Chapitre 8

Théorème des fonctions implicites

On revient de ce chapitre sur les lignes de niveau d'une fonction. Plus précisément, notre but est montrer le théorème des fonctions implicites, qui permet de les paramétrer. Au moins localement. Et sous certaines hypothèses.

Lors du premier chapitre, on a introduit les lignes de niveau comme étant un moyen de visualiser les variations d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pourquoi leur accorder tant d'importance maintenant ? Tout simplement parce que bien souvent les ensembles qui apparaissent dans les problèmes qui nous intéressent sont définis par une équation de la forme $F(x) = 0$ pour une certaine fonction F. Par exemple le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre (0,0) et de rayon 1 peut être vu comme l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

C'est une ligne de niveau.

Paramétrer ce cercle signifie qu'on aimerait le voir comme le graphe d'une fonction régulière, disons au moins de classe C^1. Manifestement, le cercle n'est le graphe d'aucune fonction, ni d'une fonction $y = f(x)$, ni d'une fonction $x = f(y)$. Par contre le demi-cercle supérieur est le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1,1[$, le demi cercle inférieur est le graphe de la fonction $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1,1[$, le demi-cercle de droite peut être vu comme le graphe de la fonction $y \mapsto x = \sqrt{1-y^2}$ pour $y \in]-1,1[$, et de même pour le demi-cercle de gauche. Ainsi le cercle peut être vu comme le graphe d'une fonction au voisinage de n'importe lequel de ses points (voir figure 7.1). A condition tout de même de ne pas avoir peur de retourner le repère, car au voisinage du point (1,0) on ne pourra jamais voir le cercle comme le graphe d'une fonction qui exprime y en fonction de x.

Au début du cours on a introduit les lignes de niveau d'une fonction pour mieux comprendre la fonction en question. Ici la démarche est inverse. On va étudier la fonction F pour mieux comprendre l'une de ses lignes de niveau.

Théorème 8.1 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k avec $k \geqslant 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tel que $f(a, b) = 0$ et la différentielle partielle $D_y f(a, b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage $\mathcal{W}$ de b dans $\mathbb{R}^p$ et une application $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ de classe C^k tels que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ et*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{W}, \quad f(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \phi(x).$$

En outre on peut choisir $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de sorte que la différentielle $D_y f(x, y)$ est inversible pour tout $(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ et

$$d\phi(x) = -D_y f(x, \phi(x))^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x)).$$

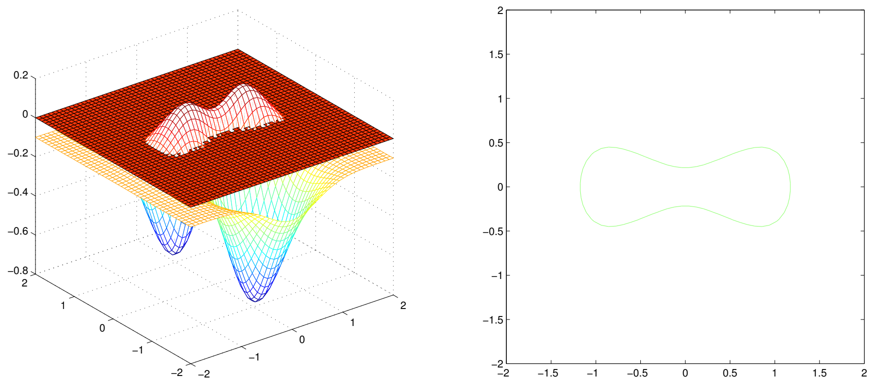


FIGURE 8.1 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto (0,2 + x^2 - 2y^2)e^{-2x^2-y^2} - 0,1$, coupé par le plan d'équation $z = 0$, ainsi que la ligne de niveau correspondante.

Ici $D_y f(a, b)$ est la différentielle de l'application $y \in \mathbb{R}^p \mapsto f(a, y) \in \mathbb{R}^p$ au point b. Au départ f est une fonction de $n + p$ variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si on fixe n variables, on obtient une fonction de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. La différentielle partielle $D_y f(a, b)$ est alors la différentielle de cette fonction au point b, les n premières variables étant fixées à $a = (a_1, \dots, a_n)$. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est

$$\operatorname{Jac}_y f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+p}}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{m+1}}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{m+p}}(a,b) \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}).$$

***Exercice* 8.1.** Ré-écrire cet énoncé proprement dans le cas où $m = p = 1$.

Heuristique. Si on oublie les restes d'ordre 2 ou plus on peut écrire

$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b)}_{=0} + d_x f(a,b)(x-a) + d_y f(a,b)(y-b) + \dots$$

On a alors

$$f(x,y) = 0 \quad \iff \quad y = b - d_y f(a,b)^{-1} \circ d_x f(a,b)(x-a) + \dots$$

C'est bien une formule donnant y en fonction de x.

Reste à rendre cette observation un peu plus rigoureuse. Pour cela on utilise le théorème de l'inversion locale :

Démonstration. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$ on pose $g(x, y) = (x, f(x, y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Cela définit une fonction de classe C^k sur $\mathcal{U}$. En outre on a

$$\det \operatorname{Jac} g(a,b) = \begin{vmatrix} I_m & 0_{m,p} \\ \operatorname{Jac}_x f(a,b) & \operatorname{Jac}_y f(a,b) \end{vmatrix} = \det \operatorname{Jac}_y f(a,b) \neq 0,$$

où I_m est la matrice identité de taille $m \times m$ et $0_{m,p}$ la matrice à m lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale. Il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{U}}$ de (a, b) dans $\mathcal{U}$ tel que g réalise un difféomorphisme de classe C^k de $\tilde{\mathcal{U}}$ sur son image. Soient $\tilde{\mathcal{V}}$ un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{W}$ un voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ tels que $\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W} \subset \tilde{\mathcal{U}}$.

Comme $g(\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{m+p}$ contenant $(a, 0)$, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{V} \times \{0\} \subset g(\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W})$. Étant donné $x \in \mathcal{V}$ il existe donc un unique $y \in \mathcal{W}$ (qu'on note $\phi(x)$) tel que $(x, 0) = g|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}(x, \phi(x))$. Comme $(x, \phi(x)) = (g|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}})^{-1}(x, 0)$, ϕ est une fonction de classe C^k. Pour tout $x \in \mathcal{V}$ on a donc

$$f(x, \phi(x)) = 0.$$

En différentiant on obtient

$$D_x f(x, \phi(x)) + D_y f(x, \phi(x)) d\phi(x) = 0,$$

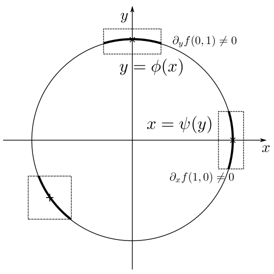
ce qui donne l'expression pour la différentielle de ϕ. □

Remarque 8.2. Il est fortement déconseillé de chercher à retenir la formule pour la différentielle de ϕ. Par contre il faut savoir qu'elle existe et comment la retrouver.

Exemple 8.3. On revient sur le cercle

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 - x^2 - y^2 = 0\right\}.$$

Alors on a $\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = 0\right\}$, où $f : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$ est de classe C^∞. Les dérivées partielles sont $\partial_x f : (x, y) \mapsto -2x$ et $\partial_y f : (x, y) \mapsto -2y$. La dérivée par rapport à y est non nulle en tout point de $\mathcal{C}$ sauf en (1,0) et (-1,0). Autour de tout point de $\mathcal{C}$ exceptés (1,0) et (-1,0) on peut effectivement voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant y en fonction de x. La dérivée par rapport à x est non nulle en tout point de $\mathcal{C}$ sauf en (0,1) et (0,-1). Et c'est effectivement autour de ces deux points qu'on ne peut pas voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant x en fonction de y.



C'est une bonne idée de bien avoir cet exemple du cercle en tête. Il peut par exemple arriver qu'on oublie quelle dérivée doit être non nulle pour pouvoir exprimer telle variable en fonction de telle autre. Il est bon de se remémorer le cercle et les quatre points pour lesquels on sait quelle dérivée est nulle et quelle variable peut être exprimée en fonction de l'autre.

Dans le cas où $m \neq p$, on peut aussi penser au fait que la différentielle partielle qui est supposée inversible est nécessairement une application entre espaces de mêmes dimensions.

Figure 8.2 – Théorème des fonctions implicites pour $f : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$.

8.1 Exercices

***Exercice* 8.2.** On considère l'équation

$$2xy - 2x + y - 2 = 0 \qquad (*)$$

1. Montrer qu'il existe une fonction φ sur un domaine $D_\varphi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \iff x \in D_\varphi \text{ et } y = \varphi(x).$$

2. Montrer qu'il existe une fonction ψ sur un domaine $D_\psi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \iff y \in D_\psi \text{ et } x = \psi(y).$$

3. Quel lien peut-on faire entre les fonctions φ et ψ ?

***Exercice* 8.3.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x,y) = x^2+y^2-1$. Montrer que pour x suffisament proche de 0 il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $f(x,y(x)) = 0$. Montrer, sans résolution explicite, que la fonction y ainsi définie au voisinage de 0 est dérivable et pour x proche de 0 :

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

***Exercice* 8.4.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

Soit $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0,y_0,z_0) = (0,0)$. Montrer qu'il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x_0) = (y_0,z_0)$ et $f(x,\varphi(x)) = (0,0)$ pour tout $x \in I$.

***Exercice* 8.5.** Décrire l'allure de l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$.

***Exercice* 8.6.** On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^3-2xy+2y^2-1$. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point (1,1) et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

***Exercice* 8.7.** On considère le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x^4 & + & y^3 & + & z^4 & + & t^2 & = & 0, \\ x^3 & + & y^2 & + & z^2 & + & t & = & 2, \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0. \end{array}\right.$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (0,-1,1,0) et une fonction $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), y(t))$ de classe C^1 au voisinage de 0 tels que $(x,y,z,t) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x,y,z) = \varphi(t)$.
2. Calculer la dérivée de φ en 0.

***Exercice* 8.8.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3,$$

puis la surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x,y,z) = 0$.
1. Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point (1,1,1).
2. Vérifier qu'au voisinage du point (1,1,1), la surface $\mathcal{S}$ est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x,y)$ où ϕ est une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de (1,1).
3. Écrire le développement limité de ϕ à l'ordre 2 au point (1,1).
4. Donner la matrice Hessienne de ϕ au point (1,1).
5. Quelle est la position de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangent au point (1,1).

***Exercice* 8.9.** Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'équation $(x-a)(b-x) + \varepsilon x^3 = 0$ admet trois solutions distinctes (qu'on note $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ avec $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$). Donner un développement asymptotique de x_1, x_2 et x_3 jusqu'à l'ordre $0(\varepsilon^2)$.

***Exercice* 8.10.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ est $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres réelles distinctes. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est proche de A_0, alors A possède également n valeurs propres réelles distinctes, et ces valeurs propres dépendent continuement de A.