréable.

On note $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ la restriction de la transformée de Fourier à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 4.13. *L'application $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} : f \mapsto \hat{f}$ réalise une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En outre, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \widehat{\partial_x^\alpha x^\beta f}(\xi). \tag{4.4}$$

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. En appliquant $|\beta|$ fois la proposition 4.12, on obtient que la dérivée partielle $\partial^\beta \hat{f}$ existe et

$$\widehat{x^\beta f}(\xi) = i^{|\beta|} \partial^\beta \hat{f}(\xi).$$

En appliquant maintenant la proposition 4.11 aux dérivées successives de $x^\beta f$ on obtient

$$\widehat{\partial^\alpha x^\beta f}(\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} \xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi).$$

En particulier, la fonction $\xi \mapsto \xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi)$ est bornée. Cela assure que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et prouve (4.4).

L'application $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ est alors injective par le corollaire 4.10. Enfin, d'après la remarque 4.9 on a $f = \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mathcal{T} f$, donc $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ est surjective. Ainsi $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, de réciproque

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{-1} = \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mathcal{T} = \mathcal{T} \mathcal{F}_{\mathcal{S}}. \qquad \square$$

Exemple 4.14. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors la transformée de Fourier de $-\Delta f$ est $\xi \mapsto |\xi|^2 \hat{f}(\xi)$.

Exemple 4.15. On cherche à calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. On note que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particulier $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\hat{f}'(\xi) = \widehat{-ixf}(\xi) = i\widehat{f'}(\xi) = -\xi \hat{f}(\xi).$$

Cela prouve que

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \hat{f}(0).$$

Or on sait que

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1,$$

donc finalement

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Plus généralement, pour $\sigma > 0$, si on considère $f_\sigma : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ alors pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\hat{f}_\sigma(\xi) = \sigma e^{-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}}.$$

Au chapitre précédent on a défini une topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il n'est pas difficile de voir que la transformée de Fourier se comporte bien vis-à-vis de cette topologie.

Proposition 4.16. *La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et sa réciproque sont des fonctions continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. D'après la proposition précédente on a

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left| \xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \partial^\alpha (x^\beta f(x)) \right|.$$

D'après la formule de Leibniz, on a

$$\partial^\alpha (x^\beta f(x)) = \sum_{\tilde{\alpha} \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\tilde{\alpha}} \partial^{\alpha - \tilde{\alpha}} (x^\beta) (\partial^{\tilde{\alpha}} f)(x).$$

Ainsi il existe $C > 0$ telle que

$$\left|\partial^\alpha(x^\beta f(x))\right| \leqslant \sum_{\substack{\tilde\alpha \leqslant \alpha \\ \tilde\beta \leqslant \beta}} \left|x^{\tilde\beta}\partial^{\tilde\alpha} f(x)\right|.$$

Cela prouve que la transformée de Fourier est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. C'est aussi le cas de sa réciproque $\mathcal{F}_\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{F}_\mathcal{S}\mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est clairement continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

4.5 Transformée de Fourier L^2

Jusqu'ici on a discuté des propriétés de la tranformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (car c'est l'espace dans lequel la définition a naturellement un sens) et dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (car c'est l'espace le plus confortable). Mais ce ne sera pas suffisant. Notre espace préféré dans la suite sera l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, qui a le bon goût d'être un espace de Hilbert. On a donc besoin de savoir manipuler la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Problème, une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ n'est pas forcément intégrable, et la transformée de Fourier n'a même pas de sens dans ce cas.

On commence par pousser un peu plus loin l'analyse de la transformée de Fourier pour les fonctions de Schwartz. Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut le munir de la norme correspondante. La transformée de Fourier $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ est alors une isométrie pour cette norme :

Proposition 4.17. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors on a*

$$\|\hat f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Démonstration. L'application $(x,\xi) \mapsto e^{-ix\cdot\xi} f(x)\overline{\hat f(\xi)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, donc par le théorème de Fubini-Lebesgue on a

$$\begin{aligned}
\|\hat f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat f(\xi)\overline{\hat f(\xi)}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx\right)\overline{\hat f(\xi)}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\overline{\hat f(\xi)}\,d\xi\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\hat f(\xi)\,d\xi\right)}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$
□

On utilise maintenant le fait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour étendre $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 4.18. *Il existe une unique application unitaire $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ (application linéaire, bijective et préservant la norme) telle que*

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad \mathcal{F}f = \hat f. \tag{4.5}$$

Démonstration. • On suppose que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux applications unitaires sur L^2 vérifiant (4.5). Alors $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux applications continues sur L^2 qui coïncident sur la partie dense $\mathcal{S}$. Elles coïncident donc partout, ce qui assure l'unicité.
• Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de Schwartz qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. D'après la Proposition 4.17, la suite $(\hat f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $L^2(\mathbb{R}^d)$ est complet, $\hat f_n$ admet une limite, qu'on note $\mathcal{F}f$. On peut alors vérifier que cette définition de $\mathcal{F}f$ ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

on a $\mathcal{F}f = \hat{f}$. Par linéarité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et la proposition 4.17, l'application $\mathcal{F}$ est linéaire et c'est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$. En outre, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}f = f.$$

Par continuité, cette égalité est encore valable dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, ce qui assure que $\mathcal{F}$ est surjective. □

Proposition 4.19. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ on a $\mathcal{F}f = \hat{f}$.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Schwartz qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathcal{F}f_n = \hat{f}_n$. Comme $\mathcal{F}$ est continue dans L^2 on a

$$\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En particulier, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\mathcal{F}f_n$ tend vers $\mathcal{F}f$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. D'autre part on a

$$\|\hat{f} - \hat{f}_n\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|f - f_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela implique que $\mathcal{F}f = \hat{f}$ presque partout. □

On rappelle que pour une fonction qui n'est pas intégrable, on ne peut pas utiliser l'expression de $\mathcal{F}f$ donnée par la définition 4.1. On a tout de même la propriété suivante :

Proposition 4.20. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$ on note*

$$\tilde{f}_n(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{B(n)} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

Alors on a

$$\left\|\mathcal{F}f - \tilde{f}_n\right\|_{L^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. On a

$$\left\|f - \mathbb{1}_{B(n)} f\right\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $\mathbb{1}_{B(n)} f \in L^1 \cap L^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc par la proposition 4.19

$$\|\mathcal{F}f - \tilde{f}_n\|_2 = \left\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}(\mathbb{1}_{B(n)} f)\right\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

4.6 Exemple d'application

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on considère l'équation

$$-\Delta u + u = f,$$

d'inconnue $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En prenant la transformée de Fourier, on obtient que u est solution si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a

$$(|\xi|^2 + 1)(\mathcal{F}_\mathcal{S} u)(\xi) = (\mathcal{F}_\mathcal{S} f)(\xi),$$

soit

$$(\mathcal{F}_\mathcal{S} u)(\xi) = \frac{(\mathcal{F}_\mathcal{S} f)(\xi)}{1 + |\xi|^2}.$$

On considère la fonction $\tilde{f}$ qui à $\xi \in \mathbb{R}^d$ associe $\frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{1+|\xi|^2}$. Cela définit une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|\tilde{f}\|_{L^2} \leqslant \|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

On pose alors $Rf = \mathcal{F}^{-1}\tilde{f}$. Cela définit également une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|Rf\|_{L^2} = \|\tilde{f}\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que l'application $f \mapsto Rf$ est linéaire. Ainsi R définit une application linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, continue pour la norme L^2. Elle s'étend donc par continuité en une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a alors

$$(-\Delta + 1)Rf = f.$$

Ainsi, sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ au moins, R est un inverse pour l'application linéaire $(-\Delta + 1)$. Bien entendu, si f est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ mais pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, rien n'assure que Rf est deux fois dérivable, ce qui nous empêche d'écrire une égalité analogue. L'un des objectifs de la suite du cours sera précisément de gérer ce genre de situation.

Une dernière question à propos de cet exemple. Peut-on donner une expression un peu plus explicite pour la solution Rf du problème ? On doit calculer la transformée de Fourier inverse du produit de deux fonctions. C'est là qu'intervient le produit de convolution (voir la proposition 4.7). Ainsi, si G est une fonction dont la transformée de Fourier vérifie

$$\hat{G}(\xi) = \frac{1}{1 + |\xi|^2},$$

alors on aura

$$\widehat{Rf}(\xi) = \hat{G}(\xi)\hat{f}(\xi),$$

et donc

$$Rf(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}(G * f)(x).$$

Reste à déterminer G. Au moins pour la dimension $d = 1$, on a déjà fait le calcul à l'exemple 4.3 et on obtient

$$G(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}.$$

Cela donne

$$Rf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{2} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|y|}}{2} f(x-y)\,dy.$$

On peut alors vérifier par un calcul explicite (le faire en exercice) que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a bien

$$-(Rf)''(x) + Rf(x) = f(x).$$

En dimension 1, le résultat n'est pas très spectaculaire, car il s'agit simplement d'une équation différentielle ordinaire à coefficients constants, et on aurait pu obtenir le même résultat avec des méthodes de première année (une double variation de la constante, saurez-vous le faire ?), mais la méthode illustrée sur cet exemple simple sera utile pour des problèmes plus subtiles. Pour cela, on a encore besoin d'introduire de nouveaux outils...