Annexe A

Limites de suites

Cette annexe vient s'intercaler avant le chapitre 3 sur les fonctions d'une variable réelle. Les suites ne sont pas à proprement parler au programme de ce module, mais la notion de limite, qui va être au cœur du chapitre 3, paraît plus facile d'accès dans ce contexte.

On va donc définir les suites et limites de suites, et en donner quelques propriétés. Cela permettra d'attaquer plus sereinement les notions et résultats analogues sur les fonctions.

A.1 Suites, suites réelles

Définition A.1. Soit E un ensemble. Une **suite d'éléments de** E est une application $\mathbb{N}$ dans E. On peut noter $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de E.

En général, pour une suite, on met l'argument en indice plutôt qu'entre parenthèses. Ainsi, si u est une suite d'éléments de E, on notera u_n plutôt que $u(n)$, et la suite elle-même est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par ailleurs, on pourra dire que u_n est le n-ième terme de la suite.

Une suite peut être indéxée par $\mathbb{N}^*$ (où même par $\{n_0, n_0+1, \dots\}$ où n_0 est un entier naturel quelconque) plutôt que $\mathbb{N}$.

On appelle **suite réelle** une suite d'éléments de $\mathbb{R}$, et **suite complexe** une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. Ces suites sont l'objet de ce chapitre.

***Exercice* 1.36** Donner les premiers termes des suites définies de la façon suivante :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\cos(n\pi/6)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n$.

Définition A.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(i) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) On dit que la suiet $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée. C'est le cas si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A.2 Définition de la limite d'une suite réelle

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Intuitivement, on dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si u_n est très proche de ℓ quand n devient très grand. Le problème est que les notions d'être « très proches » ou « très grand » n'ont pas de sens précis et ne sont donc pas exploitables pour faire des raisonnements rigoureux. Qu'est-ce qu'être très proches pour deux réels ? Être à distance inférieure à $1/10$, à $1/1000$, à $1/10^{42}$? Et à partir de quand considère-t-on qu'un entier est grand ? Quand il est plus grand que 2, que 15, que 10 000, que $6,02.10^{23}$?

Pour considérer que u_n tend vers ℓ, il faut donc que pour n'importe quelle façon de mesurer le fait que u_n est proche de ℓ (autrement dit, on peut prendre la condition $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour n'importe quel $\varepsilon > 0$), il faut que ce soit valable pour n assez grand (c'est-à-dire $n \geqslant N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$). Avec les quantificateurs, cela donne la définition suivante :

Définition A.3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que u_n tend (ou converge) vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon. \tag{A.1}$$

Remarque A.4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si $(u_n - \ell)$ tend vers 0.

L'ordre des quantificateurs est crucial. Il est extrêmement important de noter que N peut dépendre de ε. Sauf cas très particuliers (lesquels ?), on ne peut pas trouver un N qui convient à tous les ε. Mais avoir pour chaque $\varepsilon > 0$ un N qui convient est bien moins contraignant. Pour bien s'en souvenir on peut choisir, au moins dans un premier temps, de marquer explicitement la dépendance en ε de N :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple A.5. En guise d'exemple, montrons que

$$\frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il faut montrer qu'une certaine propriété est vraie pour n'importe quel $\varepsilon > 0$. On en fixe un, mais ce qui suit doit être valable pour n'importe quel choix. Ce choix étant fait, il faut trouver un rang N_ε (qui peut dépendre du choix de ε) à partir duquel on aura toujours

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leqslant \varepsilon. \tag{A.2}$$

Le plus simple est de donner directement N_ε et de prouver (A.2) pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$. Le problème est qu'il n'est pas forcément évident de deviner quel N_ε va convenir. Au brouillon on va donc fixer un N, faire le calcul et voir ce que ça donne. Étant donnés $N \in \mathbb{N}$ on a pour tout $n \geqslant N$

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leqslant \frac{1}{N+1}.$$

Pour obtenir (A.2), il suffit donc d'avoir choisi N tel que

$$\frac{1}{N+1} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Pour N_ε on peut donc choisir n'importe quel entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ (par exemple, on peut le prendre plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$). Une fois qu'on a compris cela, on peut rédiger notre démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_\varepsilon \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leqslant \frac{1}{N_\varepsilon + 1} \leqslant \frac{1}{N_\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

***Exercice* 1.37** Montrer que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \cos(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

***Exercice* 1.38** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ est convergente et préciser sa limite.

A.3 Premières propriétés des suites convergentes

Une grande partie de ce chapitre sera dédiée à des résultats permettant de *montrer* qu'une suite est convergente et, si possible, de calculer sa limite. Mais les deux propositions de ce paragraphe, qui seront utiles par la suite mais qui ont leur intérêt propre, sont des exemples de propriétés que l'on peut *déduire* du fait qu'une suite est convergente.

Proposition A.6. *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant 1. \tag{A.3}$$

Pour tout $n \geqslant N$ on a par l'inégalité triangulaire

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$

On note

$$M = \max\big(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|\big).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leqslant M$. Cela prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. □

Remarque A.7. La réciproque de la proposition A.6 n'est pas vraie, une suite peut être bornée sans admettre de limite. Considérer par exemple la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque A.8. La démonstration de la proposition A.6 est instructive. Il y a deux arguments pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Tout d'abord, pour n grand, $|u_n|$ ne peut pas être arbitrairement grand puisque u_n est proche par hypothèse d'une certaine limite ℓ. Mais cela ne vaut que pour n grand, $|u_n|$ n'a aucune raison d'être proche de $|\ell|$ pour les autres n. Mais les autres n ne sont qu'en nombre fini, et un ensemble fini de réels est nécessairement borné. Il est important de noter qu'il faut d'abord fixer ce que l'on entend par « n grand », et seulement ensuite il est possible de parler des « autres n ».

Bien sûr, tout cela se fait en termes plus précis. Ici on n'a pas tellement besoin du fait que u_n est « proche » de ℓ pour s'assurer que $|u_n|$ ne prend pas des valeurs arbitrairement grandes, mais seulement du fait que u_n « ne s'éloigne pas trop » de ℓ. Ainsi, pour écrire (A.3), on a simplement appliqué la définition de la limite dans le cas particulier où $\varepsilon = 1$. Ce n'est pas si fréquent, mais il peut arriver qu'on utilise un choix particulier de ε dans un raisonnement abstrait. On note qu'ici le choix est complètement arbitraire. Au lieu de 1 on aurait pu prendre 47 ou 12000, la démonstration aurait été tout autant valable.

La définition appliquée avec $\varepsilon = 1$ fixe donc un certain N, au delà duquel n est « assez grand ». Les autres termes sont alors $u_0, \dots, u_{N-1}$, qui sont effectivement en nombre fini.

Proposition A.9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement positive alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant N$.

(ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement négative alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 0$ pour tout $n \geqslant N$.

(iii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant N$.

Démonstration. On ne montre que la première propriété. La deuxième est analogue et la troisième est conséquence directe des deux premières (s'en convaincre en guise d'exercice). Puisque u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell}{2}.$$

Pour $n \geqslant N$ on a alors

$$u_n \geqslant \ell + (u_n - \ell) \geqslant \ell - \frac{\ell}{2} > 0. \qquad \square$$

Remarque A.10. Si on suppose seulement que $\ell \geqslant 0$ ou $\ell \leqslant 0$, alors on ne peut rien conclure. Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

tend vers 0 alors que ses termes d'indices pairs sont strictement positifs et ses termes d'indices impairs sont strictement négatifs.

Remarque A.11. À nouveau, on a utilisé dans cette démonstration la définition de la limite avec un choix particulier de ε, qui n'est pas forcément « petit ». C'est d'ailleurs pour cette étape qu'on utilise le fait que ℓ est strictement positif.

Remarque A.12. Il est important de noter que dans ces deux propositions on obtient des propriétés pour une suite convergente sans connaître sa limite. Pour la proposition A.6 on suppose simplement que la suite est convergente, et pour la proposition A.9 on a tout de même une information sur le signe de la limite.

A.4 Opérations sur les limites

Vérifier directement la définition comme on a fait à l'exemple A.5 peut très vite s'avérer fastidieux pour montrer la convergence de suites un peu plus compliquées. On va maintenant montrer un certain nombre de propriétés abstraites permettant de déduire des limites de suites connaissant des limites d'autres suites plus simples.

On commence par étudier la limite de la somme de deux suites convergentes. Il est intuitivement clair que si u_n s'approche de ℓ_1 et v_n s'approche de ℓ_2 pour n grand, alors $(u_n + v_n)$ s'approche de $(\ell_1 + \ell_2)$. Reste à le formaliser rigoureusement...

Proposition A.13. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2.$$

Alors

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 + \ell_2.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u_n tend vers ℓ_1 il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \quad |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.4}$$

De même, puisque v_n tend vers ℓ_2 il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \quad |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.5}$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geqslant N$ on a par l'inégalité triangulaire

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(u_n - \ell_1) + (v_n - \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{A.6}$$

Cela prouve que $(u_n + v_n)$ tend bien vers $(\ell_1 + \ell_2)$ quand n tend vers $+\infty$. $\square$

Remarque A.14. En (A.4) et (A.5) on a utilisé la définition de la convergence en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$. C'est tout à fait possible. En effet, la définition de la limite peut être lue comme « pour tout réel strictement positif, il existe un rang à partir duquel ... ». Étant donné $\varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{2}$ est bien un réel strictement positif, donc il existe bien un rang $N = N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ à partir duquel on a (A.4) ou (A.5). Cela permet de bien arriver à ε dans (A.6). Il est aussi possible de partir avec des ε en (A.4) et (A.5) et de finir avec 2ε dans (A.6), mais ce n'est pas plus simple et nous ne ferons jamais ce choix dans ce cours.

Dans la proposition suivante, on formalise la propriété intuitivement claire que le produit d'un réel qui devient petit et d'un réel qui ne devient pas trop grand est petit.

Proposition A.15. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors $u_n v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $|v_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$

Pour tout $n \geqslant N$ on a alors

$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon.$$

Cela prouve que $u_n v_n$ tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$. $\square$

Dans les deux propositions suivantes, on va montrer le bon comportement des limites vis-à-vis des produits et des quotients. Pour les démonstrations, on ne va (presque) pas utiliser la définition mais plutôt les propriétés élémentaires vues précédemment. On note tout de même qu'on pourrait en fait faire directement les preuves avec la définition…

Proposition A.16. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles et* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. *On suppose que*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2.$$

Alors

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \ell_2.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n v_n - \ell_1 \ell_2 = (u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2).$$

Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée d'après la proposition A.6. D'autre part la suite $(\ell_1)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc bornée. Puisque $(u_n - \ell_1)$ et $(v_n - \ell_2)$ tendent vers 0 (voir la remarque A.4), on obtient par la proposition A.15 que

$$(u_n - \ell_1) v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\ell_1 (v_n - \ell_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

D'après la proposition A.13 on obtient

$$(u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et donc

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \ell_2.$$

□

Dans le cas particulier où l'une des deux suites est constante (et donc convergente), on obtient le résultat suivant :

Corollaire A.17. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergeant vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors on a*

$$\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \ell.$$

***Exercice* 1.39** Donner une preuve directe (sans utiliser la proposition A.16) du corollaire A.17.

Proposition A.18. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui ne s'annule pas et converge vers* $\ell \in \mathbb{R}^*$. *Alors*

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2}.$$

Pour tout $n \geqslant N$ on a alors par la deuxième inégalité triangulaire [1]

$$|u_n| \geqslant |\ell| - |u_n - \ell| \geqslant \frac{|\ell|}{2},$$

et donc

$$\frac{1}{|u_n|} \leqslant \frac{2}{|\ell|}.$$

Cela prouve que la suite $1/u_n$ est bornée (par $\max(1/|u_0|, \dots, 1/|u_{N-1}|, 2/|\ell|)$). Pour $n \in \mathbb{N}$ on écrit maintenant

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - u_n}{u_n \ell}$$

Comme $(u_n - \ell)$ tend vers 0 et $1/(u_n \ell)$ est borné, on obtient par la proposition A.15 que

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

En combinant la proposition A.16 avec la proposition A.18 on obtient la proposition suivante :

Proposition A.19. *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers les réels ℓ_1 et ℓ_2. On suppose que $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\ell_2 \neq 0$. Alors*

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

A.5 Limites infinies

On introduit maintenant les limites infinies. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n devient grand quand n devient grand. Une définition exploitable est la suivante :

Définition A.20. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

si

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant \eta.$$

- On dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$$

si

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant -\eta.$$

⚠ Une suite qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ *n'est pas* considérée comme convergente !

Remarque A.21. u_n tend vers $-\infty$ si et seulement si $-u_n$ tend vers $+\infty$.

Proposition A.22. *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

1. Ce qu'on fait jusqu'ici est essentiellement identique à la démonstration de la proposition A.9.

(i) *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée (en particulier, si elle est convergente) et* v_n *tend vers* $+\infty$*, alors* (u_n+v_n) *tend vers* $+\infty$*.*

(ii) *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée (en particulier, si elle est convergente) et* v_n *tend vers* $-\infty$*, alors* (u_n+v_n) *tend vers* $-\infty$*.*

Démonstration. On montre la première propriété. Soit $\eta \in \mathbb{R}$. Soit $M \geqslant 0$ tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme v_n tend vers $+\infty$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$v_n \geqslant \eta + M.$$

Pour $n \geqslant N$ on a alors

$$u_n + v_n \geqslant -M + (\eta + M) = \eta.$$

Cela prouve que $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$. □

Remarque A.23. Si u_n tend vers $+\infty$ et si v_n tend vers $-\infty$, alors on ne peut rien dire en général pour $(u_n + v_n)$ (qui peut être convergente, tendre vers $+\infty$, tendre vers $-\infty$, ou n'avoir aucune limite).

Proposition A.24. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles.*

(i) *Si* u_n *tend vers une limite strictement positive ou vers* $+\infty$ *et si* v_n *tend vers* $+\infty$*, alors* (u_nv_n) *tend vers* $+\infty$*.*

(ii) *Si* u_n *tend vers une limite strictement négative ou vers* $-\infty$ *et si* v_n *tend vers* $+\infty$*, alors* (u_nv_n) *tend vers* $-\infty$*.*

(iii) *Si* u_n *tend vers une limite strictement positive ou vers* $+\infty$ *et si* v_n *tend vers* $-\infty$*, alors* (u_nv_n) *tend vers* $-\infty$*.*

(iv) *Si* u_n *tend vers une limite strictement négative ou vers* $-\infty$ *et si* v_n *tend vers* $-\infty$*, alors* (u_nv_n) *tend vers* $+\infty$*.*

Démonstration. On montre la première propriété dans le cas où u_n tend vers une limite finie. On note $\ell > 0$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme on l'a vu pour la preuve de la proposition A.9, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on a

$$u_n \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

Soit maintenant $\eta > 0$. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in N_2$ on a

$$v_n \geqslant \frac{2\eta}{\ell}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geqslant N$ on a alors

$$u_nv_n \geqslant \frac{\ell}{2} \times \frac{2\eta}{\ell} = \eta.$$

Cela prouve que u_nv_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. □

Remarque A.25. Si u_n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et si v_n tend vers 0, alors on ne peut rien dire en général pour (u_nv_n).

A.6 Limite et relation d'ordre

On a fait à la proposition A.9 un lien entre le signe des termes d'une suite convergente et le signe de sa limite. Plus précisément, on a déduit du signe de la limite le signe des termes de la suite (du moins ceux d'indice assez grand). Inversement, connaissant le signe des termes d'une suite convergente on peut en déduire le signe de la limite.

Proposition A.26. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et ℓ sa limite.*

(i) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant N$, alors $\ell \geqslant 0$.

(ii) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant N$, alors $\ell \leqslant 0$.

⚠ Il est important de noter que même si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors on ne peut pas conclure que $\ell > 0$. Considérer par exemple la suite définie par $u_n = 2^{-n}$.

✎ ***Exercice* 1.40** Les deux propriétés de la proposition A.26 ne sont pas exactement les contraposées des deux premières propriétés de la proposition A.9. Écrire les contraposées de ces quatre assertions et comparer.

Plutôt que de comparer une suite à 0, on peut comparer deux suites entre elles. On obtient que si une suite convergente est toujours inférieure à une autre, alors sa limite est inférieure à celle de l'autre suite.

Proposition A.27 (Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers les réels ℓ_1 et ℓ_2, respectivement. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$u_n \leqslant v_n.$$

Alors

$$\ell_1 \leqslant \ell_2.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $w_n = v_n - u_n$. On a alors $w_n \geqslant 0$. D'après le corollaire A.17 et la proposition A.13 on a

$$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 - \ell_1.$$

Par ailleurs, d'après la proposition A.26 la limite de w_n quand n tend vers $+\infty$ est positive ou nulle. Cela prouve que

$$\ell_1 \leqslant \ell_2.$$

□

La proposition suivante exploite à nouveau la comparaison entre des suites, en disant que si une suite est coincée entre deux suites qui convergent vers la même limite, alors elle tend elle-même vers cette limite quand n tend vers $+\infty$. Il faut noter que la convergence de la suite est déjà un résultat important dans cette conclusion.

Proposition A.28 (Théorème des gendarmes)**.** *(i) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

On suppose que u_n et w_n tendent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$. Alors u_n tend également vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

(ii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leqslant v_n.$$

- *Si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *alors* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- *Si* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ *alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Démonstration. On montre la première partie de la proposition. La deuxième est laissée en exercice. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$ on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$ on a

$$|w_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant N$ on a alors

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon,$$

et donc

$$|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

□

A.7 Suites monotones

Définition A.29. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est

- croissante si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- strictement croissante si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- décroissante si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- strictement décroissante si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition A.30. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite rélle croissante. Alors*

(i) soit elle est bornée, auquel cas elle est convergente,

(ii) soit elle n'est pas bornée et tend alors vers $+\infty$.

On a un résultat analogue pour une suite réelle décroissante.

Démonstration. • On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On note alors

$$s = \sup \{u_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant s$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant s - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a alors $u_n \geqslant s - \varepsilon$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$s - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant s,$$

ce qui prouve que u_n tend vers s quand n tend vers $+\infty$.

• On suppose maintenant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Comme elle est minorée (par u_0), elle n'est pas majorée. Soit $\eta \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant \eta$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a alors pour tout $n \geqslant N$

$$u_n \geqslant u_N \geqslant \eta.$$

Cela prouve que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. □

Proposition A.31 (Suites adjacentes)**.** *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que*

$$b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$, donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Comme elle est croissante, elle admet une limite, qu'on note ℓ_1. De même la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par a_0), donc elle tend vers une limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Montrons maintenant que $\ell_1 = \ell_2$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_1$ on a $|a_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_2$ on a $|b_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Enfin il existe N_3 tel que pour $n \geqslant N_3$ on a $|b_n - a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. On note $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Pour $n \geqslant N$ on a alors

$$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que $\ell_1 - \ell_2 = 0$, et donc que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite. □

A.8 Suites extraites

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En extraire une sous suite consiste à définir une nouvelle suite en ne gardant que certains termes de la suite d'origine.

Définition A.32. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la forme

$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}},$$

où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (on dit que φ est une extraction).

Exemples A.33.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (-1)^n$ et $v_n = u_{2n}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 (dans ce cas φ est l'application $n \mapsto 2n$, on ne garde que les termes d'indices pairs).

Remarque A.34. Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on peut vérifier par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geqslant n$.

Proposition A.35. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ.*

Remarque A.36. On a des résultats analogues pour des suites qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

La proposition dit simplement que si tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'approchent de ℓ pour n grand, c'est en particulier le cas pour les termes que l'on a extraits.

Démonstration. On suppose que u_n tend vers ℓ et on considère une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ et donc

$$\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que $u_{\varphi(n)}$ tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. □

Par contraposée de la proposition A.35 on obtient le résultat suivante, souvent utile pour montrer qu'une suite *n'est pas* convergente :

Corollaire A.37. *Si une suite admet une sous-suite qui ne converge pas, ou bien si elle admet deux sous-suites extraites qui convergent vers des limites différentes, alors elle n'est pas convergente.*

Théorème A.38 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Soit $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On construit par récurrence une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante telles que pout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

et il y a une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}$ tels que $u_k \in [a_n, b_n]$. La propriété est vraie pour $n = 0$. On suppose avoir construit $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ et on construit a_{n+1} et b_{n+1}. On note $c = (a_k + b_k)/2$. Par hypothèse de récurrence il y a une infinité d'indice k tels que $u_k \in [a_n, b_n]$. S'il y a une infinité d'indices k tels que $u_k \in [a_n, c]$ on note $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c$. Sinon il y a nécessairement une infinité d'indices k tels que $u_k \in [c, b_n]$ et on note $a_{n+1} = c$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans les deux cas on a bien

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$$

et

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

On construit ainsi par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux suites sont adjacentes (elles vérifies les hypothèses de la proposition A.31), elles convergent donc vers une limite commune qu'on note ℓ.

On construit maintenant par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème des gendarmes (proposition A.28), on a donc

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Ainsi on a bien construit une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. □

A.9 Suites de Cauchy

On a vu dès la partie A.2 que si l'on veut montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, il faut d'abord deviner sa limite ℓ pour ensuite pouvoir estimer la différence $u_n - \ell$. Autrement dit, il faut déjà plus ou moins connaître la limite pour prouver qu'une suite est convergente. C'est problèmatique, car en général on ne connait pas la limite (c'est l'objet de l'étude. . .).

C'est d'autant plus regrettable quand dans certaines situations on a simplement besoin de savoir qu'une suite et convergente sans avoir à se préoccuper de la valeur explicite de la limite (voir par exemple les résultats du paragraphe A.3). Il arrive aussi qu'on s'intéresse à la valeur de la limite, mais qu'elle ne puisse pas être obtenue. Dans ce cas il peut déjà être intéressant de savoir si la suite est convergente ou non. Et une fois qu'on a assuré l'existence d'une limite, on peut commencer à en chercher des propriétés. Ce dernier cas de figure est en fait extrêmement fréquent dans les problèmes d'analyse.

Il serait donc utile de pouvoir montrer qu'une suite est convergente sans avoir à connaître à l'avance sa limite.

Définition A.39. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, p \geqslant N, \quad |u_m - u_p| \leqslant \varepsilon.$$

La condition pour être une suite de Cauchy ressemble un peu à la condition pour une suite convergeant vers une certaine limite, mais elle ne porte que sur les termes de la suite eux-même et ne fait intervenir aucun paramètre ℓ à deviner. Ici on demande non pas que pour n grand les termes de la suite se rapprochent d'une certaine limite, mais qu'ils deviennent proche les uns des autres. On commence par observer que si les termes d'une suite s'approchent tous d'un certain ℓ, alors ils sont en particulier proches les uns des autres :

Proposition A.40. *Une suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $m, p \geqslant N$ on a alors par l'inégalité triangulaire

$$|u_m - u_p| = |(u_m - \ell) - (u_p - \ell)| \leqslant |u_m - \ell| + |u_p - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Cette observation mérite d'être faite, elle sera d'ailleurs vraie au-delà du cadre des suites réelles ou complexes, mais ce n'est pas ce dont on a besoin. En effet cette proposition prend en hypothèse une propriété difficile à vérifier (la suite est convergente) et donne comme conclusion une propriété plus facile (la suite est de Cauchy). Ce dont on a besoin est en fait la réciproque de la proposition A.40.

On commence par montrer qu'une suite de Cauchy est bornée. Cela ressemble à la propriété analogue vue pour les suites convergentes (proposition A.6) et la démonstration (laissée en exercice) utilise d'ailleurs le même argument.

Proposition A.41. *Une suite réelle de Cauchy est bornée.*

La deuxième propriété importante des suites de Cauchy est que l'existence d'une sous-suite convergente assure la convergence de la suite dans sa globalité (en gros, si les termes de la suite sont proches les uns des autres à l'infini et que certains d'entre eux sont proches d'une certaine limite ℓ, alors tous les termes sont proches de cette limite).

Proposition A.42. *Une suite réelle de Cauchy admettant une sous-suite convergente est elle-même convergente.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy. Soient $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_{\varphi(n)}$ tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. On montre que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$ on a

$$\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geqslant N_2$ on a

$$|u_n - u_p| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$. On a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$|u_n - \ell| \leqslant \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cela prouve que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. $\square$

On a maintenant tous les ingrédients pour montrer qu'une suite réelle de Cauchy est convergente. Une suite de Cauchy est bornée, par le théorème de Bolzano Weierstrass elle admet une sous-suite convergente, et est donc elle-même convergente.

Théorème A.43. *Une suite réelle de Cauchy est convergente.*

On observe qu'en combinant la proposition A.40 et le théorème A.43, on obtient qu'une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

A.10 Comparaison de suites

Le but des notions que l'on va introduire dans ce paragraphe est de rafiner la notion de convergence, en ne s'intéressant pas seulement à la limite d'une suite mais aussi à la vitesse de convergence vers cette limite. Par exemple, si on se donne une suite qui tend vers $+\infty$, on voudrait discuter le fait qu'elle tend « vite » ou « lentement » vers $+\infty$.

De même qu'on n'a pas de notion de réel grand et de réel petit, on ne pourra pas dire qu'une suite converge rapidement ou lentement. Si on considère la suite u_n définie par $u_n = n^3$ pour tout n, cela n'a pas de sens de dire que u_n tend vite ou lentement vers $+\infty$.

Par contre, de même qu'on peut comparer les réels entre eux, on peut comparer les vitesses de convergence de deux suites. Ainsi, si pour $n \in \mathbb{N}$ on note $v_n = n^2$ et $w_n = n^5$, alors u_n, v_n et w_n tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, mais on peut être plus précis et ajouter que u_n tend vers $+\infty$ plus vite que v_n et moins vite que w_n.

On peut, de la même façon, comparer les vitesses de convergence de suites qui tendent vers 0. Ainsi, n^{-2} tend plus vite que n^{-1} et moins vite que n^{-3} vers 0.

Pour comparer la vitesse de convergence de deux suites, on regarde simplement le comportement de leur rapport pour n grand :

Définition A.44. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas. On dit u_n est négligeable devant v_n et on note

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \tag{A.7}$$

(ce qui se lit « u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$ ») si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{A.8}$$

On remarque que cette définition ne fait pas intervenir les limites (finies ou infinies) des suites u_n et v_n. D'ailleurs on ne suppose même pas qu'elles en admettent une.

Exemple A.45. (i) Soient α et β deux réelles tels que $\alpha < \beta$. Alors on a

$$n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^\beta\right).$$

(ii) Soient α et β deux réelles tels que $\alpha < \beta$. Alors on a

$$e^{\alpha n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta n}\right).$$

Pour les démonstrations, il suffit de considérer les quotients correspondants et de vérifier qu'ils convergent effectivement vers 0.

À ce stade il est légitime de se demander quelle est l'intérêt de la notation (A.7) par rapport à (A.8). Avant d'aller plus loin, on introduit une autre façon de voir la notion de négligeabilité.

Proposition A.46. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas. Alors*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = v_n\varepsilon_n.$$

Démonstration. On suppose qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$\frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui signifie que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Inversement on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\varepsilon_n = u_n/v_n$, de sorte que $u_n = \varepsilon_n v_n$. On a alors

$$\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

La notation « petit o » ne sera pas seulement utilisée pour dire qu'une suite est négligeable par rapport à une autre. Elle servira également dans les calculs. Ainsi la notation $o(v_n)$ désignera tout terme qu'on ne veut pas expliciter et dont on veut seulement se souvenir qu'il est négligeable devant v_n.

Exemple A.47. En guise d'exemple, on cherche à calculer la limite éventuelle quand n tend vers $+\infty$ de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Avant de lire la suite, essayez de voir si vous pouvez deviner la limite avec les outils usuels de terminale.

$$\vdots$$

Un raisonnement plus ou moins intuitif serait de dire que $1+\frac{1}{n}$ tend vers 1, et que $1^n = 1$ tend vers 1, donc par composition de limites, $(1+\frac{1}{n})^n$ tendrait vers 1. Une autre façon de penser serait de dire qu'on prend la puissance de plus en plus grande d'un nombre strictement plus grand que 1, donc on obtient quelque chose qui tend vers $+\infty$.

$$\vdots$$

Ces deux points de vue sont bien évidemment incompatibles et montrent que la question est plus subtile qu'il n'y paraît. Il nous faut donc faire un raisonnement plus fin pour faire la part des chose entre la puissance qui devient grande et l'écart entre $1 + \frac{1}{n}$ et 1 qui devient petit.

On commence par écrire

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

C'est un réflexe très utile dès qu'une variable intervient dans une puissance. Les fonctions *exponentielle* et *logarithme* sont déjà connues mais seront introduites au chapitre sur les *fonction d'une variable réelle.*

Il faut donc commencer par comprendre comment se comporte $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $1+\frac{1}{n}$ tend vers 1 et que la fonction logarithme est *continue* (voir le chapitre 3), on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Mais cela ne permet pas de déterminer le comportement asymptotique de

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

qui est donc le produit d'un facteur qui tend vers $+\infty$ avec un facteur qui tend vers 0. C'est pour cela qu'on a besoin de savoir *à quelle vitesse* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *tend vers 0*. Par exemple, si ce terme se comporte comme $1/n^2$, le produit avec n convergera vers 0, s'il se comporte comme $47/n$, alors le produit avec n convergera vers 47, et s'il se comporte comme $1/\sqrt{n}$ alors le produit avec n tendra vers $+\infty$. Cette étude plus précise de la fonction logarithme près de 1 sera l'objet du paragraphe sur les *développements limités* que l'on verra au chapitre 3. En attendant, on admet provisoirement que

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{A.9}$$

Autrement dit, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}. \tag{A.10}$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right). \tag{A.11}$$

On note que par rapport à (A.9), on s'est un peu éloigné de la notation (A.7). On continue avec l'écriture (A.10). On peut alors écrire

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon_n}{n}\right) = 1+\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On a donc levé l'indétermination observée plus haut. Par *continuité* de la fonction exponentielle, on obtient finalement

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp(1+\varepsilon_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.$$

Avec les petits o on peut écrire tout cela de la façon suivante :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.$$

Pour ce petit calcul la notation ε_n convient parfaitement, et on peut encore discuter l'intérêt de la notation (A.11). Cela apparaîtra plus clairement pour des calculs plus longs, où il faudrait introduire plein de suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ différentes. On y reviendra dans le chapitre sur les fonctions, pour les calculs de développements limités.

Après le « petit o », on introduit maintenant le « grand O ». La notion est analogue, mais au lieu de dire qu'une suite est « signicativement plus petite » qu'une autre, on dit qu'elle n'est « pas significativement plus grande » :

Définition A.48. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas. On dit u_n est dominée par v_n et on note

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$$

(« u_n est un grand O de v_n quand n tend vers $+\infty$ ») s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n| \leqslant M\,|v_n|\,.$$

On commence par observer que si une suite est négligeable devant une autre, elle est en particulier dominée par cette suite. Cela résulte simplement du fait qu'une suite qui tend vers 0 est bornée (voir Proposition A.6).

Proposition A.49. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si*

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

alors

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n).$$

Remarque A.50. La notion de domination est a priori plus faible que la notion de négligeabilité, mais on peut l'utiliser pour donner des estimées plus fines en comparant à une suite plus petite. Par exemple, si on veut comparer $4n^3+5n^6$ à une puissance de n, le mieux que l'on puisse faire avec des petits o est

$$\forall \alpha > 6, \quad 4n^3+5n^6 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\alpha).$$

Alors qu'avec un grand O on peut simplement dire

$$4n^3+5n^6 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^6).$$

C'est plus simple et plus fin (car toute suite dominée par n^6 est en particulier négligeable devant n^α pour tout $\alpha > 6$). D'où l'intérêt de cette nouvelle notion.

On termine ce paragraphe avec une dernière notion utile pour comparer les suites entre elles :

Définition A.51. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas. On dit que ces deux suites sont équivalentes et on note

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, deux suites sont équivalentes si elles ont le « même comportement » pour n grand. Il est souvent utile, pour simplifier un raisonnement, de remplacer une suite par une suite équivalente plus simple. Le cas le plus simple et le cas d'une somme de termes dont un est plus grand que tous les autres. Par exemple,

$$2n^{-2} + 5 + 6n^3 + 12n^6 \underset{n\to+\infty}{\sim} 12n^6.$$

Cette remarque est en fait générale. En effet, deux suites sont équivalentes si et seulement si la différence entre les deux est négligeable devant l'une ou l'autre :

Proposition A.52. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites ne s'annulant pas. Alors on a*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

si et seulement si

$$u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n).$$

Démonstration. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes. Alors on a

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Inversement, si $(u_n - v_n)$ est négligeable devant v_n on a

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{v_n + (u_n - v_n)}{v_n} = 1 + \frac{u_n - v_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

D'où le résultat. □

La notion d'équivalence entre les suites est particulièrement simple et il est très tentant de remplacer une suite par une suite plus simple, mais elle a le gros défaut de ne pas bien se comporter vis-à-vis de la somme. Ainsi, même si

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \tilde{u}_n \quad \text{et} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \tilde{v}_n,$$

il peut arriver que

$$u_n + v_n \quad \text{n'est pas équivalente à} \quad \tilde{u}_n + \tilde{v}_n.$$

Cela se produit quand les termes principaux se compensent. Considérer par exemple les suites définies par

$$u_n = n^3 + 4n^2, \quad \tilde{u}_n = n^3, \quad v_n = -n^3, \quad \tilde{v}_n = -n^3 + n^2.$$

Au final, même si la notion d'équivalence reste utile, on utilisera quasiment systématiquement les notion de négligeabilité ou de domination dans les calculs.

Remarque A.53. Les trois définitions de ce paragraphe ont été donnée pour des suites indéxées par $n \in \mathbb{N}$ et ne s'annulant pas. Pourtant dans les exemples, on a considéré des suites qui pouvait s'annuler voire ne pas être définie par exemple en 0. Comme on ne s'intéresse qu'au comportement asymptotique des suites en question, l'important est que le rapport u_n/v_n soit bien défini à partir d'un certain rang. Ainsi on peut définir les mêmes notions pour les suites indexées indifféremment par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ et qui n'ont au plus qu'un nombre fini de termes nuls (autrement dit, qui ne s'annule pas au-delà d'un certain rang).

A.11 Suites complexes

Dans tout ce chapitre on n'a considéré que des suites à valeurs réelles. Quasiment tout s'adapte au cas de suites à valeurs complexes. La définition de la limite s'adapte en remplaçant la valeur absolue par un module dans (A.1). Ensuite toutes les propriétés peuvent se redémontrer de la même façon. Une autre possibilité est d'utiliser directement les résultats vus pour les suites réelles avec l'observation suivante :

Proposition A.54. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe et* $\ell \in \mathbb{C}$. *Alors on a*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

si et seulement si

$$\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Re}(\ell) \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Im}(\ell). \tag{A.12}$$

Dans la démonstration qui suit on fera attention à bien distinguer les valeurs absolues de réels et les modules des complexes.

Démonstration. On suppose que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $n \geqslant N$ on a alors

$$|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| = |\operatorname{Re}(u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et, de même,

$$|\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)| = |\operatorname{Im}(u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve (A.12). Inversement, supposons que (A.12) est vraie. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$ on a

$$|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$ on a

$$|\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geqslant N$ on a alors

$$|u_n - \ell| = \sqrt{\operatorname{Re}(u_n - \ell)^2 + \operatorname{Im}(u_n - \ell)^2} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Cela prouve que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. □

On prendra tout de même garde aux quelques différences entre suites réelles et suites complexes. Il n'y a pas de relation d'ordre totale usuelle dans $\mathbb{C}$. Ainsi, tous ce qui en dépend d'une façon ou d'une autre ne peut pas être adapté.

Par exemple on ne définit pas de suite qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Par contre, rien n'interdit de dire que

$$|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

pour signifier que pour n grand u_n est loin de l'origine. En effet, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est rien d'autre qu'une suite réelle.

Autre conséquence, il n'y a pas de notion de monotonie pour les suites complexes. Ainsi, rien de ce qui a été dit au paragraphe A.7 n'a de sens pour les suites complexes. Les résultats du paragraphe A.6 ainsi que la proposition A.9 sont également à oublier dans ce contexte.