

## TD n° 3 : Fonctions d'une variable réelle

### Limites

**Exercice 3.1.** 1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$x \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} x_0, \quad x^2 \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} x_0^2 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1.$$

2. Montrer que l'application  $x \mapsto \cos(x)$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

**Exercice 3.2.** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$  et  $l \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  tend vers  $l$  en  $a$  si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon \quad (3)$$

2. Montrer que ce n'est pas le cas avec les assertions suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geq 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad (4)$$

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad (5)$$

**Exercice 3.3.** Soit  $\alpha > 0$ . Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui tend vers  $\alpha$  en 0. Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \delta[$ .

**Exercice 3.4.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x^2 + x} \quad 5. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x - 8} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$$

**Exercice 3.5.** On note  $E$  la fonction qui à un réel  $x$  associe sa partie entière ( $E(x)$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ ).

1. Étudier les limites éventuelles de  $E$  en 0,  $+\infty$  et  $-\infty$ .

2. Étudier la limite éventuelle en 0 de la fonction  $x \mapsto xE(\frac{1}{x})$ .

**Exercice 3.6.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  et deux fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  tendent vers 0 en 0 et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + x^2\varepsilon_2(x).$$

1. Montrer qu'il existe  $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  et une fonction  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui tend vers 0 en 0 tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

2. Même question en remplaçant  $f + g$  par  $fg$ .

**Exercice 3.7.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui tend vers 0 en 0 tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

1. On suppose que  $a_0 \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $\nu > 0$  tel que pour tout  $x \in [-\nu, \nu]$ ,  $f(x)$  a même signe que  $a_0$ .
2. On suppose que  $a_0 = 0$  et  $a_1 \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $\nu > 0$  tel que pour tout  $x \in [-\nu, \nu]$ ,  $f(x)$  a même signe que  $a_1x$ .
3. On suppose que  $a_0 = a_1 = 0$  et  $a_2 \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $\nu > 0$  tel que pour tout  $x \in [-\nu, \nu]$ ,  $f(x)$  a même signe que  $a_2x^2$ .
4. Que peut-on dire du signe de  $f$  au voisinage de 1 ?

**Exercice 3.8.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction 1-périodique (i.e.  $f(x+1) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ). On suppose que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante.

### Propriétés des fonctions continues

**Exercice 3.9.** Soit  $f$  une fonction de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $[\varepsilon, +\infty[$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
2. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que  $f$  n'est pas nécessairement continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Exercice 3.10.** Soient  $f_+$  et  $f_-$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{R}_-^*$  dans  $\mathbb{R}$ , respectivement. Pour  $x \in \mathbb{R}$  on pose

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) & \text{si } x \geq 0, \\ f_-(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction  $f$  ainsi définie est-elle bien continue ?

**Exercice 3.11.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction  $|f|$  (qui à  $x$  associe  $|f(x)|$ ) l'est également.
2. Montrer que la réciproque est fautive.

**Exercice 3.12.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Montrer qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ .

**Exercice 3.13.** Un marcheur parcourt six kilomètres en une heure (il ne marche pas forcément à vitesse constante). Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il marche exactement trois kilomètres.

**Exercice 3.14.** Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  et vers  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est minorée et atteint son minimum.

### Dérivabilité

**Exercice 3.15.** Pour  $x \in \mathbb{R}$  on pose

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?
3. La fonction  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 3.16.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leq 1, \\ ax + b & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer  $a, b$  pour que  $f$  soit dérivable en 1, puis faire l'étude de  $f$  et tracer son graphe.

**Exercice 3.17.** On considère la fonction définie par  $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$ .

1. Donner son domaine de définition  $D_f$ . La fonction est-elle continue? Dérivable?
2. Calculer  $f'$  et donner le tableau de variation de  $f$ .
3. Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{2}$  a trois solutions dans  $\mathbb{R}$ .
4. Tracer le graphe de  $f$ .

**Exercice 3.18.** Soit  $f$  une fonction continue de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $]0, +\infty[$ . On suppose que  $f'$  tend vers une limite  $l \in \mathbb{R}$  en 0. Montrer que  $f$  est dérivable en 0 de dérivée  $f'(0) = l$ .

**Exercice 3.19.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On suppose qu'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $f$  tend vers  $l$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Montrer qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(x_0) = 0$ .

### Fonctions usuelles

**Exercice 3.20.** Dans cet exercice on ne suppose pas connue la fonction exponentielle. On suppose que  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

- (i)  $f(0) = 1$ ,
- (ii)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f' = f$ .

1. En considérant la fonction  $t \mapsto f(t)f(-t)$ , montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $f(t) \neq 0$  et

$$f(-t) = \frac{1}{f(t)}.$$

2. Montrer que  $f(t) > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
3. Montrer que si  $g$  est une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g' = g$  et  $g(0) = 1$ , alors  $g = f$ .
4. Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $C \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe une unique fonction  $h$  dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $h(0) = C$  et  $h' = \alpha h$ , donnée par  $h : t \mapsto C f(\alpha t)$ .
5. Soit  $s \in \mathbb{R}$ . En considérant la fonction  $t \mapsto \frac{f(t+s)}{f(s)}$ , montrer que  $f(t+s) = f(t)f(s)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
6. Montrer que  $f$  est croissante, puis que pour tout  $t \geq 0$  on a  $f(t) \geq t$ . En déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
7. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la fonction  $\varphi_n : x \mapsto \frac{f(x)}{x^{n+1}}$ . Montrer que  $\varphi_n$  est croissante sur  $[n, \infty[$ . En déduire la limite de  $\frac{f(x)}{x^n}$  en  $+\infty$ .
8. Montrer que  $f$  définit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$ . Montrer que la bijection réciproque est dérivable et calculer sa dérivée en tout point.

**Exercice 3.21.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} e^{-x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2} \ln(x)^3$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x))^{-4} e^x$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)^4 x e^{-2x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x)$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(e^x + e^{-x})$
9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
10.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} - e^2}{x-1}$

**Exercice 3.22.** On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^{\cos x + \sin^2 x}$ .

1. Étudier la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I = [0, 2\pi]$ .
2. Combien l'équation  $f(x) = \sqrt{e}$  a-t-elle de solution dans  $I$ ?

**Exercice 3.23.** On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ .

1. Montrer que  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .
2. Calculer  $f'(x)$  et simplifier l'expression.
3. Montrer que  $f$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.
4. On note  $g$  la fonction réciproque de  $f$ .
  - a. Préciser les variations de  $g$ .
  - b. Calculer  $g'(f(x))$  pour tout  $x \in I$ .
  - c. Expliciter  $g$  et retrouver les résultats précédents.

**Exercice 3.24. 1.** Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$  on a

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Calculer  $\arccos(\sin(3\pi/2))$ ,  $\arcsin(\sin(11\pi/7))$ ,  $\arctan(\tan(-17\pi/5))$ .

3. On considère sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ .

- Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable au moins sur  $\mathbb{R}^*$ .
- Calculer sa dérivée et la simplifier au maximum.
- $f$  est-elle dérivable en 0 ?
- Donner une expression plus simple de  $f$  par une fonction usuelle.

**Exercice 3.25. 1.** Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , calculer :  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ .

2. Donner deux expressions de la dérivée de  $x \mapsto \tan(x)$ . En déduire  $\cos^2(\arctan x)$ .

3. On considère la fonction définie par  $g(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  sur  $I = ]0, +\infty[$ .

- Montrer que  $g$  est continue sur  $I$ .
  - Calculer la limite de  $g$  à droite en 0. Montrer qu'on peut prolonger  $g$  par continuité en 0.
- On note toujours  $g$  la fonction ainsi prolongée.
- Montrer que  $g$  est dérivable sur  $I$  et calculer  $g'$ .
  - $g$  est-elle dérivable en 0 ? On pourra utiliser la question 1.
  - Montrer que  $g$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.
  - La fonction réciproque  $g^{-1}$  est-elle croissante ? décroissante ?

**Exercice 3.26.** Pour  $x > 1$  on note  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{x-1}\right)$ .

1. Donner l'ensemble de définition ainsi que l'ensemble image de la fonction arcsin.

2. Montrer qu'il existe  $x_0 > 1$  tel que  $\frac{\pi x_0}{x_0-1} = \frac{3\pi}{2}$ .

3. Montrer que  $f$  définit une bijection de  $[x_0, +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera. On notera  $g$  la réciproque cette bijection.

4. Donner une expression de  $g$ .

### Dérivées d'ordres supérieurs - Développement limités

**Exercice 3.27.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $|e^x - 1 - x| \leq \frac{|x|^2}{2} e^x$ .

**Exercice 3.28.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- Montrer que si  $f$  admet un minimum local en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) \geq 0$ .  
b. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.
- On suppose que  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) > 0$ . Montrer que  $f$  admet un minimum local strict en  $x_0$ .

**Exercice 3.29.** Donner les développements limités des fonctions suivantes en 0, à l'ordre indiqué entre parenthèses :

- |  |   |
|--|---|
| (i) $x \mapsto \sqrt{1+x} \times \ln(1+x)$ (à l'ordre 3) | (iv) $\tan$ (à l'ordre 5)                                   |
| (ii) $x \mapsto \sin(x)/(1+x)$ (à l'ordre 4)             | (v) $\arctan$ (à l'ordre 5)                                 |
| (iii) $x \mapsto e^{\cos(x)}$ (à l'ordre 4)              | (vi) $x \mapsto \frac{\tan(x)}{1+\arctan(x)}$ (à l'ordre 3) |

**Exercice 3.30. 1.** Calculer le développement limité au point 1 et à l'ordre 3 de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ .

2. Calculer le développement limité au point  $\frac{\pi}{3}$  et à l'ordre 3 de la fonction  $x \mapsto \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ .

**Exercice 3.31.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x \cos(x) - \sin(x)}$                  | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + 2x} - x$     |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \tan(x) - \cos(x)}{\sin(x^2) \ln(1+x)}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2}$ |

**Exercice 3.32.** On considère sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $f : x \mapsto \cos(x) - 1 + (e^x - 1)^3$ . En utilisant un développement limité, montrer que  $f$  admet un maximum local en 0.