Chapitre 10

Changement de variables dans une intégrale multiple

Dans ce chapitre on poursuit l'étude des intégrales multiples. Pour calculer une intégrale double, la méthode de base donnée par le théorème de Fubini consiste à intégrer sur les « tranches » correspondant aux segments donnés par les intersections du domaine d'intégration avec les droites d'équation $x = cte$, puis d'intégrer le résultat par rapport à x. On peut également commencer par intégrer sur les tranches horizontales $y = cte$ puis intégrer le résultat par rapport à y.

Cette alternative n'est pas toujours satisfaisante.

Imaginons que l'on veuille intégrer la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. On n'a pas très envie d'intégrer ni sur des tranches verticales ni sur des tranches horizontales. Comme la valeur de f ne dépend que de la distance (euclidienne) du point (x, y) à l'origine, f est constante sur les cercles de centre O. Ainsi il est très facile d'intégrer f sur ces cercles. De plus il est très facile de voir le domaine D comme union de tels cercles. Pour ce type d'exemple on a donc tout intérêt à introduire et utiliser les coordonnées polaires. Pour cela on devra faire un changement de variables. C'est l'objet de ce chapitre.

Bien sûr pour d'autres exemples on préférera utiliser d'autres coordonnées. Physiquement, le choix des coordonnées est directement lié aux symétries du problème étudié.

Toutefois il peut arriver pour certains problèmes que l'expression de la fonction incite à utiliser certaines coordonnées tandis que la forme du domaine d'intégration incite à en préférer d'autres. La vie est parfois affaire de compromis...

10.1 Énoncé du théorème et idées de démonstration

Théorème 10.1 (Théorème de changement de variables)**.** *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un difféomorphisme de classe C^1. Alors pour toute fonction $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ continue et intégrable on a*

$$\int_{\phi(\mathcal{U})} f(y)\, dy = \int_{\mathcal{U}} f(\phi(x)) \left|\det \operatorname{Jac} \phi(x)\right| \, dx.$$

On ne donnera pas de démonstration détaillée pour ce résultat. On commence par donner des exemples élémentaires, qui servent en fait à démontrer le théorème. On donnera ensuite les idées pour la démonstration (pour une démonstration complète, voir par exemple le paragraphe IV.3.4 de [Ramis-Warusfel, L2]), puis on introduira les changements de variables usuels (coordonnées polaires, cylindriques et sphériques).

Exemples 10.2 (Exemples de base). On considère un ouvert élémentaire A comme à la définition 9.7. On commence par tester la formule de changement de variables sur des cas simples où elle peut être obtenue « à la main ».

- Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$T_{(x_0,y_0)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+x_0, y+y_0) \end{array} \right.$$

$T_{(x_0,y_0)}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $T_{(-x_0,-y_0)}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Jac} T_{(x_0,y_0)}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\left|\det \operatorname{Jac} T_{(x_0,y_0)}\right| = 1.$$

La formule de changement de variables donne alors

$$\int_A f(x+x_0, y+y_0)\, dx\, dy = \int_{T_{(x_0,y_0)}(A)} f(x,y)\, dx\, dy,$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x+x_0, y+y_0)\, dy\, dx = \int_{x=a+x_0}^{b+x_0} \int_{y=\varphi_1(x-x_0)+y_0}^{\varphi_2(x-x_0)+y_0} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Cette formule s'obtient en fait facilement en faisant deux changements de variables successifs dans des intégrales simples.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note

$$T_{1,2,\lambda} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+\lambda y, y) \end{array} \right.$$

$T_{1,2,\lambda}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $T_{1,2,-\lambda}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Jac} T_{1,2,\lambda}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$|\det \operatorname{Jac} T_{1,2,\lambda}| = 1.$$

La formule de changement de variables donne dans ce cas :

$$\int_{y=c}^{d} \int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x+\lambda y, y)\, dx\, dy = \int_{y=c}^{d} \int_{x=\psi_1(y)+\lambda y}^{\psi_2(y)+\lambda y} f(x,y)\, dx\, dy.$$

À nouveau, il est facile de vérifier directement que cette formule est bien valable.

- On note maintenant

$$P_{1,2} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array} \right.$$

$P_{1,2}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $P_{1,2}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Jac} P_{1,2}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$|\det \operatorname{Jac} P_{1,2}| = 1.$$

Que donne la formule de changement de variables dans ce cas ?
- Pour $\alpha \neq 0$ on note finalement

$$D_{1,\alpha} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\alpha x, y) \end{array} \right.$$

$D_{1,\alpha}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $D_{1,\alpha^{-1}}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|\det D_{1,\alpha}| = |\alpha| .$$

La formule de changement de variables nous dit alors que si on dilate le problème par un coefficient $|\alpha|$ dans une direction, on muliplie les aires par α, ce qu'on aurait encore pu vérifier directement.

On rappelle que le déterminant permet de mesurer des volumes. Des aires en dimension 2. En effet pour u et v dans $\mathbb{R}^2$ la valeur absolue du déterminant $\det(u,v)$ est l'aire du parallèlogramme engendré par u et v. Ainsi le facteur $|\det \mathrm{Jac}\, \phi(x)|$ mesure le fait que le difféomorphisme ϕ a tendance à dilater ou contracter les aires au voisinage de x.

Idées de démonstration pour le théorème de changement de variables. • On commence par remarquer que si le résultat est vrai pour les difféomorphismes f et g, alors il est vrai pour $f \circ g$ (sous réserve que cette composition ait un sens).
- On a vu que le théorème est vrai si ϕ est une transvection, une permutation ou une dilatation. Or tout isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme composition finie de tels isomorphismes élémentaires (voir le cours d'algèbre linéaire, cela peut se montrer en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss). Ainsi on obtient le théorème dans le cas où ϕ est un isomorphisme.
- On découpe le domaine en un grand nombre de domaines de plus en plus petits. À la limite, pour chaque petit domaine D et pour n'importe quel $x_0 \in D$ on peut approcher f par $f(x_0)$ sur D et $\phi(D)$ par $\mathrm{Jac}\, \phi(D - x_0) + \varphi(x_0)$, obtenu à partir de D en appliquant une translation, un isomorphisme, puis une nouvelle translation. □

Exemple 10.3. Soient $a, b > 0$. On considère l'ellipse

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}.$$

L'application φ définie par

$$\varphi(x,y) = (ax, by)$$

réalise un C^1-difféomorphisme du disque unité ouvert D dans $\mathcal{E}$. On a alors

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{E}) = \int_{\varphi(D)} 1 \, dx\, dy = \int_D 1 \times \underbrace{|\mathrm{Jac}\, \varphi(X,Y)|}_{=ab} \, dX\, dY = ab\pi.$$

On peut dire qu'on a effectué le changement de variables $(x,y) = \varphi(X,Y)$, avec $dx\, dy = |\mathrm{Jac}\, \varphi(X,Y)| \, dX\, dY = ab\, dX\, dY$.

10.2 Exemples importants de changements de variables

On introduit maintenant des changements de variables particulièrement utiles. En fonction des symétries du problème étudié, ces changements de variables peuvent permettre de considérablement simplifier l'expression des intégrales à calculer.

10.2.1 Coordonnées polaires

Proposition 10.4. *L'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{cases}$$

est un C^1-difféomorphisme. En outre pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ on a

$$\det \operatorname{Jac} \Phi(r,\theta) = r.$$

Démonstration. On vérifie « facilement » que Φ est une bijection. D'après le théorème de l'inversion globale, il reste à vérifier que sa matrice jacobienne est partout inversible. Or pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ on a

$$\det \operatorname{Jac} \Phi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

D'où le résultat. □

Ce changement de variables est agréable quand la frontière du domaine d'intégration s'exprime plus facilement comme courbe paramétrée en polaire et/ou que la fonction à intégrer présente une symétrie radiale :

Proposition 10.5. *Soit A une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe une fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ continue, 2π périodique, et vérifiant*

$$A = \{(r\cos\theta, r\sin(\theta), \theta \in \mathbb{R}, 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\}.$$

Alors pour toute fonction f continue sur A on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta)} f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)\, r\,dr\,d\theta.$$

Démonstration. Si on note

$$A_{]-\pi,\pi[} = \{(r\cos\theta, r\sin(\theta)), \theta \in]-\pi,\pi[, 0 \leqslant r < \rho(\theta)\}$$

alors on a [1]

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_{]-\pi,\pi[}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Φ réalise alors un C^1-difféomorphisme de $\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi,\pi[\,|\, r \leqslant \rho(\theta)\}$, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de changement de variables. □

Exemple 10.6. L'aire du disque de rayon R peut être obtenue par le calcul suivant :

$$\operatorname{Aire}(D_R) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\theta = \pi R^2.$$

On pourra également utiliser une variante de cette dernière proposition où θ ne couvre qu'une partie de l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

Remarque 10.7. On a un résultat analogue à la proposition précédente lorsque A est un domaine de la forme

$$A = \{(r\cos\theta, r\sin(\theta), \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\}.$$

Dans ce cas on obtient

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\rho(\theta)} f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)\, r\,dr\,d\theta.$$

1. on ne détaille pas ce point, on peut par exemple décomposer A en $A_{[-\pi,0]} \cup A_{[0,\pi]}$. $A_{[-\pi,0]}$ et $A_{[0,\pi]}$ sont des domaines simples, et on utilise le fait qu'on ne change pas la valeur d'une intégrale en enlevant des parties du bord

10.2.2 Coordonnées cylindriques

Dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe.

Proposition 10.8. *Soit V une partie simple de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et une fonction $\rho : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue, 2π périodique par rapport à la première variable, et vérifiant*

$$V = \{(r\cos\theta, r\sin(\theta), z), \theta \in \mathbb{R}, z \in [a, b], 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta, z)\}$$

Alors pour toute fonction f continue sur V on a

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta,z)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r\, dr\, d\theta\, dz.$$

Démonstration. Pour $z \in [a, b]$ on note $T(z) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$. Alors on a

$$T(z) = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z), \theta \in \mathbb{R}, 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta, z)\}.$$

Puisque

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\iint_{T(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz,$$

il suffit de passer en coordonnées polaires sur chaque tranche $T(z)$. □

10.2.3 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes qui présentent une symétrie autour du centre du repère.

Proposition 10.9. *L'application*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r, \theta, \varphi) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un C^1-difféomorphisme. En outre pour tout $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\det \operatorname{Jac} \Phi(r, \theta) = r^2 \cos(\varphi).$$

Démonstration. On vérifie le calcul du jacobien. Pour $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\begin{aligned} \det \operatorname{Jac} \Phi(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= r^2 \big(\sin(\varphi) \times \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi) \times \cos^2(\varphi) \big) \\ &= r^2 \cos(\varphi) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Exemple 10.10. On retrouve facilement le volume de la boule de rayon R :

$$\operatorname{Vol}(B_R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r^2 \cos(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

10.3 Exercices

***Exercice* 10.1.** En passant aux coordonnées polaires, calculer l'aire du domaine

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 3 \text{ et } y > 0 \right\}$$

(et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu).

***Exercice* 10.2.** On note $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$. Calculer

$$\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

***Exercice* 10.3.** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

***Exercice* 10.4.** On considère le domaine $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2x < 0 \right\}$. Calculer

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

***Exercice* 10.5.** Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le domaine

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Calculer

$$\int_D (2x^3 - y)\, dx\, dy.$$

***Exercice* 10.6.** Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x,y) \mapsto (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$ sur le domaine $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1 \right\}$, où $b > a > 0$. On pourra effectuer le changement de variables $u = xy$, $v = y^2 - x^2$.

***Exercice* 10.7.** **1.** Pour $R > 0$, calculer

$$I_R = \int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

où $B(0,R)$ désigne la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R. Montrer que I_R admet une limite que l'on explicitera quand R tend vers $+\infty$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

***Exercice* 10.8.** Calculer $\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$, où D est l'ensemble des points de $[0,1]^2$ qui ne sont pas dans le disque de centre (0,0) et de rayon 1.

***Exercice* 10.9.** Soit $a > 0$ et B la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^3$. Calculer

$$\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\, dx\, dy\, dz.$$