

SECTION 1.1

MAIS POURQUOI A-T-ON INVENTÉ LES NOMBRES COMPLEXES ?

Le but de cette activité est de motiver l'introduction des nombres complexes. Pour cela, on suit grosso modo le cheminement historique. On en profitera également pour aborder deux thèmes qui seront vus dans les chapitres suivants, à savoir les fonctions continues et les polynômes.

On se donne comme objectif de résoudre une équation de degré 3 : étant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on cherche l'ensemble des réels x tels que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (1.1)$$

1. Vous savez déjà comment résoudre de façon systématique les équations d'ordre 2.
 - a. Déterminer l'ensemble des x réels vérifiant $x^2 - x + 3 = 0$.
 - b. Déterminer l'ensemble des x réels vérifiant $x^2 - x - 3 = 0$.

On considère maintenant une équation de la forme (1.1). Si $a = 0$ on est ramené à une équation d'ordre 2. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $a \neq 0$ (et quitte à diviser par a , on peut même supposer que $a = 1$). Tout l'enjeu est de trouver une solution. En effet, une fois qu'on a trouvé une solution on se ramène à nouveau à une équation d'ordre 2, que l'on sait résoudre.

2. Considérons par exemple l'équation

$$x^3 + 2x + 3 = 0. \quad (1.2)$$

- a. Chercher parmi les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$ lesquels sont solutions.
- b. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

- c. En déduire l'ensemble des solutions réelles de (1.2).
- d. Résoudre de la même façon l'équation

$$x^3 - 5x - 2 = 0.$$

3. On considère maintenant l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (1.3)$$

Cette équation n'a pas *a priori* de solution « évidente ». En effectuant une étude de la fonction $x \mapsto x^3 - 15x - 4$, déterminer tout de même le nombre de solutions de cette équation.

4. Dans les exemples précédents, on n'a considéré que des équations sans terme de degré 2. En fait on peut toujours se ramener à ce cas. En effet, montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $x \in \mathbb{R}$ est solution de (1.1) si et seulement si $y = x + b/3$ est solution de l'équation

$$y^3 + py + q = 0. \quad (1.4)$$

Le but de la suite est d'étudier une méthode permettant d'obtenir toutes les solutions d'une équation de la forme (1.4). Comme on l'a vu sur les exemples, il suffit de trouver une solution puis de se ramener à l'étude d'une équation de degré 2.

5. Montrer que (ou au moins essayer d'expliquer pourquoi) toute équation d'ordre 3 admet toujours au moins une solution réelle (on rappelle que ce n'est pas le cas pour les équations d'ordre 2).

On cherche maintenant une solution de (1.4).

6. Justifier que (ou au moins essayer d'expliquer pourquoi) la fonction $y \mapsto y^3$ est une *bijection* de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ sa *réciroque*.

7. On note

$$s = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Montrer que si $s \geq 0$ alors le réel

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{s} - \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{s} - \frac{q}{2}} \quad (1.5)$$

est solution de (1.4). Que se passe-t-il si $s < 0$?

8. La solution passe par les nombres complexes. L'idée est de faire des calculs dans un espace *a priori* artificiel \mathbb{C} qui vérifie les propriétés suivantes :

- L'ensemble \mathbb{C} contient l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.
- Il existe un élément de \mathbb{C} que l'on note i et tel que $i^2 = -1$ (on remarque que i appartient nécessairement à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).
- L'addition et la multiplication de \mathbb{R} s'étendent dans \mathbb{C} en une addition et une multiplication qui vérifient les mêmes règles de calculs.

Dans ce nouvel espace, il existe des nombres dont le carré vaut -1 : i et $-i$. Et si $s < 0$ on a

$$(i\sqrt{|s|})^2 = (-i\sqrt{|s|})^2 = s.$$

L'expression (1.5) suggère donc d'écrire

$$y = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Calculer $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$. Qu'a-t-on envie de tester comme solution potentielle à l'équation (1.3) ? Conclure.

Moralité : En passant par des méthodes utilisant des nombres qui n'existent pas, on a deviné une solution bien réelle à l'équation (1.3). Peu importe finalement comment on a obtenu cette solution, puisqu'on peut après coup vérifier par un simple calcul parfaitement rigoureux que c'est effectivement une solution. Cette méthode nous permet donc d'obtenir de façon rigoureuse toutes les solutions réelles d'une équation de degré 3. L'étude des équations de degré 3 n'est qu'un exemple. L'utilisation des nombres complexes sera en fait très utile pour une multitude de problèmes bien réels. Il est donc rentable de les définir et de les étudier de façon plus précise. En attendant, nous terminons par une formule de Jacques Hadamard :

La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du monde réel passe souvent par le domaine de l'imaginaire.