Université Paul Sabatier, **Licence L1PS**
Année 2015-2016

DM1

Nombres complexes, homographies.

Dans ce problème, on considère le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On identifiera $\mathcal{P}$ avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, via l'identification $(x, y) \mapsto x + iy$.

1 Équations de droites et de cercles dans $\mathbb{C}$.

1. Soient, $\vec{u}, \vec{w}$ des vecteurs d'affixes u, w. Justifier que :
a. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement si $u\overline{w} - \overline{u}w = 0$.
b. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $u\overline{w} + \overline{u}w = 0$.
2. Donner une équation de la forme $\overline{a}z + a\overline{z} = b$ pour une droite D passant par un point d'affixe z_0 et orthogonale à un vecteur d'affixe $u \neq 0$. Préciser les paramètres a, b en fonction de u, z_0. *Indication :* On pourra utiliser la question 1-b. *Attention :* "Équation de droite" signifie que z est sur la droite *si et seulement si* il vérifie l'équation.
3. Réciproquement, soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Justifier que les solutions de l'équation $\overline{u}z+u\overline{z} = b$ forment une droite dans le plan complexe.
4. Justifier que $b = 0$ si et seulement si la droite passe par 0.
5. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre d'affixe c et de rayon $R > 0$. Donner une équation caractérisant $\mathcal{C}$, en fonction de $z, \overline{z}, c, R$. *Indication :* L'équation cherchée ressemble à l'équation donnée à la question suivante. On pourra écrire que le carré de la distance au centre est égal à R^2.
6. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{R}$. Justifier que si $|a|^2 - b > 0$ alors

$$z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + b = 0$$

est l'équation d'un cercle. Préciser son centre et son rayon en fonction de a et b. Que se passe-t-il si $|a|^2 - b \leq 0$? Que peut on dire si $b = 0$?

2 Homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$.

On considère l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}}$ obtenu en ajoutant à l'ensemble des nombres complexes un élément, noté par convention ∞.

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$$

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $ad-bc \neq 0$. Une *homographie* h de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une application

$$h: \begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \begin{cases} a/c & \text{si } z=\infty \ (h(\infty)=\infty \text{ si } c=0.) \\ \infty & \text{si } z=-d/c \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On remarquera qu'un homographie peut se définir uniquement par l'expression $\frac{az+b}{cz+d}$ en utilisant les conventions suivantes : pour $m \in \mathbb{C}$, $\frac{m}{\infty}=0$ et $\frac{m}{0}=\infty$ si $m \neq 0$.

ATTENTION : La notation ∞ est purement conventionnelle, et ne correspond PAS à l'infini que vous avez peut-être vu au lycée. On n'utilisera donc RIEN DE PLUS à ce sujet que ce qui a été écrit ci-dessus.

Par convention, on appelle *droite* de $\widehat{\mathbb{C}}$ une droite de $\mathbb{C}$ auquel on a ajouté le point ∞, un *cercle* de $\widehat{\mathbb{C}}$ est un cercle de $\mathbb{C}$. *ATTENTION :* dans la suite, lorsqu'on parlera de droite de $\widehat{\mathbb{C}}$, il faudra bien distinguer la droite de $\mathbb{C}$, et le point ∞ ajouté.

Bien sûr, dans cette partie, on utilisera la partie 1.

1. Montrer que l'image d'une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ passant par 0 par l'homographie $z \to 1/z$ est une droite passant par 0.

2. Montrer que l'image d'une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ ne passant pas par 0 par l'homographie $z \to 1/z$ est un cercle.

3. Montrer que l'image d'un cercle passant par 0 par l'homographie $z \to 1/z$ est une droite ne passant pas par 0.

4. Montrer que l'image d'un cercle ne passant pas par 0 par l'homographie $z \mapsto 1/z$ est un cercle. Préciser son centre et son rayon en fonction du centre et du rayon du cercle initial.

5. Déduire des questions précédentes que l'image d'une droite ou d'un cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$ par une homographie est une droite ou un cercle. *Indication : Si $c \neq 0$, et $cz+d \neq 0$, on remarquera que* $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$.

6. On considère par la suite l'homographie définie par $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

a. Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ et de $i\mathbb{R}$ par h.

b. Dessiner l'image du premier quadrant $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z)>0 \text{ et } \mathrm{Im}(z)>0\}$ par h.