Section 2.2

Mais concrètement c'est quoi un nombre complexe ?

On a vu combien il peut être utile d'utiliser des nombres « imaginaires » pour résoudre des problèmes réels. Le problème est qu'il faut pour cela manipuler des nombres qui n'existent pas, ce qui est un peu désagréable. S'ils sont utiles mais n'existent pas, il faut donc les inventer. Ou plutôt les définir. Ainsi, le but est maintenant de donner un cadre précis dans lequel on calcule comme avec les réels, à ce détail près qu'il existe un élément dont le carré vaut -1.

On introduit souvent les nombres complexes en disant que ce sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $x + iy$ où x, y sont réels et i est tel que $i^2 = -1$. C'est simple et efficace, mais pas complètement satisfaisant puisqu'à ce stade il n'existe justement pas encore de nombre dont le carré est -1. Le fait est qu'avec cette approche vous avez pu étudier les nombres complexes, et en particulier vous avez vu que l'ensemble des complexes est en bijection avec le plan $\mathbb{R}^2$, via l'application $(x, y) \mapsto x + iy$. Une façon de définir les complexes (ce n'est pas la seule) est justement de les voir comme l'ensemble des points du plan sur lequel on aurait défini une addition et une multiplication. Bien entendu, on reviendra aussi vite que possible à la notation usuelle, bien plus pratique.

On rappelle que l'on note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont réels.

1. Si l'on identifie les points et les vecteurs du plan, on a déjà une addition sur $\mathbb{R}^2$: pour $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ on pose

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Montrer alors que

(i) Pour $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ on a $(x, y) + (x', y') \in \mathbb{R}^2$ (on dit que "+" est une *loi de composition interne* sur $\mathbb{R}^2$)

(ii) La loi "+" est *associative* : pour $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big)$$

(iii) La loi "+" est *commutative* : pour $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y).$$

(iv) Il existe un *élément neutre* pour la loi "+", c'est-à-dire un élément $(x_e, y_e) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x_e, y_e) + (x, y) = (x, y) + (x_e + y_e) = (x, y).$$

(v) Tout élément de $\mathbb{R}^2$ admet un *inverse* pour la loi "+" : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ il existe $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y) = (x_e, y_e).$$

Toutes ces propriétés étant vérifiées, on dit que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la loi "+" est un *groupe commutatif.*

2. On définit maintenant une deuxième opération sur $\mathbb{R}^2$. Pour $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$(x, y) \star (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

a. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ muni de la loi "$\star$" est un groupe commutatif. On pourra en particulier vérifier que l'inverse de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

b. Montrer que la loi "$\star$" est distributive par rapport à la loi "+". Cela signifie que pour $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \star \big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = \big((x, y) \star (x_1, y_1)\big) + \big((x, y) \star (x_2, y_2)\big).$$

Toutes ces propriétés étant vérifiées, on dira que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois $+$ et $\star$ est un *corps commutatif.* La loi $+$ est appelée *addition*, tandis que la loi $\star$ est la *multiplication.*

3. On identifie maintenant un réel λ avec le couple $(\lambda, 0)$.

a. Étant donnés λ et λ' réels, et en utilisant cette identification, calculer $\lambda \star \lambda'$.

b. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\lambda \star (x, y)$.

4. On note i le couple (0,1).

a. Calculer $i \star i$.

b. Pour x et y réels, que vaut $x + i \star y$?

A partir de maintenant, lorsque l'on voudra utiliser la structure de corps (c'est-à-dire lorsque l'on voudra faire sur $\mathbb{R}^2$ non seulement des additions mais aussi des multiplications) on utilisera toujours la notation $x+iy$ plutôt que (x, y), et on notera $\mathbb{C}$ plutôt que $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des nombres complexes. $\mathbb{C}$ est implicitement muni de la loi $+$ et de la multiplication $\star$, que l'on notera maintenant comme la multiplication réelle (par un point, qui pourra éventuellement être omis). Via l'identification vue ci-dessus, l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels sera vu comme une partie de $\mathbb{C}$. Les opérations sur $\mathbb{C}$ étendent les opérations sur $\mathbb{R}$ (cela signifie que les calculs avec les réels donnent le même résultat que l'on considère les opérations usuelles sur $\mathbb{R}$ ou les opérations que l'on vient de définir sur $\mathbb{C}$.

Définition. Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) On appelle *partie* réelle de z et on note $\mathrm{Re}(z)$ le nombre réel x.

(ii) On appelle *partie imaginaire* de z et on note $\mathrm{Im}(z)$ le nombre réel y.

(iii) On dit que z est *imaginaire pur* si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

(iv) On appelle *conjugué* de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $x - iy$.

Proposition. *Soient* $z, z' \in \mathbb{C}$.

(i) On a $\overline{\overline{z}} = z$.

(ii) On a $z = \overline{z} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = \mathrm{Re}(z) \iff z$ *est réel.*

(iii) On a $z = -\overline{z} \equiv \mathrm{Re}(z) = 0 \iff z = i\,\mathrm{Im}(z) \iff z$ *est imaginaire pur.*

(iv) On a $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

(v) On a $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.

(vi) On a $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

(vii) On a $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

5. Démontrer cette proposition.