# Contrôle Continu 2 - 11 avril 2018

Durée : 1h30

*Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera un élément important pour la notation.*

**Exercice 1** En explicitant bien tous les arguments utilisés, calculer

$$\int_D \cos(x^2+y^2)\, d\lambda_2(x,y),$$

où $\lambda_2$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et $D$ est le disque ouvert centré en 0 et de rayon 1.

**Exercice 2** On note

$$\Delta = \left\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x^2+y^2 \geqslant 1\right\}.$$

Calculer

$$\int_\Delta \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\, d\lambda_2(x,y).$$

**Exercice 3** Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue.

**1.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction $y\mapsto f(y)g(x-y)$ est mesurable. Lorsque cette application est intégrable sur $\mathbb{R}$ on pose

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, dy.$$

**2.** Soient $p,q\in[1,+\infty]$ deux exposants conjugués. On suppose que $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g\in\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $(f*g)(x)$ est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$, que la fonction $(f*g)$ ainsi définie est bornée, et que

$$\sup_{\mathbb{R}} |f*g| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

**3.** On suppose maintenant que $f$ et $g$ appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

a. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\, dy\right) dx = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

b. Montrer que $(f*g)(x)$ est bien définie pour presque tout $x\in\mathbb{R}$.

c. Montrer que la fonction $(f*g)$ ainsi définie (presque partout) est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

d. Montrer que les fonctions $f*g$ et $g*f$ (bien définies presque partout) coïncident là où elles sont définies.

**4.** Pour $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ on a $(f*g)\in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. Expliquer ce que cela signifie et le justifier.

**5.** Soient $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\rho$ une fonction de classe $C^\infty$ et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $(f*\rho)(x)$ est bien défini pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction $(f*\rho)$ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $(f*\rho)$ est en fait de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.