L2 Parcours Spécial Mathématiques – Année 2018/2019

Théorie de la Mesure et de l'Intégration

Exercices

E.1 Prologue

***Exercice* 1** (À la grecque)**.** On considère dans $\mathbb{R}^2$ la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 1 - x^2$, puis on note $\mathcal{S}$ la région délimitée par $\mathcal{P}$ et l'axe des abscisses :

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \,|\, 0 < y < 1 - x^2\right\}.$$

1. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ avec $a < b$. On note T le triangle formé par les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses a, $\frac{a+b}{2}$ et b. Montrer que l'aire de T est $(b - a)^3/8$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0, 2^n]\!]$ $x_{n,k} = -1 + k2^{-n+1}$. Pour $k \in [\![1, 2^n]\!]$ on note alors $T_{n,k}$ le triangle formé par les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses $x_{n,k-1}$, $\frac{x_{n,k-1}+x_{n,k}}{2}$ et $x_{n,k}$. Montrer que l'aire de $T_{n,k}$ vaut 2^{-3n}.
3. En déduire que l'aire de $\mathcal{S}$ est supérieure ou égale à $\sum_{n\in\mathbb{N}} 4^{-n}$.
4. Calculer l'aire de $\mathcal{S}$ à l'aide d'un intégrale et comparer à cette somme.

***Exercice* 2.** Expliciter les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $\big([1, 6] \cap [0, 5]\big) \setminus [3, 8]$
2. $[1, 6] \cap \big([0, 5] \setminus [3, 8]\big)$
3. $\big([1, 6] \cup [0, 5]\big) \setminus [3, 8]$
4. $[1, 6] \cup \big([0, 5] \setminus [3, 8]\big)$
5. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$
6. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$
7. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right[$
8. $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} [n, +\infty[$
9. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right[$
10. $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}]q - \varepsilon, q + \varepsilon[$, où $\varepsilon > 0$

***Exercice* 3.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner l'image réciproque de $]a, +\infty[$ par la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = -3x + 5$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$
5. $f(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = -x + 1$ si $x < 0$
6. $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$

***Exercice* 4.** Pour tout partie A de $\mathbb{N}$ on note $\nu(A) = \mathsf{Card}(A)$ si A est finie, et $\nu(A) = +\infty$ sinon. Cela définit une application ν de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Que pensez-vous des assertions suivantes :

(i) $\nu(\emptyset) = 0$
(ii) Pour $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ on a $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.
(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes, alors dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ on a : $\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$.
(iv) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de $\mathbb{N}$, alors dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on a : $\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$.

(v) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (pour l'inclusion [1]) de parties de $\mathbb{N}$, alors on a

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

(vi) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion [2]) de parties de $\mathbb{N}$, alors on a

$$\nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

***Exercice* 5.** **1.** Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant x \leqslant n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, dessiner le graphe de f_n.
b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

c. Montrer que l'intégrale « généralisée » $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la calculer, et étudier sa limite quand n tend vers $+\infty$.
2. Mêmes questions avec les fonctions g_n et h_n définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{n^2} & \text{si } 0 \leqslant x < n, \\ \frac{2}{n} - \frac{x}{n^2} & \text{si } n \leqslant x < 2n, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 2n. \end{cases} \quad \text{et} \quad h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{n}. \end{cases}.$$

3. Sur le même modèle, donner des exemples de suites de fonctions $(\tilde{f}_n)$, $(\tilde{g}_n)$ et $(\tilde{h}_n)$ qui convergent ponctuellement vers 0 mais telles que les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_n\,dx$, $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_n\,dx$ et $\int_{\mathbb{R}} \tilde{h}_n\,dx$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

E.2 Dénombrabilité

***Exercice* 6.** Parmi les ensembles suivants, lequels sont dénombrables :

(i) $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$,
(ii) $\{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$,
(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$,
(iv) $\{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$,
(v) l'ensemble des nombres premiers,
(vi) l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

***Exercice* 7.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^N$ est presque nulle s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant N$. On dit qu'elle est stationnaire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_m$ pour tous $n, m \geqslant N$.
1. Montrer que l'ensemble des suites presques nulles à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. L'ensemble des suites stationnaires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

***Exercice* 8.** Soit E un ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est fini ou indénombrable.

***Exercice* 9.** Soit A un ensemble et $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ ouverts, non vides, et deux à deux disjoints. Montrer que A est dénombrable.

1. Cela signifie que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Cela signifie que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

***Exercice* 10.** **1.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$.

a. Soit $x \in U$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x \in \left]q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}\right[\subset U.$$

b. Montrer que U est union dénombrable d'intervalles ouverts.

2. On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme quelconque. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est union dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$. Même question en remplaçant « boule ouverte »par « boule fermée ».

***Exercice* 11.** On dit d'un réel x qu'il est algébrique s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{d} a_k x^k = 0.$$

Montrer qu'il existe des réels qui ne sont pas algébriques.

E.3 Tribus

***Exercice* 12.** Soit $\mathcal{M}$ une tribu de X et $E \in \mathcal{P}(X)$. Montrer que

$$\mathcal{M}_E := \{A \cap E, A \in \mathcal{M}\}$$

est une tribu de E. On pourra dire que $\mathcal{M}_E$ est la tribu induite par $\mathcal{M}$ sur E.

***Exercice* 13.** Donner un exemple de topologie qui n'est pas une tribu.

***Exercice* 14.** Soient X un ensemble et A une partie de X. Déterminer la plus petite σ-algèbre de X contenant A.

***Exercice* 15.** Soit X un ensemble. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ des parties deux à deux disjointes de X telles que $X = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Déterminer le nombre d'éléments de la tribu de X engendrée par $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

***Exercice* 16.** Déterminer la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\big\{[0,2], [1,3]\big\}$.

***Exercice* 17.** Soit X un ensemble.

1. Déterminer la tribu engendrée par les singletons de X.

2. Déterminer la tribu engendrée par les parties de X contenant deux éléments.

***Exercice* 18.** Soient X un ensemble et A une partie de X. Déterminer la tribu engendrée par les parties de X contenant A.

***Exercice* 19.** Soit X un ensemble. Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux tribus de X. Déterminer les tribus engendrées par $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ et par $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

***Exercice* 20.** Soit X un ensemble non vide. On appelle algèbre de X une famille $\mathcal{A}$ de parties de X telle que $X \in \mathcal{A}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a $X \setminus A \in \mathcal{A}$ et $A \cup B \in \mathcal{A}$.

1. Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. Montrer qu'il existe une plus petite algèbre (au sens de l'inclusion) contenant P.

2. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'algèbres de X telle que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est une algèbre de X.

3. Que dire de la question précédente si on remplace « algèbre » par « σ-algèbre » ? On pourra par exemple considérer $X = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \sigma(\{0\}, \ldots, \{n\})$.

***Exercice* 21.** Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, Y un ensemble et φ une fonction de X dans Y.

1. Montrer que $\mathcal{N} = \big\{B \,|\, \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{M}\big\}$ est une tribu sur Y. On l'appelle tribu image de $\mathcal{M}$ par φ.

2. Expliciter $\mathcal{N}$ lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$.

3. Même question lorsque $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$.

4. On suppose que φ est une bijection. Montrer que $\mathcal{M}$ est la tribu image de $\mathcal{N}$ par φ^{-1}.

5. On suppose que X et Y sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et que φ est un homéomorphisme de X dans Y. Montrer que la tribu image de la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ par φ est la tribu borélienne $\mathcal{B}(Y)$ de Y.

***Exercice* 22.** Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par l'ensemble des intervalles de la forme $]a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{Q}$.

***Exercice* 23.** Soit X un espace topologique, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$. Soit F une partie de X, muni de la topologie induite et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(F)$ correspondante.
1. Montrer que

$$\mathcal{B}(F) = \{A \cap F, A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

2. Montrer que si F est un borélien de X alors $\mathcal{B}(F)$ est simplement l'ensemble des boréliens de X inclus dans F.

***Exercice* 24.** On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

(i) L'ensemble des réels x tels que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ii) L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(iii) L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a 0 pour valeur d'adhérence.

***Exercice* 25.** **1.** Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

***Exercice* 26.** On note P l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$\prod_{j=1}^{d} \left[\frac{n_j}{2^{-k}}, \frac{n_j+1}{2^{-k}}\right],$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}$.
1. Montrer que P est un ensemble dénombrable de parties de $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est union d'éléments de P.
3. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(P)$.
4. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par l'ensemble des boules euclidiennes ouvertes (repectivements fermées).
5. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par les demi-espaces de la forme

$$\mathbb{R}^{j-1} \times]a, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-j},$$

avec $j \in [\![1, d]\!]$ et $a \in \mathbb{R}$.

***Exercice* 27.** Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de parties de X. Montrer que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F})$ il existe une famille dénombrable $\mathcal{D}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $A \in \sigma(\mathcal{D})$. *Indication : on pourra montrer que l'ensemble des A dans $\sigma(\mathcal{F})$ vérifiant cette propriété est une tribu sur X.*

***Exercice* 28.** Montrer qu'une tribu contient toujours un nombre fini ou indénombrable d'éléments.

E.4 Mesures

***Exercice* 29.** Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on note $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m ainsi définie est-elle une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?

***Exercice* 30.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Montrer que l'application

$$m = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}$$

définit une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

***Exercice* 31.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $E \in \mathcal{M}$. On note $\mathcal{M}_E$ la tribu induite sur E (voir Exercice 12). Pour $A \in \mathcal{M}_E$ on note

$$\mu_E(A) = \mu(A \cap E).$$

Montrer que cela définit une mesure μ_E sur E.

***Exercice* 32.** Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, Y un ensemble et φ une fonction de X dans Y. On note $\mathcal{N}$ la tribu image de $\mathcal{M}$ par φ (voir l'exercice 21). Pour $B \in \mathcal{N}$ on pose

$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)).$$

1. Montrer que cela définit une mesure ν sur $(Y, \mathcal{N})$. Elle est appelée mesure image de μ par f.
2. Expliciter ν lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ et $\mu = \delta_{x_0}$, où x_0 est un élément de X.

***Exercice* 33.** On considère une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note $\mathcal{O}$ l'union de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ de mesure nulle. Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de mesure nulle. En déduire qu'il existe un plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) de mesure nulle.

***Exercice* 34.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dense dans $\mathbb{R}$ et tel que

$$\lambda(\mathcal{O}) \leqslant \varepsilon.$$

***Exercice* 35.** Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$, finie sur les compacts. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \begin{cases} \mu(]x_0, x]) & \text{si } x > x_0, \\ -\mu(]x, x_0]) & \text{si } x \leqslant x_0. \end{cases}$$

1. Montrer que cela définit une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante et continue à droite en tout point.
2. Montrer que F est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
3. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$ est dénombrable.

***Exercice* 36.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables. On note B l'ensemble des $x \in X$ tel que $x \in A_n$ pour une infinité d'indices n.
1. Montrer que B est mesurable.
2. On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ converge. Montrer que $\mu(B) = 0$.

***Exercice* 37.** **1.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le graphe de f est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue).
2. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f(\mathbb{R})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$ (toujours muni de la mesure de Lebesgue). Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue ?

***Exercice* 38.** Donner un exemple de mesure μ qui est σ-finie sur $\mathbb{R}$ et telle que $\mu\big(]-n, n[\big) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

E.5 Fonctions mesurables

***Exercice* 39.** La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est-elle borélienne sur $\mathbb{R}$?

***Exercice* 40.** Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable.
1. Vérifier que si $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ alors toute fonction de X dans n'importe quel espace mesurable est mesurable.
2. On suppose maintenant que $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(X)$. Donner un exemple de fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qui n'est pas mesurable mais telle que $|f|$ l'est.

***Exercice* 41.** Montrer que la réciproque d'une bijection mesurable n'est pas nécessairement mesurable.

***Exercice* 42.** **1.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer directement (*i.e.* sans utiliser le cours) que les fonctions $f_+ = \max(f,0)$ et $f_- = \max(-f,0)$ sont mesurables.
2. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer que les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$.

***Exercice* 43.** Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante est mesurable.

***Exercice* 44.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite.
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n telle que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -n, \\ f\left(\frac{p}{n}\right) & \text{si } x \in]-n,n] \text{ et } \frac{p-1}{n} < x \leqslant \frac{p}{n}, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f_n ainsi définie est mesurable.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f.
3. En déduire que f est mesurable.
4. Montrer qu'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à gauche est mesurable.

***Exercice* 45.** Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $\omega : X \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in X$ on a $|\omega(x)| = 1$ et $f(x) = |f(x)|\,\omega(x)$.

***Exercice* 46.** Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux ensembles mesurables. Soit $X_1, X_2 \in \mathcal{M}$ tels que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ et $X_1 \cup X_2 = X$. On munit X_1 et X_2 des tribus induites par $\mathcal{M}$. Soient f_1 une fonction mesurable de X_1 dans Y et f_2 une fonction mesurable de X_2 dans Y. Pour $x \in X$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in X_1, \\ f_2(x) & \text{si } x \in X_2. \end{cases}$$

Montrer que f est une fonction mesurable de X dans Y.

E.6 Intégration

***Exercice* 47.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $E \in \mathcal{M}$. On considère sur E la tribu $\mathcal{M}_E$ induite par $\mathcal{M}$ sur E et la mesure μ_E induite par μ (voir les exercices 12 et 31). Soit f une fonction intégrable de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que la restriction $f_{|E}$ de f à E est intégrable et

$$\int_E f_{|E}\, d\mu_E = \int_X \mathbb{1}_E f\, d\mu.$$

***Exercice* 48** (Théorème de changement de variables)**.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, Y un ensemble, et φ une fonction de X dans Y. On munit Y de la tribu image $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ par f et de la mesure image ν de μ par φ.
1. Soit $f : Y \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable.
  a. Montrer que $f \circ \varphi$ est une fonction mesurable de X dans $[0, +\infty]$.
  b. Soit $A \in \mathcal{N}$. Montrer que $\mathbb{1}_A \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}$.
  c. Montrer que

$$\int_Y f\, d\nu = \int_X (f \circ \varphi)\, d\mu.$$

2. Soit $f : Y \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
  a. Montrer que $f \circ \varphi$ est une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$.
  b. Montrer que f est intégrable sur Y si et seulement si $f \circ \varphi$ est intégrable sur X.
  c. Montrer que si f est intégrable sur Y on a

$$\int_Y f\, d\nu = \int_X (f \circ \varphi)\, d\mu.$$

***Exercice* 49.** On munit $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue. Montrer que pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\int_{[0,1]} f\,d\lambda = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

où l'intégrale de droite est l'intégrale au sens de Riemann.

***Exercice* 50.** Soit f une fonction continue de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}_+$ et F une primitive de f.
1. Montrer que F admet une limite $\ell_0 \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ en 0 et une limite $\ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1.
2. Montrer que

$$\int_{]0,1[} f\,d\lambda = \ell_1 - \ell_0.$$

***Exercice* 51.** On munit $[-1,1]$ de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n = \mathbb{1}_{[0,1]}$ si n est pair et $f_n = \mathbb{1}_{[-1,0]}$ si n est impair.
1. Vérifier que f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer

$$\int_{[-1,1]} \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\lambda \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n\,d\lambda.$$

***Exercice* 52.** Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. On note $\mu = \mu_1 + \mu_2$.
1. Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$.
2. Soit f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est intégrable pour la mesure μ si et seulement si elle l'est pour les mesures μ_1 et μ_2, et que dans ce cas on a

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\mu_1 + \int_X f\,d\mu_2.$$

***Exercice* 53.** On munit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de δ_0, la mesure de Dirac en 0. Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} f\,d\delta_0$.

***Exercice* 54.** Soit f une fonction borélienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{[0,1]} e^{nx} f\,d\lambda(x) \leqslant M.$$

1. Montrer que $f = 0$ p.p.
2. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f = 0$.

***Exercice* 55.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable de X dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que pour tout $a > 0$ on a

$$\mu\big(\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant a\}\big) \leqslant \frac{1}{a} \int_X |f|\,d\mu.$$

2. Montrer que

$$a\mu\big(\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant a\}\big) \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0.$$

***Exercice* 56.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu(A) \leqslant \delta \quad \implies \int_A |f|\,d\mu \leqslant \varepsilon.$$

E.7 Intégrales à paramètres

***Exercice* 57.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt.$$

***Exercice* 58.** Étudier la limite
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx.$$

***Exercice* 59.** Étudier la limite
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)^n\,dx.$$

***Exercice* 60.** Pour $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ on pose
$$f(t,x)=\cosh\left(\frac{t}{1+x}\right)-1.$$

1. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$ la fonction $f(t,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On note alors
$$F(t)=\int_{\mathbb{R}_+} f(t,\cdot)\,d\lambda=\int_0^{+\infty} f(t,x)\,dx.$$

2. Montrer que la fonction F et continue et dérivable, et donner une expression de F'.

***Exercice* 61.** Soit $f\in\mathcal{L}^1([0,1])$. On suppose que pour tout $x\in[0,1]$ on a
$$\int_0^x f(t)\,dt=0.$$
Montrer que $f=0$ presque partout.

***Exercice* 62.** On considère les deux fonctions $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par
$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad \text{et} \qquad g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt.$$

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $h(x)=g(x)+f^2(x)$ est constante.
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

***Exercice* 63. 1.** Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$ est convergente. On note alors $\varphi(x)$ sa valeur.
2. Montrer que cela définit une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\varphi'(x)=-\frac{x\varphi(x)}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
4. En déduire (avec l'exercice précédent) que $\varphi(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}$.

***Exercice* 64.** Pour $x\geqslant 0$, on pose
$$\psi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}dt.$$

1. Montrer que ψ est bien définie sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que ψ est continue sur $[0,+\infty[$
3. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
4. Calculer $\psi(0)$ et étudier la limite de ψ en $+\infty$.
5. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\psi'(x)=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\,ds$.
6. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\int_0^{+\infty}\psi'(x)dx=-2\left(\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\,ds\right)^2$.
7. En déduire que $\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

***Exercice* 65.** (Fonction Gamma) Pour $x\in]0,+\infty[$, on pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$. La fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$.
1. Étudier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer que Γ est de classe C^k et calculer $\Gamma^{(k)}$.

E.8 Intégrales multiples

***Exercice* 66.** Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables. Montrer qu'en général l'ensemble des rectangles mesurables de $X_1 \times X_2$ n'est pas une tribu.

***Exercice* 67.** Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables.
1. Montrer que $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est la plus petite tribu sur $X_1 \times X_2$ qui rende mesurables les projections canoniques

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \to & X_1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \to & X_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{array} \right.$$

2. Soient $(Z, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction de $(Z, \mathcal{T})$ dans $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. Montrer que f est mesurable si et seulement si $\pi_1 \circ f : (Z, \mathcal{M}) \to (X, \mathcal{M})$ et $\pi_2 \circ f : (Z, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{N})$ le sont.

***Exercice* 68.** Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques, munis de leurs tribus boréliennes.
1. Montrer que $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) \subset \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$.
2. Montrer que si X_1 et X_2 sont des espaces métriques séparables, alors $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) = \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$.

***Exercice* 69.** Soient μ_1 et μ_2 deux mesures σ-finies non nulles sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) = 0,$$

où on a noté $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.
1. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont tels que $\mu_1(A_1) > 0$ et $\mu_2(A_2) > 0$ alors $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.
3. En ré-écrivant l'égalité $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) = 0$, montrer que pour μ_1-presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mu_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$.
4. En déduire qu'il existe $a_2 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 > 0$ tels que $\mu_2 = \alpha_2 \delta_{a_2}$.
5. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in]0, +\infty]$ tels que $\mu_1 = \alpha_1 \delta_a$ et $\mu_2 = \alpha_2 \delta_a$.

***Exercice* 70.** Pour $(x, y) \in [0, 1]^2$ on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que cela définit une fonction borélienne de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer (en justifiant)

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} f(x, y)\, dy \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{1} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Indication : on pourra dériver par rapport à y l'expression $y/(x^2 + y^2)$.
3. Commenter.

***Exercice* 71** (Intégrales sur des rectangles)**.** Après en avoir justifié l'existence, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y}\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \sin(x + y)\, dx\, dy,$$

$$I_3 = \int_{[3,7] \times [-2,2]} \frac{x}{\sqrt{1 + xy + x^2}}\, dx\, dy.$$

***Exercice* 72.** On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$. Calculer

$$I_1 = \int_D 1\, dx\, dy, \quad I_2 = \int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy, \quad I_3 = \int_D xy(x + y)\, dx\, dy.$$

***Exercice* 73.** Calculer $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x+y$, $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \geqslant x \geqslant 0,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$,
2. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$, $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3 > x > 1,\ y > 2,\ x+y < 5\}$,
3. $f(x,y) = \cos(xy)$, $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2 \geqslant x \geqslant 1,\ 0 \leqslant xy \leqslant 2\}$,
4. $f(x,y) = x$, $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ x+2y-4 \leqslant 0\}$,
5. $f(x,y) = xy$, $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy+x+y \leqslant 1\}$.

***Exercice* 74.** Calculer l'intégrale de la fonction $(x,y) \mapsto e^{x+y}$ sur le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x+y| < 1, |x-y| < 1\right\}.$$

***Exercice* 75.** Calculer les aires des domaines suivants :
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4 - x^3\}$,
$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ -\sin(x) \leqslant y \leqslant \sin(x)\}$,
$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ y \leqslant -x^2+2x+1\}$.

***Exercice* 76.** On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y \in [0,1],\ x^2+y^2 \geqslant 1\}$. Calculer

$$I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

***Exercice* 77.** Calculer

$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz, \quad \text{où} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}.$$

E.9 Changements de variables

***Exercice* 78.** En passant aux coordonnées polaires, calculer l'aire du domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} < x^2+y^2 < 3 \text{ et } y > 0\right\}$$

(et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu).

***Exercice* 79.** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y, 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

***Exercice* 80.** Calculer $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, où on a noté $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

***Exercice* 81.** On considère le domaine D borné délimité par les droites d'équations $x=0$, $y = x+2$ et $y = -x$. Calculer l'intégrale $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$
1. par calcul direct,
2. en effectuant le changement de variable $(u,v) = (x+y, x-y)$.

***Exercice* 82.** Calculer $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2-2x \leqslant 0\}$.

***Exercice* 83.** Calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y,z) = \cos x$, $\quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$,
2. $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$.

***Exercice* 84.** Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x,y) \mapsto (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)$ sur le domaine $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < y, a < xy < b, y^2-x^2 < 1\right\}$, où $b > a > 0$. On pourra effectuer le changement de variables $u = xy$, $v = y^2-x^2$.

***Exercice* 85.** Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que le *centre de gravité* de D est le point $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$ défini par

$$(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy \right).$$

1. Déterminer le centre de gravité du disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le trapèze $D_k \subset \mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,k)$. Déterminer le centre de gravité (x_G, y_G) de D_k.
3. Considérons l'application affine $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$\varphi(x,y) = (x + 3y, x - y) + (2,3).$$

Soit (x'_G, y'_G) le centre de gravité du domaine $\varphi(D)$. Montrer que $(x'_G, y'_G) = \varphi(x_G, y_G)$.
4. Plus généralement, montrer que pour toute application affine (inversible) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, le centre de gravité de $\varphi(D)$ est $\varphi(x_G, y_G)$.
5. Déduire de la question précédente que si D est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées alors son centre de gravité est l'origine.

***Exercice* 86.** Soient a et b des réels positifs. On définit le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leqslant 1\}$.
1. Calculer $\iint_D (2x^3 - y)dxdy$.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité de D.

***Exercice* 87.** Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Calculer le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ d'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} < 1.$$

E.10 Espaces de Lebesgue

***Exercice* 88.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(Y, \mathcal{N})$ un espace mesurable. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans Y et on considère sur $\mathcal{F}$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \mathcal{R} g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x \in X.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$.

***Exercice* 89.** A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, \infty]$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle dans $L^p(]0,1[)$? Dans $L^p([0,1])$? Dans $L^p(]1,\infty[)$? Dans $L^p(]0,\infty[)$?

***Exercice* 90.** Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $\lambda > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application Θ_λ qui à $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ associe

$$\Theta_\lambda u : x \mapsto \alpha u(\lambda x).$$

1. Montrer que Θ_λ définit bien une application de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.
2. Déterminer α pour que Θ_λ soit une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire que $\|\Theta_\lambda u\|_p = \|u\|_p$ pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$).

***Exercice* 91.** On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. Soit $\alpha > 0$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on note

$$\mu(A) = \alpha \int_{[0,1] \cap A} e^{-\alpha x}\, d\lambda(x) + e^{-\alpha} \delta_1(A)$$

et

$$\nu(A) = \int_{[0,+\infty[\cap A} e^{-\alpha x}\, d\lambda(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k(A).$$

1. a. Montrer que μ et ν sont des mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
b. Sont-elles finies ?
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = x$ et $g(x) = e^{\alpha x}$.
a. Montrer que f et g sont mesurables.
b. Sont-elles intégrables par rapports à μ ? par rapport à ν ? Si oui, calculer leurs intégrales.

***Exercice* 92.** Dans le chapitre sur les espaces de Lebesgue, où a-t-on utilisé le fait que $p \geqslant 1$?

***Exercice* 93.** Soit $p \in [1, +\infty[$.
1. Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle.
2. Montrer qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
3. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ est uniformément continue alors elle tend vers 0 en $+\infty$.

***Exercice* 94.** Soit f une fonction mesurable de $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\|f\|_\infty = \sup_{\substack{A \in \mathcal{M} \\ \mu(A)>0}} \inf_{x \in A} |f(x)| .$$

***Exercice* 95.** Soit $p \in [1, +\infty]$. On note

$$\Omega_p = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \mid f \geqslant 0 \text{ p.p.}\} .$$

Montrer que Ω_p est d'intérieur vide dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < +\infty$ et d'intérieur non vide si $p = +\infty$. *Indication : on pourra commencer par montrer qu'une fonction $f \in \Omega_p$ bornée n'est pas dans l'intérieur de Ω_p si $p < +\infty$.*

***Exercice* 96.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Montrer que pour $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $h \in L^r(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fgh \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et

$$\|fgh\|_{L^1(X,\mathcal{M},\mu)} \leqslant \|f\|_{L^p(X,\mathcal{M},\mu)} \|g\|_{L^q(X,\mathcal{M},\mu)} \|h\|_{L^r(X,\mathcal{M},\mu)} .$$

***Exercice* 97.** Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que

$$\forall \phi \in C^0_c(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} f\phi \, d\lambda = 0.$$

Montrer que $f = 0$ p.p. *(la question peut être traitée directement dans le cas général, mais on peut procéder par étapes en considérant successivement les cas où f est elle même continue à support compact, où $f \in L^2$, où $f \in L^1$ et enfin le cas général).*

***Exercice* 98.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^1(X, \mathcal{M}, \mu) \cap L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$. On suppose que cette suite est bornée dans $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ et converge dans $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ vers une fonction f. Montrer que f_n converge vers f dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

***Exercice* 99** (Inégalité de Hardy)**.** Soient $p \in]1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Pour $x > 0$ on note

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt.$$

On cherche à montrer l'inégalité de Hardy

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \|f\|_p .$$

1. Montrer que $F(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.
2. On suppose que f est continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives.
  a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$F(x) = -xF'(x) + f(x).$$

  b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $A > 0$ on a

$$\frac{p-1}{p} \int_0^A F(x)^p \, dx \leqslant \int_0^A F(x)^{p-1} f(x) \, dx.$$

  c. Montrer l'inégalité de Hardy pour f continue à valeurs positives.
3. En déduire l'inégalité de Hardy pour f continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire l'inégalité de Hardy dans le cas général.
5. Montrer que la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale *(on pourra par exemple considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \mapsto x^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[1,n]}(x)$).*
6. Examiner les cas $p = 1$ et $p = \infty$.