

TD n° 6

Polynômes et fractions rationnelles

**Exercice 6.1.** 1. Calculer le reste et le quotient de la division euclidienne de  $1 + X + X^2 + X^3$  par  $2 + X$ . En déduire une primitive de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 2}.$$

2. Écrire la division euclidienne de  $X^4 + 5X^3 - X^2 + 2X + 1$  par  $2X^2 - 3X + 1$ .
3. Écrire la division euclidienne de  $X^3 + 3X + 1$  par  $2X^2 - X + 1$ . En déduire le comportement asymptotique en  $\pm\infty$  de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 - x + 1}.$$

- Exercice 6.2.** 1. Déterminer les racines du polynôme  $P(X) = X^2 + X + 1$ .
2. Le polynôme  $P$  divise-t-il  $(X^8 + 1)^8 - X^8$  ?
  3. Le polynôme  $P$  divise-t-il  $(X^5 + 1)^5 - X^5$  ?

**Exercice 6.3.** Décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes  $X^3 - 2$  et  $X^{13} - 1$ .

- Exercice 6.4.** 1. Montrer que  $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$  est racine du polynôme  $P(X) = X^4 - \sqrt{3}X^3 + \sqrt{3}X - 1$ . Sans calcul, donner une autre racine complexe de ce polynôme.
2. Effectuer la division euclidienne de  $P(X)$  par  $Q(X) = X^2 - \sqrt{3}X + 1$ , puis en déduire les quatre racines de  $P$ .
  3. Écrire la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 6.5.** Déterminer l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$ .

**Exercice 6.6.** On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

On note  $Z$  l'ensemble des racines de  $P$ .

1. Montrer que si  $z \in Z$ , alors  $z^2 \in Z$  et  $(z - 1)^2 \in Z$ .
2. Montrer que si  $z \in Z$  alors  $|z|$  et  $|z - 1|$  sont dans  $\{0, 1\}$ .
3. En déduire que  $Z \subset \{0, 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}\}$ , puis que les seules racines possibles pour  $P$  sont 0 et 1.
4. Conclure.

**Exercice 6.7.** Pour chacune des fractions rationnelles  $F_j \in \mathbb{R}(X)$  suivantes, donner la décomposition en éléments simples puis une primitive de la fonction  $x \mapsto F(x)$  sur son domaine de définition :

$$F_1(X) = \frac{1}{(X + 1)(X - 1)(X - 2)(X + 3)}; \quad F_2(X) = \frac{1}{1 - X^4};$$
$$F_3(X) = \frac{X^2 - 3X + 4}{X^2 - 4X + 4}; \quad F_4(X) = \frac{X^2}{(X + 2)^4}.$$

Pour  $F_2$  on commencera par chercher la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ .

- Exercice 6.8.** 1. Décomposer dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P(X) = X^3 - 1$ .  
 2. En déduire que  $X^4 + X^2 + 1$  divise  $Q(X) = X^6 - 1$ .  
 3. Déterminer l'ensemble des racines complexes de  $Q$ . Les représenter graphiquement dans le plan complexe.  
 4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .  
 5. En déduire la factorisation de  $X^4 + X^2 + 1$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .  
 6. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{X^4 + X^2 + 1}$ . On pourra utiliser convenablement les points  $0, i$  et  $+\infty$ .

**Exercice 6.9.** Soit  $a > 0$ . Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}; \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + a^2)^2};$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}; \quad f_4 : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2};$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2}{x(x^2 + 1)^2}.$$

**Exercice 6.10.** Déterminer les décompositions en éléments simples dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  des fractions rationnelles

$$\frac{2X^5 + 4X^3 - 2X^2 + X - 1}{(X^2 + 1)^2 X^2}$$

et

$$\frac{2X^3 - 4X^2 + 2X - 1}{X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 5X + 2}.$$