Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle

3.1 Préliminaires

3.1.1 Le corps des réels

Il existe au moins deux façons de construire $\mathbb{R}$ (muni de son addition et de sa multiplication) à partir de $\mathbb{Q}$: par les *coupures de Dedekind* ou par les *suites de Cauchy*. Ce n'est pas l'objet de ce cours, mais n'hésitez pas à aller voir de quoi il s'agit...

Dans tous les cas on obtient que l'ensemble des réels, muni de ses opérations usuelles, est un *corps commutatif* (une définition a été donnée à la section 2.2, mais grosso modo cela signifie que les règles de calculs que vous utilisez depuis toujours sont effectivement valables (ouf !)).

3.1.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Le corps des réels est muni d'une *relation d'ordre totale*. Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une partie de $E \times E$. Étant donnés x et y dans E, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ si le couple (x, y) appartient à cette partie de $E \times E$.

Le corps $\mathbb{Q}$ est muni d'une relation « est inférieur ou égal à », notée $\leqslant$. C'est une relation d'ordre totale, ce qui signifie que

(i) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on a $x \leqslant x$.

(ii) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$.

(iii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Quelle que soit la méthode choisie pour construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, on peut étendre cette relation en une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$, que l'on notera toujours $\leqslant$. Enfin, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on notera $a < b$ si $a \leqslant b$ et $a \neq b$, $a \geqslant b$ si $b \leqslant a$ et $a > b$ si $b < a$.

3.1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$. On note

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \text{ et } x \leqslant b\}.$$

Définir de façon analogue $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$.

Définition 3.1. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un **intervalle** si pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$ on a $[a, b] \subset I$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$. Montrer que les ensembles $\emptyset$, $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

3.1.4 Propriété de la borne supérieure

Définition 3.2. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in R$.

(i) On dit que a est un **majorant** de A si pour tout $x \in A$ on a $x \leqslant a$.

(ii) On dit que a est un **maximum** de A si c'est un élément de A et un majorant pour A.

(iii) On dit que a est un **minorant** de A si pour tout $x \in A$ on a $x \geqslant a$.

(iv) On dit que a est un **minimum** de A si c'est un élément de A et un minorant pour A.

✎ Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ qui admet un majorant mais pas de maximum.

✎ On considère l'intervalle $I =]-1, 1]$

1. L'ensemble I admet-il un maximum ? Un minimum ?
2. Donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de I.
3. L'ensemble des majorants de I admet-il un minimum ? L'ensemble des minorants de I admet-il un maximum ?

Définition 3.3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) On dit que A est **majorée** si elle admet un majorant.

(ii) On dit que A est **minorée** si elle admet un minorant.

(iii) On dit que A est **bornée** si elle est minorée et majorée.

✎ Parmi les intervalles de l'exercice 3.1.3, lesquels sont majorés, minorés, bornés ?

Proposition-Définition 3.4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Si A est majorée, alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup(A)$.

(ii) Si A est minorée, alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf(A)$.

Puisqu'on n'a pas explicité la construction de $\mathbb{R}$, on ne démontrera pas ces propriétés ici.

✎ Déterminer les éventuelles bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$[-1, 1[, \quad \mathbb{Z}, \quad]0, +\infty[, \quad \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \left\{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leqslant 0 \text{ ou } q^2 \leqslant 2\right\}.$$

✎ Montrer que si A est une partie de $\mathbb{R}$ qui admet un maximum, alors on a $\sup(A) = \max(A)$. De même, si A admet un minimum, alors $\inf(A) = \min(A)$.

⚠ On a vu qu'une partie majorée de $\mathbb{R}$ admet toujours une borne supérieure, alors qu'elle peut avoir ou ne pas avoir un maximum.

3.1.5 Topologie de $\mathbb{R}$

Définition 3.5. Soient V une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de x s'il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta, x + \delta[\subset V$.

Soit $P(x)$ une propriété dépendant de $x \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que la propriété P est vraie au voisinage de x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Définition 3.6. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est un ouvert de $\mathbb{R}$ si c'est un voisinage de chacun de ses points. Autrement dit :

$$\forall a \in A, \exists \delta > 0, \quad]a-\delta, a+\delta[\subset A.$$

✎ Montrer que $]-1,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $]-1,1]$, $[-1,1[$ et $[-1,1]$ ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition 3.7. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est un fermé de $\mathbb{R}$ si $\mathbb{R} \setminus A$ est ouvert.

✎ Parmi les ensembles $]-1,1[$, $]-1,1]$, $[-1,1[$ et $[-1,1]$, lesquels sont des fermés de $\mathbb{R}$.

⚠ « fermé » n'est pas la négation de « ouvert ». En effet, les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont *à la fois ouverts et fermés*, tandis que l'intervalle $[-1,1[$ n'est *ni ouvert ni fermé*

Proposition-Définition 3.8. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) On appelle **adhérence** de A et on note $\overline{A}$ le plus petit (pour l'inclusion) fermé de $\mathbb{R}$ contenant A.

(ii) On appelle **intérieur** de A et on note $\mathring{A}$ le plus grand (pour l'inclusion) ouvert de $\mathbb{R}$ contenant A.

Exemples 3.9. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

A	$\emptyset$	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$	$[a,+\infty[$	$]a,+\infty[$	$]-\infty,b]$	$]-\infty,b[$	$\mathbb{R}$
$\mathring{A}$	$\emptyset$	$]a,b[$	$]a,b[$	$]a,b[$	$]a,b[$	$]a,+\infty[$	$]a,+\infty[$	$]-\infty,b[$	$]-\infty,b[$	$\mathbb{R}$
$\overline{A}$	$\emptyset$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,+\infty[$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,b]$	$]-\infty,b]$	$\mathbb{R}$

Proposition 3.10. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$. On a*

$$\forall \delta > 0, \quad A \cap]a-\delta, a+\delta[\neq \emptyset.$$

3.1.6 Fonctions d'une variable réelle

Définition 3.11. Une **fonction d'une variable réelle** est une fonction dont l'ensemble de départ, appelé **domaine de définition** de la fonction, est une partie de $\mathbb{R}$. Ici on ne s'intéressera qu'à des fonctions dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ (ou, parfois, une partie de $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$).

Le graphe d'une fonction d'une variable réelle est donc une partie de $\mathbb{R}^2$.

✎ Vérifier que les fonctions suivantes sont bien définies, et dessiner leurs graphes.

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. , \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. , \quad f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Définition 3.12. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On dit que f est majorée/minorée/bornée si son image $f(D)$ est une partie majorée/minorée/bornée de $\mathbb{R}$. Autrement dit :

- f est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in D$,
- f est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in D$,
- f est **bornée** si elle est minorée et majorée, c'est-à-dire s'il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \Delta$,

✎ Les fonctions suivantes sont-elles minorées ? majorées ? bornées ?

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$