Examen Partiel

Mercredi 20 novembre 2019 (1h30)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

On note δ la distribution de Dirac en 0. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

Si T est une distribution sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}T$ sa transformée de Fourier.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = H(x)\cos(x)$.
1. Vérifier que f est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et rappeler la définition de la distribution associée à f (que l'on notera T_f).
2. Calculer la dérivée T_f' de la distribution T_f (par calcul direct, sans utiliser la formule des sauts).

Exercice 2. Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ à support inclus dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $(\rho_n * \phi)$ converge uniformément vers ϕ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. **1.** Pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ on note $\check{f}$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f(-x)$. On dit alors que f est impaire si $\check{f} = -f$ presque partout. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on considère la distribution tempérée $\check{T}$ définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \check{T}, \phi \rangle = \langle T, \check{\phi} \rangle .$$

On dit alors que T est impaire si $\check{T} = -T$.

a. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On note $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la distribution associée. Montrer que T_f est impaire si et seulement si f est impaire.

b. Montrer que si T est impaire alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ est impaire.

2. On note maintenant T la distribution $\mathsf{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

a. Montrer que $xT = 1$ (où on a noté 1 la distribution tempérée associée à la fonction constante égale à 1).

b. Montrer que $(\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}(-ixT)$ et en déduire $(\mathcal{F}T)'$.

c. Montrer que $\mathcal{F}T$ est impaire.

d. Calculer $\mathcal{F}T$.

Exercice 4. Si f est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, alors pour $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est homogène de degré k si pour tous $\lambda > 0$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\left\langle T, \phi_{1/\lambda} \right\rangle = \lambda^{d+k} \left\langle T, \phi \right\rangle . \qquad (*)$$

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution homogène de degré $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$. Montrer que la distribution dérivée $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ est homogène de degré $(k-1)$.

2. Soit T une distribution homogène de degré $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = kT,$$

où $x_j \frac{\partial T}{\partial x_j}$ désigne la multiplication de la distribution $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ par la fonction coordonnée $x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_j$.

Indication : on pourra dériver par rapport à λ l'égalité $(*)$.