TD n° 0

Langage mathématique

Exercice 0.1. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies, fausses ou ne sont pas des assertions correctes. Dans les deux premiers cas, justifier.

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad 0 < \eta < \varepsilon.$

(ii) $\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists \varepsilon^2 \in]0,1[, \quad 0 < \varepsilon^2 < \varepsilon.$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$

(iv) $\exists \eta > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad 0 < \eta < \varepsilon.$

(v) $\varepsilon < 0.$

(vi) $\forall \varepsilon > 0, \forall R > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon > 2R.$

Exercice 0.2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles peut-on déduire de cette information ? Justifier !

(i) $\forall \varepsilon > 1, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant 2\varepsilon.$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| < \varepsilon.$

(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$

(v) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$

(vi) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$

(vii) $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| > \varepsilon.$

Exercice 0.3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(i) La fonction f s'annule.

(ii) La fonction f est la fonction nulle.

(iii) La fonction f n'est pas constante.

(iv) La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

(v) La fonction f n'est pas surjective.

(vi) La fonction f admet un minimum.

(vii) La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.

(viii) La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 0.4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

(i) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad f(x) = c.$

(ii) $\forall x \in I, \quad f(x) = 0 \implies x = 0.$

(iii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \quad f(x) = y.$

(iv) $\forall x, y \in I, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$

(v) $\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$

(vi) $\forall x, y \in I, \quad x = y \implies f(x) = f(y)$.

Exercice 0.5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer les négations des assertions suivantes :

(i) $\forall x \in I, \quad f(x) = 0$.

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \quad f(x) = y$.

(iii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant M$.

(iv) $\forall x \in I, \forall y \in I, \quad f(x) \leqslant f(y) \implies x \leqslant y$.

(v) $\forall x \in I, \quad f(x) > 0 \implies x \leqslant 0$.

Exercice 0.6. Déterminer l'ensemble des réels a tels que

(i) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon$.

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon$.

(iv) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \quad |a| < \varepsilon$.

Exercice 0.7. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que le produit de n entiers impairs et impair.

Exercice 0.8. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 0.9. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $2^n \leqslant n!$?

Exercice 0.10. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$ on note

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$