Examen Terminal - 14 mai 2018

Durée : 2h

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera un élément important pour la notation.

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. On munit $D =]0, +\infty[\times]a, b[$ de la tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue.
1. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto e^{-xy}$ est intégrable sur D.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx$.

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ deux exposants conjugués. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$. On dit que f_n *converge faiblement* vers f si

$$\forall g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu), \qquad \int_X f_n g \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f g \, d\mu.$$

1. Montrer que si f_n converge vers f dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ au sens usuel, alors f_n converge faiblement vers f.
2. Pour cette question on se place sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ usuelle et de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 mais n'admet pas de limite au sens usuel dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Exercice 3 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est une mesure finie. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que f_n converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$ on note

$$E_n^k = \bigcap_{p\geqslant n} \left\{ x \in X \mid |f_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

1. Montrer que E_n^k est mesurable pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n^k$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(E_{n_k}^k) \geqslant \mu(X) - \varepsilon 2^{-k}$.
4. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur $X \setminus A_\varepsilon$.
5. Montrer que ce résultat n'est plus forcément vrai si on retire l'hypothèse que la mesure μ est finie *(on pourra par exemple considérer sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions définie par $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$)*.

Exercice 4 Pour $x > 0$ on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.
2. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la limite de Γ en 0.

Exercice 5 Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.
2. On note $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que

$$(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$