Algèbre linéaire et bilinéaire

Formes Hermitiennes - Espaces Hermitiens

1 Formes hermitiennes et formes quadratiques hermitiennes

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition. (i) On rappelle qu'une application u de E dans E est dite *linéaire* si pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \quad \text{et} \quad u(\lambda x) = \lambda x.$$

(ii) On dit qu'une application u de E dans E est *semi-linéaire* si pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \quad \text{et} \quad u(\lambda x) = \overline{\lambda} x.$$

On note que cette dernière définition n'a de sens que pour un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Définition. On appelle *forme hermitienne* sur E une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- φ est linéaire à gauche et semi-linéaire à droite : pour $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\varphi(\lambda x + x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$$

et

$$\varphi(x, \lambda y + y') = \overline{\lambda} \varphi(x, y) + \varphi(x, y').$$

- φ vérifie la propriété de symétrie hermitienne : pour tous $x, y \in E$ on a

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}.$$

Remarque. Pour $x \in E$ on a $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$ et donc

$$\varphi(x, x) \in \mathbb{R}.$$

Définition. On appelle *forme quadratique hermitienne* une application $q : E \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme hermitienne φ pour laquelle on a

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

Il est important de noter qu'une forme quadratique hermitienne est à valeurs réelles. En outre pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x).$$

Proposition. *Soit φ une forme hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée. Alors pour $x, y \in E$ on a*

$$\operatorname{Re}\big(\varphi(x,y)\big) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2} = \frac{q(x+y)-q(x-y)}{4},$$

$$\operatorname{Im}\big(\varphi(x,y)\big) = \frac{q(x+iy)-q(x)-q(y)}{2} = \frac{q(x+iy)-q(x-iy)}{4}$$

et donc

$$\varphi(x,y) = \frac{q(x+y)-q(x-y)+iq(x+iy)-iq(x-iy)}{4}.$$

Cela prouve en particulier que la forme quadratique hermitienne q est associée à une unique forme hermitienne φ, appelée forme polaire de q.

Exemples.
- L'application $z \mapsto |z|^2$ est une forme quadratique hermitienne sur $E = \mathbb{C}$, associée à la forme hermitienne
$$(z,w) \mapsto z\overline{w}.$$
- L'application $(z_1,\dots,z_n) \mapsto |z_1|^2+\dots+|z_n|^2$ est une forme quadratique hermitienne sur $E = \mathbb{C}^n$, associée à la forme hermitienne
$$\big((z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\big) \mapsto z_1\overline{w_1}+\dots+z_n\overline{w_n}.$$
- Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$. L'application $(z_1,\dots,z_n) \mapsto \alpha_1|z_1|^2+\dots+\alpha_n|z_n|^2$ est une forme quadratique hermitienne sur $E = \mathbb{C}^n$, associée à la forme hermitienne
$$\big((z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\big) \mapsto \alpha_1 z_1\overline{w_1}+\dots+\alpha_n z_n\overline{w_n}.$$
On observe que ce n'est plus le cas si les coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ne sont pas réels.
- L'application qui à une fonction f continue de [0,1] dans $\mathbb{C}$ associe
$$\int_0^1 |f(t)|^2\,dt$$
est une forme quadratique hermitienne sur $E = C^0([0,1],\mathbb{C})$. Sa forme polaire est
$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$
- Soit α une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application qui à une fonction f continue de [0,1] dans $\mathbb{C}$ associe
$$\int_0^1 \alpha(t)\,|f(t)|^2\,dt$$
est une forme quadratique hermitienne sur $E = C^0([0,1],\mathbb{C})$.

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que la matrice A est *hermitienne* si ${}^tA = \overline{A}$. Notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ cela signifie que $a_{j,i} = \overline{a_{i,j}}$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Alors l'application*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C} \\ (X,Y) & \mapsto & {}^tXA\overline{Y} \end{array} \right.$$

est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.

Proposition-Définition. *On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient φ une forme hermitienne, q la forme quadratique hermitienne associée et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle matrice de φ (ou de q) dans la base e la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a*

$$a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j).$$

1. *La matrice A est hermitienne.*
2. *Soient $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors on a*

$$\varphi(x, y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i \overline{y_j} = {}^t X A \overline{Y}$$

3. *Si e' est une autre base de E, P est la matrice de passage de la base e à la base P et A' est la matrice de φ dans la base e', alors on a*

$$A' = {}^t P A \overline{P}.$$

Remarque. Avec les notations précédentes on a

$$q(x) = \sum_{j=1}^n a_{j,j} |x_j|^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2 \operatorname{Re}\left(a_{i,j} x_i \overline{x_j}\right).$$

En outre les coefficients diagonaux $a_{j,j}$, $j \in [\![1, n]\!]$, sont réels.

Définition. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient φ une forme hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée.

(i) On appelle *rang* de φ le rang de la matrice de φ dans n'importe quelle base de E.

(ii) On dit que φ (ou q) est *non-dégénérée* si φ est de rang n.

Définition. (i) On dit que q est positive si $q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

(ii) On dit que q est négative si $q(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in E$.

(iii) On dit que q est définie positive si $q(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

(iv) On dit que q est définie négative si $q(x) < 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

2 Orthogonalité

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, φ est une forme hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée.

Définition. (i) On dit que les vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si $\varphi(x, y) = 0$ (on remarque que $\varphi(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(y, x) = 0$).

(ii) On dit que x est isotrope si $q(x) = 0$ (c'est-à-dire si x est orthogonal à lui-même).

(iii) On dit qu'une famille de vecteurs est *orthogonale* si ses éléments sont deux à deux orthogonaux.

(iv) On appelle *noyau* de q (ou de φ) l'ensemble des $x \in E$ tels que

$$\forall y \in E, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

On observe que le noyau de q est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. On suppose que E est de dimension finie. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale. Alors la base e est orthogonale pour q si et seulement si la matrice de q dans la base e est diagonale, si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{j=1}^{n} \left|e_j^*(x)\right|^2 .$$

Théorème 2.1. *On suppose que E est de dimension finie. Alors il existe une base e de E orthogonale pour q.*

Remarque 2.2. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base donnée par le théorème. Si pour $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $q(e_j) \neq 0$ on remplace e_j par $e_j / \sqrt{|q(e_j)|}$, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de q est diagonale avec uniquement des coefficients -1, 0 et 1.

Théorème (Réduction de Gauss)**.** *On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Il existe $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et des formes linéaires $l_1, \dots, l_k$ sur E tels que*

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left|l_j(x)\right|^2 .$$

Ce résultat peut être vu comme une conséquence de l'existence d'une base orthogonale. On peut aussi en donner une preuve constructive directe, que l'on illustre sur des exemples.

Exemples. Cas où il y a un terme en carré : On considère sur $\mathbb{C}^3$ la forme quadratique hermitienne

$$q : (z_1, z_2, z_3) \mapsto z_1\overline{z_1} + 3z_2\overline{z_2} - z_3\overline{z_3} + iz_1\overline{z_2} - iz_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_3} - z_3\overline{z_1} + 2iz_2\overline{z_3} - 2iz_3\overline{z_2}.$$

Pour $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ on a

$$\begin{aligned}
q(z_1, z_2, z_3) &= \Big(|z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(iz_1\overline{z_2}) + 2\operatorname{Re}(-z_1\overline{z_3})\Big) + 3|z_2|^2 - |z_3|^2 + 2\operatorname{Re}(2iz_2\overline{z_3}) \\
&= \Big(|z_1 - iz_2 - z_3|^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2 - 2\operatorname{Re}(iz_2\overline{z_3})\Big) + 3|z_2|^2 - |z_3|^2 + 4\operatorname{Re}(iz_2\overline{z_3}) \\
&= |z_1 - iz_2 - z_3|^2 + 2|z_2|^2 - 2|z_3|^2 + 2\operatorname{Re}(iz_2\overline{z_3}) \\
&= |z_1 - iz_2 - z_3|^2 + 2\left|z_2 - \frac{iz_3}{2}\right|^2 - \frac{5|z_3|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Cas où il n'y a que des termes croisés : On considère sur $\mathbb{C}^3$ la forme quadratique hermitienne

$$q : (z_1, z_2, z_3) \mapsto 2\operatorname{Re}(iz_1\overline{z_2}) + 2\operatorname{Re}(-z_1\overline{z_3}) + 2\operatorname{Re}((1+i)z_2\overline{z_3})$$

Soit $(z_1, z_2, z_3) \in C^3$. On note $w_1 = \frac{iz_1+z_2}{2}$ et $w_2 = \frac{iz_1-z_2}{2}$, de sorte que $\operatorname{Re}(iz_1\overline{z_2}) = |w_1|^2 - |w_2|^2$, $z_1 = -iw_1 - iw_2$ et $z_2 = w_1 - w_2$. On a alors

$$\begin{aligned}
q(z_1, z_2, z_3) &= 2|w_1|^2 - 2|w_2|^2 + 2\operatorname{Re}((1+2i)w_1\overline{z_3}) - 2\operatorname{Re}(w_2\overline{z_3}) \\
&= 2\left|w_1 + \left(\frac{1}{2} - i\right)z_3\right|^2 - \frac{5}{2}|z_3|^2 - 2\left|w_2 + \frac{z_3}{2}\right|^2 + \frac{|z_3|^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}|iz_1 + z_2 + (1-2i)z_3|^2 - \frac{1}{2}|iz_1 - z_2 + z_3|^2 - 2|z_3|^2 .
\end{aligned}$$

3 Signature d'une forme quadratique

On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une forme quadratique hermitienne q sur E et on note φ sa forme polaire.

Proposition-Définition. *Il existe un unique couple (p, m) d'entiers vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale alors

(ii) Si les formes linéaires $l_1, \ldots, l_k$ (avec $k \in \mathbb{N}$) sont linéairement indépendantes et telles que pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \alpha_1 |l_1(x)|^2 + \cdots + \alpha_k |l_k(x)|^2$$

(réduction de Gauss), alors parmi les k coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ p sont strictement positifs et m sont strictement négatifs.

Le couple (p, m) est alors appelé signature de la forme quadratique q.

Proposition. *Soit (p, m) la signature de q. Alors*

(i) le rang de q est $p + m$,

(ii) q est non-dégénérée si et seulement si $p + m = n$,

(iii) q est positive si et seulement si $m = 0$,

(iv) q est définie positive si et seulement si $(p, m) = (n, 0)$,

(v) q est négative si et seulement si $p = 0$,

(vi) q est définie négative si et seulement si $(p, m) = (0, n)$.

4 Espaces hermitiens

On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une forme quadratique hermitienne q sur E et on note φ sa forme polaire.

Définition. Si q est définie positive alors on dit que sa forme polaire φ est un produit scalaire hermitien. Dans ce cas on note souvent $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ pour tous $x, y \in E$.

Définition. On appelle espace hermitien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien.

Exemple. $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire $\varphi : ((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)) \mapsto z_1\overline{w_1} + \cdots + z_n\overline{w_n}$ est un espace hermitien. φ est le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$.

A partir de maintenant on suppose que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace hermitien.

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tout $(x, y) \in E^2$ on a*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

En outre il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Pour la démonstration on pourra étudier les fonctions $t \mapsto \langle x + ty, x + ty \rangle$ et $t \mapsto \langle x + iy, x + iy \rangle$.

Définition. On appelle norme hermitienne sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

(i) pour $x \in E$, $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ (séparation),

(ii) pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$ (homogénéité),

(iii) pour tous $x, y \in E$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Proposition. *L'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ définit une norme sur E.*

Proposition (Théorème de Pythagore). *(i) Pour $x, y \in E$ on a*

$$\langle x, y\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

(ii) Si la famille $(x_1, \dots, x_k)$ de vecteurs de E est orthogonale, alors

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2 .$$

Proposition. *Une famille orthogonale de E est libre.*

Définition. On dit d'une famille de vecteurs de E qu'elle est orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont de norme 1.

Proposition. *E admet des bases orthonormées.*

Proposition 4.1. *Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors pour tous $x, y \in E$ on a*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \, e_j$$

et

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \, \overline{\langle y, e_j\rangle}.$$

En particulier

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2 .$$

Proposition-Définition (Supplémentaire orthogonal). *Soit F un sous-espace de E. On note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs à tout vecteur de F :*

$$F^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in E, \langle x, y\rangle = 0\} .$$

C'est un sous-espace vectoriel de E. En outre F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E et $(F^\perp)^\perp = F$.

Proposition-Définition. *Soit F un sous-espace de E. On appelle projection orthogonale sur F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$. Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormée de F (avec $k = \dim(F)$) alors pour tout $x \in E$ on a*

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j\rangle \, e_j.$$

En outre $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$.

5 Endomorphismes d'un espace hermitien

Proposition-Définition (Adjoint d'un endomorphisme)**.** *Soit $u \in L(E)$. Alors il existe une unique application u^* de E dans E tel que*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle .$$

En outre $u^* \in L(E)$. u^* est appelé l'endomorphisme adjoint de u.

Proposition. *(i) L'application*

$$\Phi : \begin{cases} L(E) & \to & L(E) \\ u & \mapsto & u^* \end{cases}$$

est semi-linéaire (en particulier on a $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$.

(ii) Pour tout $u \in L(E)$ on a $(u^*)^* = u$.

(iii) On a $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$.

(iv) Pour $u, v \in L(E)$ on a $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

(v) Si u est inversible alors u^* est inversible et on a $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

(vi) Pour $u \in L(E)$ on a $\ker(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp$.

Proposition. *Soit $u \in L(E)$ et e une base orthonormée de E. On note A et A^* les matrices de u et u^* dans la base e. Alors on a*

$$A^* = {}^t\overline{A}.$$

Remarque. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $x, y \in \mathbb{C}^n$ on a pour le produit scalaire hermitien usuel de $\mathbb{C}^n$:

$$\langle Ax, y \rangle = \left\langle x, {}^t\overline{A} y \right\rangle .$$

Lemme. *Soient $u \in L(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.*

Définition. (i) Soit $u \in L(E)$. On dit que u est auto-adjoint (ou hermitien) si $u^* = u$. On dit que u est anti-hermitien si $u^* = -u$.

(ii) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que A est hermitienne si ${}^t\overline{A} = A$. On dit que A est anti-hermitienne si ${}^t\overline{A} = -A$.

Proposition-Définition. *Soit $u \in L(E)$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

(ii) $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

(iii) $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

(iv) u est un isomorphisme de E et son inverse est u^*.

Si ces conditions sont vérifiées alors on dit que u est une isométrie (vectorielle) de E. L'ensemble des isométries de E est noté $U(E)$.

Proposition-Définition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ muni de son produit scalaire hermitien usuel. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) ${}^tA\overline{A} = I_n$.

(ii) A est inversible d'inverse ${}^t\overline{A}$.

(iii) $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $\|AX\| = \|X\|$.

(iv) $\forall X, Y \in \mathbb{C}^n$, $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

(v) $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

Si ces conditions sont vérifiées alors on dit que A est une matrice unitaire de degré n. L'ensemble des matrices unitaires de degré n est noté $U(n)$.

Définition. (i) Soit $u \in L(E)$. On dit que u est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

(ii) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que A est normale si ${}^t\overline{A}A = A\,{}^t\overline{A}$.

Remarque. Les endomorphismes hermitiens, anti-hermitiens et les isométries sont en particulier des endomorphismes normaux.

Théorème (Réduction des endomorphismes normaux)**.** *Soit E un espace hermitien et u en endomorphisme normal de E. Alors il existe une base orthonormée e de E constituée de vecteurs propres pour u. En particulier u est diagonalisable.*

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de E. Le résultat est clair si $n = 1$. On suppose maintenant le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$ ($n \geqslant 2$). Puisque le polynôme caractéristique de u est scindé, u admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. On note $F = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Si $F = E$, il suffit de considérer n'importe quelle base orthonormée de E. On suppose maintenant que ce n'est pas le cas. Puisque u et u^* commutent, le sous-espace propre F de u est stable par u^*, et donc $F^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$. Puisque $(u|_{F^\perp})^* = u^*|_{F^\perp}$, la restriction $u|_{F^\perp}$ est en endomorphisme normal de $F^\perp$. Puisque $\dim(F^\perp) \in [\![1, \dim(F) - 1]\!]$, il existe par hypothèse de récurrence une base orthonormée de $F^\perp$ constituée de vecteurs propres pour $u|_{F^\perp}$, et donc pour u. En concaténant cette base avec une base orthonormée de F on obtient bien une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres pour u. $\square$

Proposition. *(i) Les valeurs propres d'un endomorphisme hermitien sont réelles.*

(ii) Les valeurs propres d'un endomorphisme anti-hermitien sont imaginaires pures.

(iii) Les valeurs propres d'une isométrie sont de module 1.