Chapitre 13

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Après avoir considéré des fonctions définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ (autrement dit des morceaux de droites) puis sur des morceaux de plans ou d'espaces de dimensions quelconques, on souhaite maintenant s'intéresser à des fonctions définies par exemple sur des courbes ou des surfaces. Par exemple sur des cercles, des sphères…

Le but de ce chapitre est de commencer par définir et bien comprendre ce qu'on va considérer comme courbes ou surfaces. Plus généralement on va introduire les sous-variétés de dimension p dans $\mathbb{R}^n$. Une courbe sera une sous-variété de dimension 1, une surface une sous-variété de dimension 2, etc. On notera tout de même que la définition d'une sous-variété de dimension 1 ne correspondra pas à la notion de courbe paramétrée déjà introduite.

On va donner trois définitions d'une sous-variété, chacune ayant son intérêt propre. Mais dans tous les cas il s'agira d'une définition locale. Cela signifie qu'on ne se préoccupe pas de la forme globale de l'objet, mais seulement de ce à quoi il ressemble au voisinage de chaque point. Plus précisément, on dira qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si elle ressemble au voisinage de chacun de ses points à un sous-espace affine de dimension p. Le sous-espace en question (qui est en fait le sous-espace qui approche le mieux la sous-variété au point considéré) sera appelé plan tangent à la sous-variété en ce point.

Par exemple une sphère est une sous-variété de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. La terre est (grosso modo) une sphère, mais à notre échelle où on n'en voit qu'une toute petite partie on a l'impression de marcher sur un plan (à tel point qu'on a longtemps pensé que la terre était effectivement plate …).

Ainsi une sous-variété de dimension 1 est une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que si on « zoome » sur n'importe lequel de ses points, on finit par avoir l'impression qu'il s'agit d'un morceau de droite. Avec cette idée en tête, pouvez-vous dire lesquels parmis ces ensembles du plan seront considérés comme des sous-variétés de dimension 1 ? Lorsque c'est le cas, pouvez-vous dessiner la droite tangente en chaque point ?

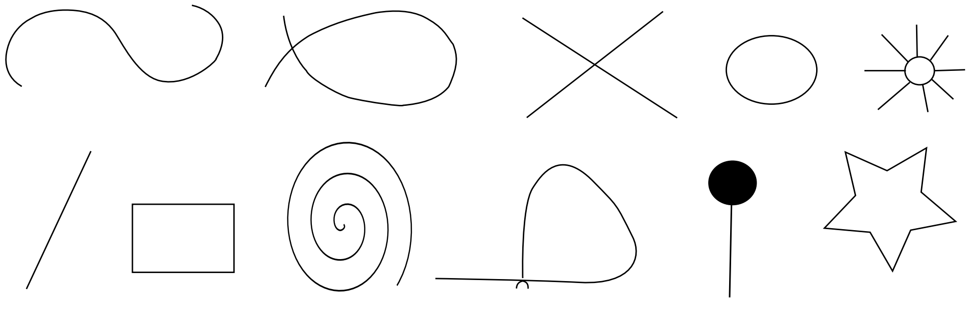

Figure 13.1 – Courbes ou pas courbes ?

Le but de ce chapitre est maintenant de donner des définitions rigoureuses pour donner un sens précis à l'idée intuitive que l'on peut se faire d'une courbe ou d'une surface.

13.1 Définitions et exemples

13.1.1 Définition par une équation

Bien souvent, les ensembles avec lesquels on travaille sont définis par des équations. On a déjà fait la remarque que le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon 1 peut être vu comme l'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Dans $\mathbb{R}^3$ on obtient encore un cercle en considérant l'ensemble des points tels que $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $z = 0$, ce qui revient à dire que l'équation $(x^2 + y^2 - 1, z) = (0, 0)$ est satisfaite.

Définition 13.1. On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p si pour tout $a \in M$ il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une application F de classe C^∞ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ telle que d_aF est de rang $n - p$ et

$$M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \mid F(x) = 0\}.$$

Remarque 13.2. On pourrait définir des sous-variétés de classe C^k avec $k \geqslant 1$ en demandant seulement que l'application F qui intervient dans la définition est de classe C^k. Cela ne change pas grand chose à tout ce qui suit, et on ne s'embêtera pas avec cette distinction ici.

Exemples 13.3. (i) Un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension n (considérer l'application $F : \mathcal{V} \to \{0\}$ constante égale à 0).

(ii) Un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$ (il est donné par une équation de la forme $L(x) - b = 0$ où L est une forme linéaire non nulle et $b \in \mathbb{R}^n$. Plus généralement tout sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension p est une sous-variété de dimension p. Par exemple une droite est une sous-variété de dimension 1.

(iii) Les cercles de $\mathbb{R}^2$ sont des sous-variétés de dimension 1. En effet le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$F(x, y) := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0.$$

Or pour $(x, y) \in \mathcal{C}$ on a $\nabla F(x, y) = \big(2(x - x_0), 2(y - y_0)\big) \neq 0$, donc $d_{(x,y)}F$ est nécessairement de rang 1. On vérifie de même que les sphères de $\mathbb{R}^3$ sont des sous-variétés de dimension 2.

(iv) Soit f une application lisse d'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$. Alors le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$ est une sous-variété de dimension p dans $\mathbb{R}^{p+m}$. En effet on a

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \mid F(x, y) = 0\} \quad \text{où } F(x, y) = y - f(x).$$

F est bien lisse sur $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$ et sa différentielle est de rang constant égal à m, puisque pour $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$ et $\eta \in \mathbb{R}^m$ on a $\eta = d_{(x,y)}F(0, \eta) \in \mathrm{Im}(d_{(x,y)}F)$.

Remarques 13.4. • Tous les exemples précédents sont globalement définis par une seule équation. Ce n'est pas nécessaire. La définition est locale et l'équation utilisée peut dépendre du point autour duquel on regarde.

• Il n'y a pas unicité de l'équation définissant un ensemble. En particulier une sous-variété peut être définie par l'équation $\tilde{F}(x) = 0$ avec $\tilde{F}$ ne vérifiant pas les conditions de la définition. Considérer par exemple l'ensemble

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 = 0\right\}.$$

C'est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ car c'est aussi l'ensemble défini par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\right\}.$$

13.1.2 Définition par coordonnée rectifiante

On montre dans cette partie que la définition 13.1 est équivalente à une propriété plus proche de l'intuition qu'on a d'une sous-variété. Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si on peut tordre (via un difféomorphisme) le voisinage de chacun de ses points de sorte que M soit envoyé sur un morceau d'un sous-espace de dimension p.

Proposition 13.5. *$M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p si et seulement si pour tout $a \in M$ il existe un C^∞-difféomorphisme φ entre un voisinage $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(a) = 0$ et*

$$\varphi(M \cap \mathcal{U}) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{V} \mid y_{p+1} = \cdots = y_n = 0\}.$$

Dans ce cas φ est appelée une coordonnée rectifiant M en a.

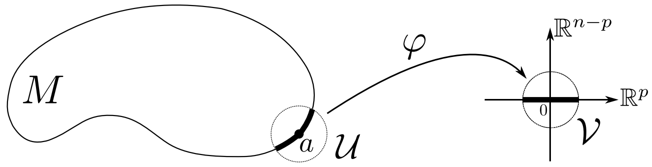

Figure 13.2 – φ « redresse » M au voisinage de a.

Démonstration. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$. On suppose qu'un tel difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ existe, défini sur un voisinage $\mathcal{U}$ de a. La définition d'une sous-variété est alors vérifiée avec $F = (\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-p}$. En effet on a bien $M \cap \mathcal{U} = F^{-1}(\{0\})$, et $d_a F$ est surjective car $d_a\varphi$ l'est. Inversement supposons que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et considérons $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$. Par définition il existe une fonction $F = (F_1, \ldots, F_{n-p})$ de classe C^∞ d'un voisinage $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-p}$ et telle que $d_a F$ est surjective. De la matrice $\operatorname{Jac} F(a)$ on peut donc extraire une matrice carrée inversible de taille $n - p$. Autrement dit, il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{\sigma(p+1)}}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{\sigma(n)}}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-p}}{\partial x_{\sigma(p+1)}}(a) & \cdots & \frac{\partial F_{n-p}}{\partial x_{\sigma(n)}}(a) \end{pmatrix}$$

est inversible. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage $\mathcal{W}'$ de $(a_{\sigma(1)}, \ldots a_{\sigma(p)})$ dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction lisse $f : \mathcal{W}' \to \mathbb{R}^{n-p}$ tels que

$$M \cap \mathcal{W} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{W}' \times \mathbb{R}^{n-p} \mid (x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \right\}.$$

Pour x dans un petit voisinage $\mathcal{U}$ de a on note alors

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \big(& x_{\sigma(1)} - a_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)} - a_{\sigma(p)}, \\ & x_{\sigma(p+1)} - f_1(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \ldots, x_{\sigma(n)} - f_{n-p}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})\big). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{U}$ est assez petit et $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ alors $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ convient. □

Définition 13.6. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. On appelle paramétrage local de M en a une bijection lisse γ d'un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^p$ vers $\mathcal{U} \cap M$ (où $\mathcal{U}$ est un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$) telle que $\gamma(0) = a$ et $d_y\gamma$ est injective pour tout $y \in \mathcal{V}$.

La preuve de la proposition précédente montre qu'une sous-variété M admet un paramétrage local en tout point a de M. Dans le cas où $\sigma = \mathrm{Id}$ il suffit de considérer

$$\gamma : (y_1, \dots, y_p) \mapsto (a_1+y_1, \dots, a_p+y_p, f_1(a_1+y_1, \dots, a_p+y_p), \dots, f_{n-p}(a_1+y_1, \dots, a_p+y_p)).$$

A la lumière de ces définitions, on peut à nouveau se poser la question de savoir lesquels parmi les ensembles de la figure 13.1 sont des sous-variétés de dimension 1.

Définition 13.7. Soient M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ et N une sous-variété de dimension q dans $\mathbb{R}^m$. Soit f une fonction de M dans N. On dit que f est de classe C^k si pour tout $a \in M$, tout paramétrage local γ de M en a (défini sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^p$) et tout paramétrage local $\tilde{\gamma}$ de N en $f(a)$ (défini sur un voisinage $\mathcal{W}$ de 0 dans $\mathbb{R}^q$) tels que $f(\gamma(\mathcal{V})) \subset \tilde{\gamma}(\mathcal{W})$ alors l'application

$$\tilde{\gamma}^{-1} \circ f \circ \gamma : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

est de classe C^k.

Remarque 13.8. Pour chaque $a \in M$, il suffit en fait de vérifier la définition pour un paramétrage γ et un paramétrage $\tilde{\gamma}$.

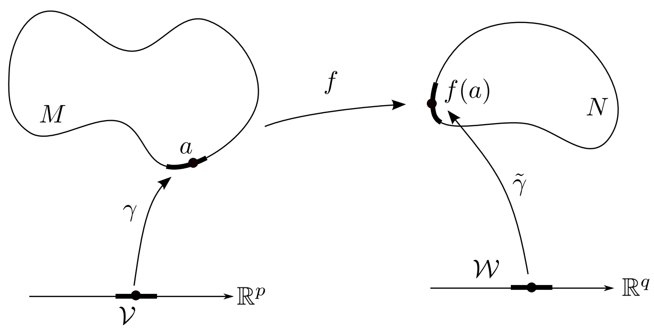

FIGURE 13.3 – Via les paramétrages, on ramène l'étude de la régularité à des fonctions définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^p$.

13.2 Plan tangent

Proposition 13.9. *Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $a \in M$. On suppose que sur un voisinage $\mathcal{U}$ de a, M est définie par l'équation $F(x) = 0$ où $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-p}$ est lisse et d_aF est de rang $n-p$. On suppose d'autre part que $\gamma : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p \to \mathcal{U} \cap M \subset \mathbb{R}^n$ est un paramétrage local de M au voisinage de a, avec $\gamma(0) = a$. Alors on a*

$$\ker d_aF = \mathrm{Im}\, d_0\gamma.$$

Démonstration. L'application $F \circ \gamma$ est nulle au voisinage de 0 dans $\mathcal{V}$, donc $d_aF \circ d_0\gamma = 0$, ce qui implique que $\mathrm{Im}\, d_0\gamma \subset \ker d_aF$. Comme $d_0\gamma$ est injective, son image est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. D'autre part la différentielle $d_aF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ est de rang $n-p$ donc par le théorème du rang son noyau est de dimension p. Cela prouve qu'on a bien $\mathrm{Im}\, d_0\gamma = \ker d_aF$. $\square$

Définition 13.10. Soient M, a, F et φ comme précédemment. Alors on définit l'espace tangent à M au point a comme étant

$$T_aM = \ker d_aF = \mathrm{Im}\, d_0\gamma \subset \mathbb{R}^n.$$

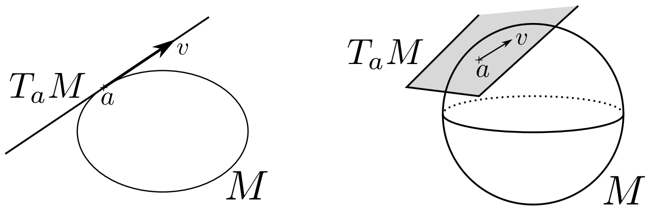

Figure 13.4 – Plan tangent.

Remarque 13.11. Soient $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application lisse, $a \in \mathcal{U}$ et $M = \{x \in \mathcal{U} \mid F(x) = F(a)\}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$d_aF(h) = \langle \nabla F(a), h \rangle .$$

Ainsi M est une sous-variété de dimension $n-1$ au voisinage de a si et seulement si $\nabla F(a) \neq 0$, et dans ce cas le plan tangent T_aM est l'orthogonal de $\nabla F(a)$ dans $\mathbb{R}^n$.

13.3 Champs de vecteurs

Définition 13.12. Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$. On appelle champ de vecteur de classe C^k sur M une application $X : M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k telle que $X(x) \in T_aM$ pour tout $x \in M$.

Exemple 13.13. Le vecteur gradient d'une fonction de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ définit un champ de vecteur sur cet ouvert. D'un point de vue physique, une force ou la vitesse en chaque point d'un fluide en mouvement définissent des champs de vecteurs.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $X : x \mapsto \sum X_j(x)e_j$ un champ de vecteur sur $\mathcal{U}$ et f une fonction différentiable sur $\mathcal{U}$. Alors on note $X \cdot f$ la dérivée de f selon X donnée par

$$(X \cdot f)(a) = d_af(X(a)) = \sum_{j=1}^{n} X_j(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Pour cette raison le champ de vecteur X est souvent noté

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Définition 13.14. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et φ un difféomorphisme de classe C^k de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. Soit X un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$. Alors on définit un champ de vecteurs $\varphi_* X$ sur $\mathcal{V}$ (image de X par φ, ou « poussé en avant » de X par φ) par

$$\forall a \in \mathcal{V}, \quad (\varphi_* X)(a) = d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi\big(X(\varphi^{-1}(a))\big).$$

13.4 Exercices

***Exercice* 13.1.** Les sous-ensemble suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^2$

- $\Gamma_1 = \big\{(t, t^2), t \in \mathbb{R}\big\}$,
- $\Gamma_2 = \big\{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}_+^*\big\}$,
- $\Gamma_3 = \big\{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}^*\big\}$,
- $\Gamma_4 = \big\{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}\big\}$,
- $\Gamma_5 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y \geqslant 0\big\}$.
- $\Gamma_6 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\big\}$,

***Exercice* 13.2.** Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4xy + 2xz + 4y - z = xy + xz + 2x - z = 0\right\}$$

est une courbe au voisinage de l'origine et déterminer l'espace tangent à cette courbe à l'origine.

***Exercice* 13.3.** Montrer que l'ensemble

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy + xz + 2x + 2y - z = 0\right\}$$

est une surface au voisinage de l'origine et déterminer l'espace tangent à cette surface à l'origine.

***Exercice* 13.4.** Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x,y) = x^2 - y^2$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble défini par l'équation $F(x,y) = \alpha$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

***Exercice* 13.5.** **1.** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble M_α d'équation $x^2 - y^3 = \alpha$ est-il une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$?
2. Pour de telles valeurs de α, et pour $(x_0, y_0) \in M_\alpha$, donner une équation de l'espace tangent à M_α au point (x_0, y_0).

***Exercice* 13.6.** Soit M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2. Montrer que

$$M_1 \times M_2 = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, a_1 \in M_1, a_2 \in M_2\right\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$, et préciser sa dimension. On pourra le faire en utilisant chacune des trois caractérisations d'une sous-variété.

***Exercice* 13.7.** Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\gamma :]a,b[\to M$ une courbe de classe C^1. Montrer que pour tout $t \in]a,b[$ on a $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.
2. Soient $a \in M$ et $h \in T_aM$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = h$.

***Exercice* 13.8** (Double puits)**.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $V(x) = 4x^2(x^2 - 1)$. Pour $E \in \mathbb{R}$ on note

$$\mathcal{C}_E = \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \xi^2 + V(x) = E\right\}.$$

Pour quelles valeurs de E l'ensemble $\mathcal{C}_E$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^n$? (indication : pour $E = 0$ on pourra par exemple utiliser le paramétrage $(x,\xi) = (\cos\theta, \sin(2\theta))$).

***Exercice* 13.9.** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x,y) = (x^2 + 1 - 2y, x)$.
1. Montrer que φ est un C^∞-difféomorphisme.
2. Déterminer $\varphi_* X$ lorsque

$$X_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2(x,y) = y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1 - x + y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$