

TD n° 5 :

Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 5.1. 1. Calculer le reste et le quotient de la division euclidienne de $1 + X + X^2 + X^3$ par $2 + X$. En déduire une primitive de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 2}.$$

2. Écrire la division euclidienne de $X^4 + 5X^3 - X^2 + 2X + 1$ par $2X^2 - 3X + 1$.

3. Écrire la division euclidienne de $X^3 + 3X + 1$ par $2X^2 - X + 1$. En déduire le comportement asymptotique en $\pm\infty$ de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 - x + 1}.$$

Exercice 5.2. 1. Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$.

2. Le polynôme P divise-t-il $(X^8 + 1)^8 - X^8$?

3. Le polynôme P divise-t-il $(X^5 + 1)^5 - X^5$?

Exercice 5.3. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $X^3 - 2$ et $X^{13} - 1$.

Exercice 5.4. 1. Montrer que $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ est racine du polynôme $P(X) = X^4 - \sqrt{3}X^3 + \sqrt{3}X - 1$. Sans calcul, donner une autre racine complexe de ce polynôme.

2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X) = X^2 - \sqrt{3}X + 1$, puis en déduire les quatre racines de P .

3. Écrire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5.5. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

Exercice 5.6. On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

On note Z l'ensemble des racines de P .

1. Montrer que si $z \in Z$, alors $z^2 \in Z$ et $(z - 1)^2 \in Z$.

2. Montrer que si $z \in Z$ alors $|z|$ et $|z - 1|$ sont dans $\{0, 1\}$.

3. En déduire que $Z \subset \{0, 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}\}$, puis que les seules racines possibles pour P sont 0 et 1.

4. Conclure.

Exercice 5.7. Pour chacune des fractions rationnelles $F_j \in \mathbb{R}(X)$ suivantes, donner la décomposition en éléments simples puis une primitive de la fonction $x \mapsto F(x)$ sur son domaine de définition :

$$F_1(X) = \frac{1}{(X + 1)(X - 1)(X - 2)(X + 3)}; \quad F_2(X) = \frac{1}{1 - X^4};$$

$$F_3(X) = \frac{X^2 - 3X + 4}{X^2 - 4X + 4}; \quad F_4(X) = \frac{X^2}{(X + 2)^4}.$$

Pour F_2 on commencera par chercher la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 5.8. 1. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 - 1$.

2. En déduire que $X^4 + X^2 + 1$ divise $Q(X) = X^6 - 1$.

3. Déterminer l'ensemble des racines complexes de Q . Les représenter graphiquement dans le plan complexe.

4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

5. En déduire la factorisation de $X^4 + X^2 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

6. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X^4 + X^2 + 1}$. On pourra utiliser convenablement les points 0, i et $+\infty$.