Mathématiques

Contrôle Continu n°1 - jeudi 10 novembre 2016

Durée : 1h30

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Montrer que

$$A \cup B = A \cap C \quad \Longleftrightarrow \quad \big(B \subset A \quad \text{et} \quad A \subset C\big).$$

Exercice 2. **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + (2-i)Z - 2i = 0$. On donnera les solutions sous formes algébriques et polaires.
2. Soit $n \geqslant 2$. En déduire sous forme polaire les solutions de l'équation $z^{2n} + (2-i)z^n - 2i = 0$.
3. Lorsque $n = 2$, placer les solutions dans le plan complexe et les écrire sous forme cartésienne.

Exercice 3. **1.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Rappeler la définition (avec les quantificateurs) de

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

2. En n'utilisant que cette définition et la définition de la continuité, montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue en 0.

Exercice 4. **1.** Soient f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On dit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à f en $+\infty$ si

$$f(x) - ax - b \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Montrer que, dans ce cas,

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a.$$

2. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1\right).$$

a. Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

b. En déduire que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation.
c. Montrer que pour tout $y_0 \geqslant 1$ il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $f(x_0) = y_0$.