Chapitre 4

Fonctions de classe C^1 - Inégalité des accroissements finis.

Dans le chapitre précédent, on a commencé par définir les dérivées partielles. Puis on a dit que ce n'était pas une notion de dérivée satisfaisante, en particulier parce que l'existence des dérivées partielles n'implique même pas la continuité. On a ensuite défini la notion de différentiabilité, qui correspond mieux à nos attentes. C'est une notion plus forte, puisque l'existence de la différentielle implique en particulier l'existence des dérivées partielles. Malheureusement c'est aussi une notion plus compliquée.

Le but de ce paragraphe est maintenant d'introduire les fonctions de classe C^1. Cela généralise la notion connue en dimension 1. Mais le véritable intérêt est que c'est une notion plus forte que la différentiabilité, et pourtant souvent plus simple à vérifier. Ainsi, pour montrer qu'une fonction est différentiable on pourra chercher à montrer qu'elle est en fait de classe C^1 (tout en gardant à l'esprit que ce n'est pas parce qu'une fonction n'est pas C^1 qu'elle n'est pas différentiable...). Dans d'autres cas on aura explicitement besoin de s'assurer qu'une fonction est bien C^1.

On montrera ensuite l'inégalité des accroissements finis. On a vu que le théorème de Rolle et donc le théorème des accroissements finis ne sont plus valables pour une fonction de plusieurs variables. L'inégalité des accroissements finis est quant à elle toujours valable. Et elle nous rendra bien des services.

4.1 Fonctions de classe C^1

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 4.1. On dit que f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.

Théorème 4.2. *On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$. Alors f est différentiable sur $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Pour alléger les notations on suppose que $n = 2$. Le cas général se montre exactement de la même manière. Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{U}$ et $\delta > 0$ tel que $[a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \subset \mathcal{U}$. Pour $h = (h_1, h_2) \in [-\delta, \delta]^2$ on peut définir

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

On a

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2).$$

Par hypothèse, les fonctions $t \mapsto f(a_1 + t, a_2 + h_2)$ et $t \mapsto f(a_1, a_2 + t)$ sont de classe C^1 de $[-\delta, \delta]$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. D'après le théorème fondamental de l'analyse (qui s'adapte à ce cas en travaillant simplement coordonnée par coordonnée) on obtient

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= \int_0^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + t, a_2 + h_2)\, dt + \int_0^{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + t)\, dt \\ &= h_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2)\, ds + h_2 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2)\, ds, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} r(h) = h_1 &\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) ds \\ &+ h_2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) ds. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les dérivées partielles de f sont continues en a, il existe $\delta_0 \in]0, \delta]$ tel que pour tout $h_1, h_2 \in [-\delta_0, \delta_0]$ et $s \in [0, 1]$ on a

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon$$

et

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon.$$

Cela prouve que $|r(h)| \leqslant \varepsilon \max(|h_1|, |h_2|)$, et finalement $r(h) = \underset{h \to 0}{o}(\|h\|)$. D'où le résultat. □

Définition 4.3. Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que f est un C^1 difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ si f est une bijection de classe C^1 de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ dont la réciproque f^{-1} est de classe C^1 sur $\mathcal{V}$.

Remarque 4.4. Si f est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ est ouvert, alors $f(\mathcal{W})$ est ouvert comme image réciproque de $\mathcal{W}$ par l'application continue f^{-1}.

4.2 Inégalité des accroissements finis

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable.

Théorème 4.5 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient $a, b \in \mathcal{U}$ tels que*

$$[a; b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]\} \subset \mathcal{U}.$$

Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||.$$

Démonstration. On note

$$M = \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||.$$

On considère l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 1] & \to & \mathbb{R}^p, \\ t & \mapsto & f(a + t(b - a)). \end{array} \right.$$

Par composition de fonctions différentiables (on l'admet pour le moment, ce sera vu au chapitre 6) on obtient que g est différentiable (c'est-à-dire dérivable) sur $[0,1]$ et

$$\forall t \in [0,1], \quad g'(t) = d_{a+t(b-a)}f\,(b-a).$$

En particulier :

$$\|g'(t)\| \leqslant |||d_{a+t(b-a)}f|||\,\|b-a\| \leqslant M.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère

$$I_\varepsilon = \{t \in [0,1] \mid \|g(t) - g(0)\| \leqslant t(M+\varepsilon)\}$$

et $s_\varepsilon = \sup(I_\varepsilon)$. Ce supremum est bien défini car I_ε est borné (par 1) et non vide (il contient 0). Soit $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I_ε qui tend vers s_ε. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\|g(t_m) - g(0)\| \leqslant t_m(M+\varepsilon)$. La fonction $t \mapsto \|g(t) - g(0)\|$ est continue, donc par passage à la limite on obtient que $\|g(s_\varepsilon) - g(0)\| \leqslant s_\varepsilon(M+\varepsilon)$, et donc $s_\varepsilon \in I_\varepsilon$. Supposons par l'absurde que $s_\varepsilon < 1$. Alors pour $h > 0$ assez petit on a $s_\varepsilon + h \in [0,1]$ et

$$\|g(s_\varepsilon + h) - g(s_\varepsilon) - hg'(s_\varepsilon)\| \leqslant h\varepsilon.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|g(s_\varepsilon + h) - g(0)\| &\leqslant \|g(s_\varepsilon) - g(0)\| + h\,\|g'(s_\varepsilon)\| + h\varepsilon \leqslant s_\varepsilon\,(M+\varepsilon) + hM + h\varepsilon \\ &\leqslant (s_\varepsilon + h)\,(M+\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Cela prouve que $s_\varepsilon + h$ appartient à I_ε et contredit la définition de s_ε. Donc $s_\varepsilon = 1$. Finalement pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\|g(1) - g(0)\| \leqslant M + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0 cela donne $\|g(1) - g(0)\| \leqslant M$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Corollaire 4.6. *On suppose que $\mathcal{U}$ est convexe. Si toutes les dérivées partielles de f sont nulles sur $\mathcal{U}$ alors f est constante sur $\mathcal{U}$.*

Définition 4.7. Soit f une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $K \geqslant 0$. On dit que f est K-lipschitzienne si

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant K\,\|x - y\|\,.$$

On dit que f est lipschitzienne si elle est K-lipschitzienne pour un certain $K \geqslant 0$.

Remarque 4.8. Attention, la constante de Lipschitz K dépend du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Par contre, par équivalence des normes, le fait qu'une fonction soit lipschitzienne ou non ne dépend pas des normes choisies.

Souvent, pour montrer qu'une application est lipschitzienne, on utilise l'inégalité de la moyenne : si f est différentiable sur le convexe Ω et s'il existe $K \geqslant 0$ tel que $|||df(x)||| \leqslant K$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est K-lipschitzienne sur Ω.

Définition 4.9. On dit que f est contractante si elle est K-lipschitzienne pour un certain $K \in [0,1[$.

Attention, cette dernière notion dépend du choix des normes considérées...

4.3 Exercices

***Exercice* 4.1.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

***Exercice* 4.2.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x y^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

***Exercice* 4.3.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \inf(x^2, y^2)$. Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = y$. En dehors de cette droite la fonction f est polynômiale donc de classe C^1 ($f(x,y)$ vaut x^2 sous cette droite et y^2 au dessus).

***Exercice* 4.4.** **1.** Montrer que si f est une fonction contractante de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ alors l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
2. On considère le système d'équations

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y), \quad y = \frac{1}{2}\cos(x-y).$$

Montrer que ce problème admet au plus une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (N.B. : on verra au théorème 7.1 comment montrer que ce problème admet effectivement une solution).

***Exercice* 4.5.** Montrer qu'une application lipschitzienne est continue.

***Exercice* 4.6.** On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Montrer que l'application

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2^2}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle en tout point.

***Exercice* 4.7.** Soit $\beta > 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer pour quelles valeurs de β la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, et pour quelles valeurs elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

***Exercice* 4.8.** Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 d'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que cette suite converge simplement vers une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$:

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f_m(x) \xrightarrow[m\to+\infty]{} f(x).$$

On suppose en outre que la suite des différentielles df_m converge uniformément sur $\mathcal{U}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{U}$ il existe une application linéaire $g(x)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |||d_x f_m - g(x)||| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.$$

Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et déterminer sa différentielle en tout point.