Examen Final

Vendredi 10 janvier 2020 (3 heures)

Exercice 1. **1.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

a. Montrer que la fonction f ainsi définie est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la dérivée au sens des distributions de f (sans utiliser la formule des sauts).

2. **a**. Rappeler la définition de la convergence d'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace des fonctions test $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

b. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ égale à 1 sur $[-1,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\phi_n(x) = e^{-n}\chi(x-n)$. La suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$?

3. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

a. Rappeler la définition de la distribution fT et démontrer que c'est effectivement une distribution.

b. Montrer que

$$(fT)' = f'T + fT'.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $T_n = \sum_{k=0}^n \delta_k$, où δ_k désigne la distribution de Dirac au point k. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on notera T (on explicitera $\langle T, \phi\rangle$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$).

Exercice 2. **1.** Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx = \phi(0).$$

2. On considère $u \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$. On rappelle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$u(x) = \alpha + \int_0^x u'(s)\,ds.$$

Quitte à changer de représentant pour u, on suppose que l'égalité est en fait vraie pour tout $x > 0$. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une limite en 0 (qu'on notera $u(0)$).

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

a. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ décroissante, à support dans $[0,2]$ et égale à 1 sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$ on pose $\chi_n(x) = \chi(nx)$. Montrer que pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$-\int_0^{+\infty} u(x)(\phi\chi_n)'(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(0)\phi(0).$$

b. Montrer que la dérivée $T'_{\tilde{u}}$ de la distribution associée à $\tilde{u}$ est égale à $u(0)\delta_0 + T_v$, où δ_0 est la distribution de Dirac en 0 et T_v est la distribution associée à une fonction $v \in L^2(\mathbb{R})$ à expliciter.

c. En déduire que $\tilde{u}$ est dans $H^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $u(0) = 0$.

4. On suppose maintenant que $u(0) = 0$.

a. Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ à support dans $[1,2]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $\rho_n * \tilde{u}$ est nulle sur $]-\infty, \frac{1}{n}[$.

c. Montrer qu'il existe une suite de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ qui converge vers u dans $H^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 3. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx.$$

1. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application

$$T_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{C} \\ \phi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\phi(x)\,dx \end{array} \right.$$

est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Exprimer la transformée de Fourier de

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u$$

en fonction de celle de u.

3. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u = f \tag{$*$}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

4. Montrer que si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors la solution u de $(*)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. On note $C_+^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support inclus dans $[0, +\infty[$. On note également $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$ à support inclus dans $[0, +\infty[$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ à support dans $[-2, 2]$ et égale à 1 sur $[-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\chi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et T_f la distribution associée. Montrer que $T_f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ si et seulement si f est presque partout nulle sur $]-\infty, 0[$.

2. Soient $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \big(T * (\chi_n\phi)\big)(x)$$

existe. On notera $(T * \phi)(x)$ cette limite. *Indication : on pourra montrer que la suite considérée est en fait constante à partir d'un certain rang.*

3. Pour $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$, calculer $\delta * \phi$.

4. Soient $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $(T * \phi) \in C_+^\infty(\mathbb{R})$.