TD n$^{\text{o}}$ 2

Équations différentielles

Exercice 2.1. **1.** Résoudre l'équation homogène

$$x' - 3x = 0. \tag{H}$$

2. On considère l'équation différentielle

$$x' - 3x = 3. \tag{E}$$

a. Trouver une solution particulière de l'équation.
b. En déduire toutes les solutions à valeurs réelles de (E).
c. Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = 0$

3. Mêmes questions avec l'équation

$$x' - 5x = e^{2t}.$$

4. Mêmes questions avec l'équation

$$x' - 5x = t - 1$$

(on pourra chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction polynômiale de degré 1).

$\rightsquigarrow$ **1.**

$$x_0 : t \mapsto Ae^{3t}$$

2.

$$x : t \mapsto Ae^{3t} - 1$$

3.

$$x : t \mapsto Ae^{5t} - \frac{1}{3}e^{2t}, \quad A = \frac{1}{3}$$

4.

$$x : t \mapsto Ae^{5t} - \frac{t}{5} + \frac{4}{25}, \quad A = -\frac{4}{25}$$

□

Exercice 2.2. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :
1. $x' + x = te^{-t}$ avec $x(0) = 1$.
2. $x' + x = (t^2 + 1)e^t$ avec $x(0) = 0$.

$\rightsquigarrow$
1.

$$x : t \mapsto Ae^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}, \quad A = 1$$

2.

$$x : t \mapsto Ae^{-t} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^t, \quad A = -\frac{3}{4}$$

□

Exercice 2.3. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $xy'(x) - y(x) = 0$ sur $]0, \infty[$ avec $y(1) = 2$;
2. $y'(x) - xy(x) = 0$.

$\rightsquigarrow$
1.

$$y_0 : x \mapsto Ax, \quad A = 2$$

2.

$$y_0 : x \mapsto Ae^{\frac{x^2}{2}},$$

□

Exercice 2.4. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $xy' + y = \frac{1}{1+x}$ sur $]0, +\infty[$;
2. $(1 + x)y' + 2y = x$ (préciser sur quel intervalle).
3. $y' - y\cos(x) = \cos(x)$ avec $y(0) = 1$;
4. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$;
5. $y' + (6t + \frac{1}{t})y = 1$ sur $]0, +\infty[$.
6. $(t + 1)y' + ty = t^2 - t + 1$ sur $] - 1, +\infty[$ (*indication : chercher une solution particulière sous forme polynomiale.*)

⇝ **1.**
$$y : x \mapsto \frac{A}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x}$$

2.
$$y : x \mapsto \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$$

3.
$$y : x \mapsto Ae^{\sin(x)} - 1, \quad A = 1$$

4.
$$y : x \mapsto Ae^{-x} + \ln(1 + e^x)e^{-x}$$

5.
$$y : t \mapsto \frac{Ae^{-3t^2}}{t} + \frac{1}{6t}$$

6.
$$y : t \mapsto A(1 + t)e^{-t} + t - 2$$

□

Exercice 2.5. (*) Résoudre
1. $2y' + y = xe^{-x}\cos x$
2. $y' - y\cos(x) = \sin(2x)$ avec $y(0) = 1$;

⇝ **1.**
$$\tilde{y}(x) = (Ax + B)\cos(x)e^{-x} + (Cx + D)\sin(x)e^{-x}$$

$$\tilde{y}'(x) = (-Ax + Cx + A - B + D)\cos(x)e^{-x} + (-Ax - Cx - B + C - D)\sin(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} -A + 2C = 1 \\ 2A - B + 2D = 0 \\ -2A + C = 0 \\ -2B + 2C - D = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = \frac{2}{5} \\ C = \frac{6}{25} \\ D = \frac{8}{25} \end{cases}$$

2.
$$y(x) = Ae^{\sin(x)} - 2\sin(x) + 2, \quad A = -2$$

□

Exercice 2.6. Résoudre les équations différentielles d'ordre 2 suivantes.
1. $y'' - 2y' + y = e^t(6t + 2)$;
2. $y'' - 4y' + 4y = 12t^2e^{2t}$.
3. $y'' - y = -6\cos(x) + 2x\sin(x)$;
4. $4y'' + 4y' + 5y = \sin(t)e^{t/2}$;
5. $(1 + t)^2y'' + (1 + t)y' - 2 = 0$ sur $] - 1, +\infty[$ *(indication : on pourra se ramener à une équation d'ordre 1)* ;

⇝ **1.** Voir cours
2.
$$(t^4 + At + B)e^{2t}$$

3.
$$Ae^t + Be^{-t} - x\sin(x) + 2\cos(x)$$

4.
$$y : t \mapsto A\cos(t)e^{-\frac{t}{2}} + B\sin(t)e^{-\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}\cos(t)e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{3}\sin(t)e^{\frac{t}{2}}$$

5.
$$(1+t)^2z' + (1+t)z - 2 = 0$$
$$z(t) = \frac{A}{1+t} + \frac{2\ln(1+t)}{1+t}$$
$$y(t) = A\ln(1+t) + \ln(1+t)^2 + C$$

□

Exercice 2.7. En faisant le changement d'inconnue $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, résoudre l'équation différentielle
$$t^2y'' - 2ty' + (2-t^2)y = 0.$$

$\rightsquigarrow$ $t^3(z''(t) - z(t)) = 0$, $z(t) = Ae^t + Be^{-t}$ pour $t > 0$, $z(t) = Ce^t + De^{-t}$ pour $t < 0$. $y(t) = Ate^t + Bte^{-t}$ pour $t > 0$, $y(t) = Cte^t + Dte^{-t}$ pour $t < 0$. En raccordant en 0 on obtient que $A = C$ et $B = D$. $\square$

Exercice 2.8. En utilisant la technique de séparation des variables (formelle au niveau L1), résoudre les équations différentielles non linéaires suivantes (en précisant les intervalles) :

1. $y' = y^2t$

2. $y' = e^{x+y}$

3. $y' = \frac{8y+4}{x^2-4}$.

Pour la dernière, on vérifiera que $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$.

$\rightsquigarrow$
$$-\frac{1}{\frac{t^2}{2}+C}$$
$$y = -\ln(C - e^x) \text{ pour } x < \ln(C), \quad \text{avec } C > 0.$$
$$\frac{y'}{2y+1} = \frac{4}{x^2-4}, \quad \frac{1}{2}\ln(|2y+1|) = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right) + c$$
au final
$$y = A\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$
(on peut obtenir le même résultat avec la technique habituelle) $\square$