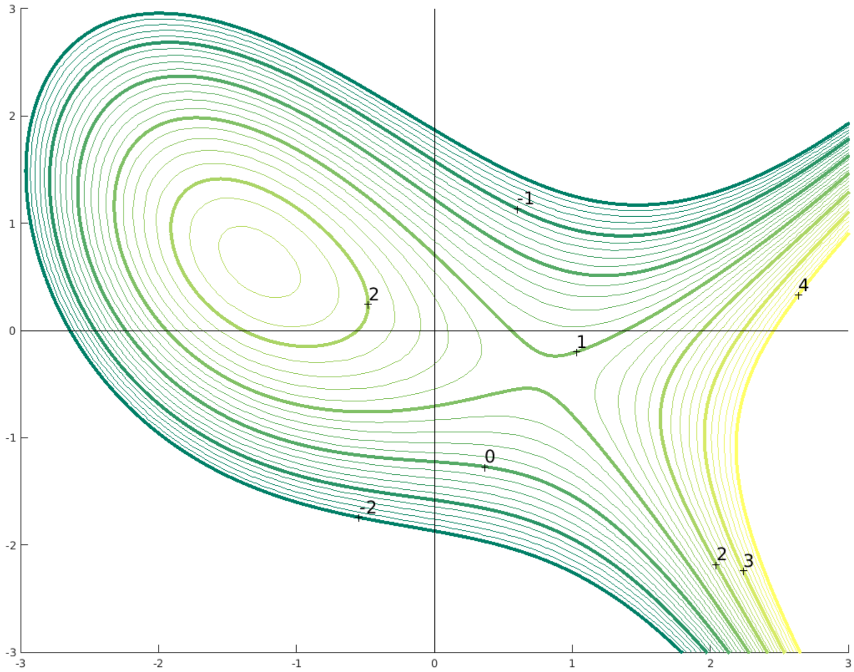
Calcul Différentiel et Intégral

Examen partiel - lundi 02 novembre 2015

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter le sujet dans l'ordre, mais veillez à toujours bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. On considère une fonction f de $[-3,3] \times [-3,3]$ dans $\mathbb{R}$ dont les lignes de niveaux entre -2 (ligne foncée) et 4 (ligne claire) sont données par la figure ci-après. Dessiner l'allure des graphes (en précisant les coordonnées approximatives des points particuliers) des fonctions $\varphi : t \mapsto f(t,0)$ et $\psi : t \mapsto f(t,t)$.



Exercice 2. On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \big(x^3y^2, x\cos(xy)\big) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et préciser sa différentielle.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $\varphi(t) = f(t^2, e^t)$. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée en tout point.

Exercice 3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point, et les expliciter.
3. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est différentiable.

Exercice 4. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant k\,\|x - y\|\,.$$

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|d_x f(h)\| \geqslant k\,\|h\|\,.$$

2. Montrer que l'image de $\mathbb{R}^n$ par f est un ouvert.
3. Montrer que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ standard. On note $\overline{B}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1, B la boule ouverte et S la sphère correspondantes. On considère une fonction f continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$ et différentiable sur B. On rappelle qu'une telle fonction est bornée et atteint ses bornes sur $\overline{B}$. Sa restriction à S atteint également ses bornes. Les deux questions sont indépendantes.
1. (Rolle) On suppose que f est constante sur S. Montrer qu'il existe un point de B où la différentielle de f s'annule.
2. (Principe du maximum) On suppose maintenant que f est de classe C^2 sur B.

a. On suppose que $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in B$. Montrer que f atteint son maximum en un point de S.

b. On suppose que $\Delta f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in B$. En considérant la fonction $f_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon\,\|x\|_2^2$, montrer que f atteint son maximum en un point de S.

c. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in S$ et que $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in B$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{B}$.