Corrigé de l'examen

Exercice 1. **1.** On a $E \in \mathcal{M}$ et $E \subset E$ donc $E \in \mathcal{M}_E$. Soit $A \in \mathcal{M}_E$. On a $E \setminus A = E \cap (X \setminus A)$. Comme $A \in \mathcal{M}$, on a $X \setminus A \in \mathcal{M}$ puis $E \cap (X \setminus A) \in \mathcal{M}$. Puisque $E \cap (X \setminus A) \subset E$, on obtient que $E \setminus A \in \mathcal{M}_E$. Soit maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_E$. On note $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Comme $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A \in \mathcal{M}$. Comme $A_n \subset E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A \subset E$. On a donc $A \in \mathcal{M}_E$, et finalement $\mathcal{M}_E$ est bien une tribu de E.
2. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. Si $0 \notin B$ alors $f^{-1}(B) = g^{-1}(B) \in \mathcal{M}_E \subset \mathcal{M}$, et si $0 \in B$ on a $f^{-1}(B) = g^{-1}(B) \cup (X \setminus E) \in \mathcal{M}$ car $g^{-1}(B) \in \mathcal{M}_E \subset \mathcal{M}$ et $X \setminus E \in \mathcal{M}$ car $E \in \mathcal{M}$. Dans tous les cas on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, donc f est mesurable.

Commentaires :
- Dans la deuxième question il est délicat d'écrire que $f(x) = g(x)\mathbb{1}_E(x)$ pour tout $x \in X$, car g n'est définie que sur E.

Exercice 2. Soit $M \geqslant 0$ un majorant de $|f|$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On commence par observer que la fonction $t \mapsto nf(t)e^{-nt}$ est continue donc mesurable sur $[0, +\infty[$. On peut alors écrire

$$\int_0^{+\infty} \left|nf(t)e^{-nt}\right| dt \leqslant nM \int_0^{+\infty} e^{-nt}\, dt = M < +\infty.$$

Cela prouve que la fonction $t \mapsto nf(t)e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (il n'est pas utile de considérer le cas $n = 0$, mais il est de toutes façons trivial). On effectue le changement de variable affine $s = nt$ ($ds = n\, dt$). On obtient

$$\int_0^{+\infty} nf(t)e^{-nt}\, dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{s}{n}\right) e^{-s}\, ds.$$

Pour tout $s \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\left|f\left(\frac{s}{n}\right)\right| e^{-s} \leqslant Me^{-s}$$

et la fonction $s \mapsto Me^{-s}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. D'autre part, pour tout $s \in [0, +\infty[$ on a

$$f\left(\frac{s}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0).$$

D'après le théorème de convergence dominée on obtient

$$\int_0^{+\infty} nf(t)e^{-nt}\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(0)e^{-s}\, ds = f(0).$$

Commentaires :
- Personne n'a réussi cette question...Le théorème de convergence dominée est très puissant mais il ne permet pas de montrer des résultats faux. Il est facile de se convaincre en prenant f constante que la limite n'est pas 0 en général (d'ailleurs le calcul fait pour vérifier que les intégrales étaient bien définies pouvait vous guider vers cette remarque). Pour appliquer le théorème de convergence dominée il faut au moins vérifier l'hypothèse de domination. En particulier, la fonction par laquelle on domine ne doit pas dépendre de n. Et quand ça ne marche pas, il ne faut pas passer en force...

Exercice 3.
1. a. La fonction $y \mapsto f(x/y)$ est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1. En outre on a

$$\frac{x}{y} \in [1, 2] \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \left[\frac{x}{2}, x\right],$$

donc le support de cette composée est inclus dans $[x/2, x]$.

b. Soit $x \in]0, +\infty[$. Puisque la fonction $y \mapsto |f(x/y)|$ est continue et nulle en dehors du segment $[x/2, x]$, elle est bornée. On note M un majorant. La fonction $y \mapsto f(x/y)g(y)/y$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. En outre

$$\int_{]0,+\infty[} \left|f\left(\frac{x}{y}\right)\frac{g(y)}{y}\right| d\lambda(y) \leqslant \frac{2M}{x} \int_{[x/2,x]} |g(y)|\, d\lambda(y).$$

Cette dernière quantité est finie car g est intégrable sur le compact $[x/2, x]$. Cela signifie que l'intégrale $(f \odot g)(x)$ est bien définie.

c. On a vu que la fonction $y \mapsto f(x/y)g(y)/y$ est intégrable pour tout $x \in]0, +\infty[$. Pour tout $y \in]0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto f(x/y)g(y)/y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et si on note M' un majorant de la fonction f' (qui est continue et nulle en dehors du segment [1,2], donc bornée) on a pour $x \in [a, b]$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) \frac{g(y)}{y} \right| = \left| f' \left(\frac{x}{y} \right) \frac{g(y)}{y^2} \right| \leqslant \frac{4M'}{x^2} \mathbb{1}_{[x/2,x]}(y) \, |g(y)| \leqslant \frac{4M'}{a^2} \mathbb{1}_{[a/2,b]}(y) \, |g(y)| \, .$$

Or

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{4M'}{a^2} \mathbb{1}_{[a/2,b]}(y) \, |g(y)| \, d\lambda(y) < +\infty,$$

donc d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, la fonction $(f \odot g)$ est dérivable sur $[a, b]$.

2. a. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ la fonction $y \mapsto \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y)$ est mesurable sur $]0, +\infty[$, comme produit de (composées de) fonctions mesurables. De même, la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y)$ est mesurable sur $(]0, +\infty[)^2$. Par le théorème de Fubini-Tonelli puis le changement de variable affine $x = ty$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]0,+\infty[} \left| f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{g(y)}{y} \right| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\
&= \int_{]0,+\infty[} |g(y)| \left(\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{y} \left| f\left(\frac{x}{y}\right) \right| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{]0,+\infty[} |g(y)| \left(\int_{]0,+\infty[} |f(t)| \, d\lambda(t) \right) d\lambda(y) \\
&= \|f\|_1 \int_{]0,+\infty[} |g(y)| \, d\lambda(y) \\
&= \|f\|_1 \, \|g\|_1 < +\infty.
\end{aligned}$$

Cela prouve que si on note E l'ensemble des $x \in]0, +\infty[$ tels que

$$\int_{]0,+\infty[} \left| \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \right| d\lambda(y) = +\infty.$$

alors $E \in \mathcal{B}(]0, +\infty[)$ et $\lambda(E) = 0$. Pour $x \in]0, +\infty[\setminus E$ la fonction $y \mapsto \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y)$ est bien intégrable sur $]0, +\infty[$.

b. D'après la question précédente la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y)$ est intégrable sur $(]0, +\infty[)^2$. D'après le théorème de Fubini Tonelli, la fonction

$$I : x \mapsto \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \, d\lambda(y),$$

définie sur $]0, +\infty[\setminus E$ est mesurable. Ainsi, $f \odot g$ est mesurable sur $]0, +\infty[$ (on peut se référer à la question 2 de l'exercice 1). En outre, d'après le calcul de la question précédente,

$$\begin{aligned}
\int_{]0,+\infty[} |(f \odot g)(x)| \, d\lambda(x) &= \int_{]0,+\infty[\setminus E} |I(x)| \, d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]0,+\infty[} \left| \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \right| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\
&\leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1 \, .
\end{aligned}$$

Ainsi $(f \odot g) \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[), \lambda)$ and $\|f \odot g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1$.

c. On considère maintenant f et g dans $L^1(]0,+\infty[,\mathcal{B}(]0,+\infty[),\lambda)$. On a vu que si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des représentants de f et g dans $\mathcal{L}^1(]0,+\infty[,\mathcal{B}(]0,+\infty[),\lambda)$, alors $\tilde{f}\circ\tilde{g}$ définit une fonction dans $\mathcal{L}^1(]0,+\infty[,\mathcal{B}(]0,+\infty[),\lambda)$. On note en outre que pour tout $x\in]0,+\infty[$, la valeur de $(f\odot g)(x)$ est inchangée si on remplace $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ par des fonctions qui leur sont égales presque partout. Ainsi on peut définir $f\odot g$ comme étant la classe d'équivalence dans $L^1(]0,+\infty[,\mathcal{B}(]0,+\infty[),\lambda)$ de $(\tilde{f}\odot\tilde{g})$. On a alors

$$\|f\odot g\|_1 = \left\|\tilde{f}\odot\tilde{g}\right\| \leqslant \left\|\tilde{f}\right\|_1 \|\tilde{g}\|_1 = \|f\|_1\,\|g\|_1\,.$$

Commentaires :

- Attention à la mauvaise notation $f(x)$ pour parler de la fonction f. Car quand vous écrivez « la fonction $f(x/y)$ est C^1 », il n'y a aucun moyen de savoir si vous voyez cette expression comme une fonction de x, de y ou du couple (x,y).
- Attention à la confusion entre être de classe C^1 sur [1,2] et être de classe C^1 et à support dans [1,2].
- Comme pour l'exercice 2, l'hypothèse de domination pour le théorème de dérivation sous l'intégrale n'a quasiment jamais été vérifiée correctement.

Exercice 4.

1. a. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a,b\in\varphi^{-1}(I)$ tels que $a<b$. Soit $x\in]a,b[$. Comme φ est croissante on a $\varphi(x)\in[\varphi(a),\varphi(b)]$. Comme I est un intervalle contenant $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ on a $\varphi(x)\in I$, soit $x\in\varphi^{-1}(I)$.

b. Soit $a\in\mathbb{R}$. Comme $[a,+\infty[$ est un intervalle, $\varphi^{-1}([a,+\infty[)$ est un intervalle, et donc un borélien (tout intervalle est ouvert, fermé, ou l'union d'un ouvert avec un singleton). Comme les intervalles de la forme $[a,+\infty[$ engendrent les boréliens de $\mathbb{R}$, on en déduit que f est mesurable.

2. Soit f une fonction étagée positive. Alors il existe $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}_+$ et $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{M}$ deux à deux disjoints tels que $X=\bigcup_{j=1}^n A_j$ et

$$f=\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$$

(on peut prendre l'un des α_j nul pour que les A_k, $1\leqslant k\leqslant n$ forment effectivement une partition de X). On a alors

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j\mu(A_j).$$

Comme

$$\sum_{j=1}^n \mu(A_j)=1$$

on obtient par convexité de φ :

$$\varphi\left(\int_X f\,d\mu\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \mu(A_j)\alpha_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n \mu(A_j)\varphi(a_j).$$

Or

$$\varphi\circ f=\sum_{j=1}^n \varphi(a_j)\mathbb{1}_{A_j},$$

donc

$$\sum_{j=1}^n \mu(A_j)\varphi(a_j) = \int_X (\varphi\circ f)\;d\mu.$$

Cela prouve l'inégalité demandé dans le cas où f est étagée.

On considère maintenant une fonction $f: X\to\mathbb{R}_+$ intégrable. Il existe une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\varphi\left(\int_X f_n\,d\mu\right) \leqslant \int_X (\varphi\circ f_n)\,d\mu. \qquad (*)$$

Par le théorème de convergence monotone et par continuité de φ on a

$$\varphi\left(\int_X f_n \, d\mu\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi\left(\int_X f \, d\mu\right).$$

De même, puisque φ est croissante, la suite de fonctions égagées $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\varphi \circ f$ en croissant. Par le théorème de convergence monotone on obtient donc

$$\int_X (\varphi \circ f_n) \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X (\varphi \circ f) \, d\mu$$

(on note que cette limite peut être $+\infty$). D'où le résultat par passage à la limite dans ($*$).

Commentaires :

- Pour la première question, il fallait traiter tous les intervalles, pas seulement ceux de la forme $[a, b]$, voire $]a, b[$.
- La fonction φ n'est pas supposée bijective (elle n'est même pas surjective), donc cela n'a aucun sens d'écrire $\varphi^{-1}([a, b]) = [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)]$.