# Un peu de langage mathématique.

L1 Spécial

Année 2015-2016

# Assertions : définition

**Definition**

Une assertion est une phrase syntaxiquement correcte, ayant un sens, et dont on peut dire sans ambuguïté si elle est vraie ou fausse.

Une assertion peut être écrite en langage courant ou en formule mathématique.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Il y a 34 personnes dans la salle.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

$$2 + 3 = 6$$

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Les nombres qui sont plus grands que 2.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*La capitale du Mozambique est Libreville.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Jacques a dit "Levez vous et faites le tour de la salle à cloche-pied".*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Il est né à Toulouse.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

$$x^2 > 0$$

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Tout le monde dans cette pièce est né à Toulouse.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Quelqu'un dans la pièce est né à Toulouse.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Pour tout $x$ réel on a $x^2 > 0$.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Il existe $x$ réel tel que $x^2 > 0$.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Quantificateurs

## Definition

- Le symbole $\forall$ signifie “pour tout” ou “pour n’importe quel”.
- Le symbole $\exists$ signifie “il existe”. Après le symbole $\exists$, on omet le “tel que”.

Comparez :

- $x^2 > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x.$$

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > y.$$

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x > y.$$

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > y.$$

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Importance de l'ordre des quantificateurs

Comparez les deux assertions suivantes :

A : *Il y a un chien qui aboie toutes les nuits.*

B : *Toutes les nuits, il y a un chien qui aboie.*

1. $A$ et $B$ sont équivalentes.
2. $A$ implique $B$ mais $B$ n'implique pas $A$.
3. $B$ implique $A$ mais $A$ n'implique pas $B$.
4. Aucune des deux assertions n'implique l'autre.

# Importance de l'ordre des quantificateurs

Comparez les deux assertions suivantes :

A : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x < y.$

B : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x < y.$

1. $A$ et $B$ sont vraies.
2. $A$ et $B$ sont fausses.
3. $A$ est vraie mais $B$ est fausse.
4. $A$ est fausse et $B$ est vraie

# Importance de l'ordre des quantificateurs

Comparez les deux assertions suivantes :

A : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x < y.$

B : $\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad x < y.$

1. $A$ et $B$ sont vraies.
2. $A$ et $B$ sont fausses.
3. $A$ est vraie mais $B$ est fausse.
4. $A$ est fausse et $B$ est vraie

# Importance de l'ordre des quantificateurs

Comparez les deux assertions suivantes :

A : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x < y.$

B : $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x < y.$

1. $A$ et $B$ sont vraies.
2. $A$ et $B$ sont fausses.
3. $A$ est vraie mais $B$ est fausse.
4. $A$ est fausse et $B$ est vraie

# Importance de l'ordre des quantificateurs

En fait :

- on peut toujours intervertir deux $\exists$ consécutifs,
- on peut toujours intervertir deux $\forall$ consécutifs,
- mais en général on ne peut pas intervertir un $\exists$ et un $\forall$.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, \quad x = yz.$$

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

$$\textit{Si } x \geqslant 0 \textit{ alors } \sqrt{x^2} = x.$$

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Implications et équivalences

## Definition

- Étant données deux assertions $A$ et $B$, la phrase "Si $A$ est vraie alors $B$ est vraie" est elle-même une assertion.
- Si l'assertion "Si $A$ alors $B$" est vraie, on dit que $A$ implique $B$ et on note

$$A \implies B.$$

- On dit que les assertions $A$ et $B$ sont équivalentes si $A$ implique $B$ et $B$ implique $A$. Dans ce cas on note

$$A \Longleftrightarrow B.$$

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Si* $1+1=3$ *alors le cheval blanc de Henri IV est noir.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Exemples d'équivalences

Parmi les assertions suivantes, laquelle est équivalente à

S'il pleut, elle prend son parapluie.

1. S'il pleut, elle ne prend pas son parapluie.
2. S'il ne pleut pas, elle ne prend pas son parapluie.
3. Il pleut et elle prend son parapluie.
4. Si elle ne prend pas son parapluie, il ne pleut pas.

# Exemples d'équivalences

Parmi les assertions suivantes, laquelle est équivalente à

S'il pleut, elle prend son parapluie.

1. S'il pleut, elle ne prend pas son parapluie.
2. S'il ne pleut pas, elle ne prend pas son parapluie.
3. Il pleut et elle prend son parapluie.
4. Si elle ne prend pas son parapluie, il ne pleut pas.

Attention à la subtilité entre implication et causalité. . .

# Assertions : exemples

Que pensez-vous de l'assertion suivante ?

*Si* $1+1 = 2$ *alors le cheval blanc de Henri IV est blanc.*

1. Elle est vraie.
2. Elle est fausse.
3. C'est bien une assertion mais je ne sais pas si elle est vraie ou fausse.
4. Ce n'est pas une assertion.

# Implications et équivalences

Une mère dit à son fils :

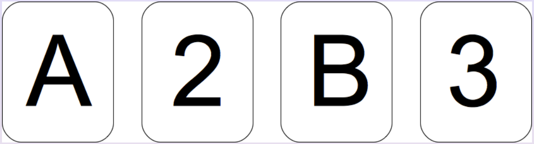
"Si tu n'es pas sage, tu n'auras pas de bonbon."

L'enfant se tient parfaitement bien, mais sa mère ne lui donne rien. Lui a-t-elle menti ?

1. Oui.
2. Non.

# Exemple d'implication

Si une carte comporte une voyelle sur une face, alors elle comporte un nombre pair sur l'autre face.

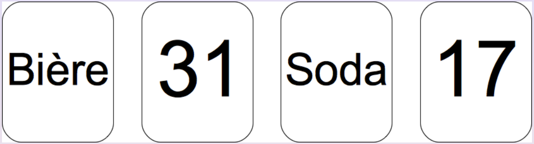



Vous devez retourner le minimum de carte pour savoir si la règle est vérifiée. Quelles-cartes retournez-vous ?

1. la A et la 2
2. la A et la 3
3. la B et la 2
4. la A, la B et la 3
5. toutes les cartes
6. aucune des réponses précédentes

# Exemple d'implication

Si une personne a moins de 18 ans, alors elle doit prendre un soda (sans alcool).




Vous devez interroger le minimum de personne pour savoir si la règle est vérifiée. Qui interrogez-vous ?

1. le personne de 17 ans et celle qui a pris un soda
2. le personne de 17 ans et celle qui a pris une bière
3. toutes les personnes
4. aucune des réponses précédentes

# Exemples d'équivalences

Soient $I$ et $J$ deux parties de $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall x \in I, \quad x^2 \in J.$$

Que peut-on en déduire ?

1. Si $x \notin I$ alors $x^2 \notin J$.
2. Il existe $x \in I$ tel que $x^2 \in J$.
3. Si $x^2 \notin J$ alors $x \notin I$.
4. Il existe $x \in \mathbb{R} \setminus I$ tel que $x^2 \in J$.
5. Aucune des conclusions précédentes n'est juste.

# Contraposée

- Soient $A$ et $B$ deux assertions. Alors l'implication

  *"Si $A$ est vraie alors $B$ est vraie"*

  est toujours équivalente à sa contraposée

  *"Si $B$ est fausse alors $A$ est fausse."*

- On note souvent $\text{non } A$ l'assertion qui est vraie si et seulement si $A$ est fausse. Ainsi

$$(A \implies B) \quad \text{si et seulement si} \quad (\text{non } B \implies \text{non } A).$$

# Exemple de contraposée

Quelle est la contraposée de l'assertion

*Si tu n'as pas joué, tu n'as pas gagné.*

1. Si tu n'as pas joué, tu n'as pas perdu.
2. Si tu as perdu, tu as joué.
3. Si tu as gagné, tu as joué.
4. Si tu avais joué, tu aurais gagné.
5. Si tu as joué, tu as gagné.

# Contraire d'une assertion

Pour montrer une implication, il est parfois plus simple de montrer sa contraposée. Pour cela il est important de bien identifier le contraire des assertions qui entrent en jeu...

Donner le contraire de l'assertion

*"Le cheval blanc de Henri IV est blanc".*

1. Le cheval blanc de Henri IV n'est pas un cheval.
2. Le cheval noir de Henri IV est noir.
3. Le cheval blanc de Henri IV n'est pas blanc.
4. Le cheval blanc de Henri IV est noir.
5. Henri IV n'a pas de cheval blanc.

# Contraire d'une assertion

Donner le contraire de l'assertion

*"Il a un oncle qui joue au rubgy au Stade Toulousain".*

1. Il n'a pas d'oncle.
2. Il a une tante qui joue au rugby au Stade Toulousain.
3. Il a un oncle qui ne joue pas au rugby au Stade Toulousain.
4. Aucun de ses oncles ne joue au rugby au Stade Toulousain.
5. Il a un oncle qui joue au rugby mais pas au Stade Toulousain.
6. Tous ses oncles jouent au rugby au Stade Toulousain.
7. Il a un oncle qui joue au Stade Toulousain mais pas au rugby.
8. Il y a un joueur de rugby du Stade Toulousain qui n'est pas son oncle.

# Contraire d'une assertion

Donner le contraire de l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0.$$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \leqslant 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 0.$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \leqslant 0.$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0.$

# Contraires quantificateurs

Étant donnée une assertion $A(x)$ qui dépend de $x$,

# Contraires quantificateurs

Étant donnée une assertion $A(x)$ qui dépend de $x$,

- le contraire de l'assertion

  *"il existe $x$ tel que $A(x)$ est vraie"*

  est

# Contraires quantificateurs

Étant donnée une assertion $A(x)$ qui dépend de $x$,

- le contraire de l'assertion

  *"il existe $x$ tel que $A(x)$ est vraie"*

  est

  *"pour tout $x$, $A(x)$ est fausse",*

# Contraires quantificateurs

Étant donnée une assertion $A(x)$ qui dépend de $x$,

- le contraire de l'assertion

  *"il existe $x$ tel que $A(x)$ est vraie"*

  est

  *"pour tout $x$, $A(x)$ est fausse"*,

- et le contraire de l'assertion

  *"pour tout $x$, $A(x)$ est vraie"*

  est

# Contraires quantificateurs

Étant donnée une assertion $A(x)$ qui dépend de $x$,

- le contraire de l'assertion

  *"il existe $x$ tel que $A(x)$ est vraie"*

  est

  *"pour tout $x$, $A(x)$ est fausse"*,

- et le contraire de l'assertion

  *"pour tout $x$, $A(x)$ est vraie"*

  est

  *"il existe $x$ tel que $A(x)$ est fausse"*.

# Contraire d'une assertion

Donner le contraire de l'assertion

*"Il y a un étudiant qui aura une note strictement inférieure à 13 à l'examen".*

1. Tous les étudiants auront une note strictement inférieure à 13 à l'examen.
2. Il y a une étudiante qui aura une note strictement inférieure à 13 à l'examen.
3. Tous les étudiants auront au moins 13 à l'examen.
4. Il y a un étudiant qui aura une note inférieure ou égale à 13 à l'examen.

# Contraire d'une assertion

Roger vous dit

"Toutes les bières sont dans le frigo."

Vous ouvrez le frigo, qui s'avère être vide. Pouvez-vous dire que Roger a menti ?

1. Oui.
2. Non.

# Contraire d'une assertion

Donner le contraire de l'assertion

$$x \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad x \leqslant -1.$$

1. $x > 1$ ou $x < -1$.
2. $x > 1$ et $x < -1$.
3. $x < 1$ ou $x > -1$.
4. $x < 1$ et $x > -1$.

# Contraire d'une assertion

Donner le contraire de l'assertion

*Il a pris du fromage et du dessert.*

1. Il n'a pas pris de fromage ou il n'a pas pris de dessert.
2. Il n'a pris ni fromage ni dessert.
3. Il a pris du fromage et pas de dessert, ou bien du dessert et pas de fromage.
4. Il a pris d'abord du dessert puis du fromage.

Attention au sens de "ou", qui est inclusif : l'assertion "$A$ ou $B$" est en particulier vraie dans le cas où $A$ et $B$ sont vraies (bien sûr elle est également vraie si l'une ou l'autre des assertions $A$ ou $B$ est vraie).