Chapitre 2

Limites et continuité pour une fonction de plusieurs variables

Dans le chapitre précédent on a introduit les normes, qui jouent dans $\mathbb{R}^n$ le rôle que joue la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Cela nous permet d'introduire maintenant la notion de limite pour une suite de points dans $\mathbb{R}^n$. La définition est exactement de la même que dans $\mathbb{R}$, en remplaçant simplement la valeur absolue par une norme. De la même façon, on pourra ensuite adapter à des fonctions de $\mathbb{R}^n$ la notion de continuité puis, modulo quelques difficultés supplémentaires, la notion de dérivabilité au chapitre suivant.

2.1 Limites dans $\mathbb{R}^n$

Définition 2.1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$. On dit que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers l et on note

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geqslant N, \quad \|x_m - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit x_m tend vers l si la quantité réelle $\|x_m - l\|$ tend vers 0 au sens usuel.

Sans surprise, on retrouve les même propriétés de base que pour la limite d'une suite réelle :

Proposition 2.2. *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.*

(i) Unicité de la limite. *Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, $l_1 \in \mathbb{R}^n$ et $l_2 \in \mathbb{R}^n$. Si $x_m \to l_1$ et $x_m \to l_2$ quand m tend vers $+\infty$, alors $l_1 = l_2$.*

(ii) Linéarité de la limite. *Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si*

$$x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} l_1 \quad et \quad y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} l_2,$$

alors

$$\lambda x_m + \mu y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \lambda l_1 + \mu l_2.$$

***Exercice* 2.1.** Démontrer la proposition 2.2 (ou au moins l'une des deux propriétés, la démonstration est la même que pour les limites dans $\mathbb{R}$).

La définition de la limite d'une suite dépend du choix d'une norme sur $\mathbb{R}^n$. Étant données deux normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^n$, il se peut a priori que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l pour la norme N_1 mais pas pour la norme N_2. Heureusement, cela ne peut pas se produire si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, et on a dit que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes. Ouf !

Proposition 2.3. *Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$. Alors on a*

$$N_1(x_m - l) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \iff \quad N_2(x_m - l) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$.

Définition 2.4. On dit que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall j, k \geqslant N, \quad \|x_j - x_k\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 2.5. *$\mathbb{R}^n$ est complet. Cela signifie que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ est convergente.*

Démonstration. Voir le cours d'approfondissements mathématiques. □

Maintenant qu'on a défini la notion de limite pour des suites dans $\mathbb{R}^n$, la notion de continuité s'étend sans problème à des fonctions de plusieurs variables. En outre, bon nombre des propriétés des fonctions continues connues pour les fonctions d'une variable seront encore valables ici.

2.2 Fonctions continues

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ et $\mathbb{R}^p$ d'une norme notée $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$. Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$.

On commence par définir la limite d'une fonction de plusieurs variables en un point :

Définition 2.6. Soit $a \in \mathcal{D}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. On dit que f tend vers l en a et on note

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \quad \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \delta \implies \|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^p} \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 2.7. De même que pour la limite d'une suite, la limite d'une fonction en un point ne dépend pas du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^p$, qui sont des espaces de dimensions finies. Dans la suite on notera simplement $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ ou $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$. Cela n'amènera pas d'ambiguïté, mais attention tout de même à ne pas s'y perdre !

Les définitions de continuité pour une fonction de plusieurs variables sont maintenant sans surprises :

Définition 2.8. Soit $a \in \mathcal{D}$.

(i) On dit que f est continue en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

(ii) On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

***Exercice* 2.2.** **1.** Montrer qu'une fonction constante est continue.
2. Montrer que l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ définit une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.9. *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit h une fonction continue de $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$.*

- *La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathcal{D}$ (l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).*
- *Si $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}$, alors fg est continue sur $\mathcal{D}$. Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors f/g est continue.*
- *Si $\mathcal{D}'$ contient l'image de g, alors la fonction $h \circ g$ est continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^m$.*

Comme pour la proposition 2.2, ce résultat se montre exactement comme pour une fonction d'une variable réelle, en remplaçant simplement les valeurs absolues par des normes.

On appelle fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ une application qui s'écrit comme une somme de termes qui sont eux-mêmes des produits de fonctions coordonnées. En langage mathématiques, c'est une fonction de la forme

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{|\alpha_1|+\dots+|\alpha_n| \leqslant N} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \in \mathbb{R}$ pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. Par exemples les fonctions suivantes sont polynômiales : $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^4 + x_1^3 x_2^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3^2$.

Une fraction rationnelle est une fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômiales.

Corollaire 2.10. *Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ est continue. Plus généralement toute fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est bien définie et continue sur ce domaine.*

On énonce maintenant le critère séquentiel pour la continuité en un point :

Proposition 2.11. *Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a la suite $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.*

Comme pour une fonction d'une variable réelle, cette propriété sert souvent à montrer qu'une fonction n'est pas continue.

Exemple 2.12. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(voir figure 2.2). La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. D'autre part on a

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0,0) \quad \text{et} \quad f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0 = f(0,0),$$

et pourtant f n'est pas continue en (0,0). En effet si on note $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors u_n tend vers $(0,0)$ mais $f(u_n) = 1/2$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Plutôt que d'utiliser des suites et la proposition 2.11, on peut préférer utiliser la composition de fonctions continues pour aboutir à la même conclusion : l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (t,t) \in \mathbb{R}^2$ est continue en 0, donc si f est continue en $(0,0) = \varphi(0)$ l'application $f \circ \varphi$ est continue en 0. Or $f(\varphi(0)) = 0$ et $f(\varphi(t)) = \frac{1}{2}$ pour tout $t \neq 0$, ce qui donne une contradiction et prouve par l'absurde que f n'est pas continue en (0,0).

⚠ C'est une erreur trop fréquente que de se contenter de vérifier la continuité des fonctions $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ pour prouver la continuité de f. On voit bien sur cet exemple que ce n'est malheureusement pas suffisant…

La proposition qui suit permet quant à elle de montrer efficacement la continuité d'une fonction en un point de $\mathbb{R}^2$:

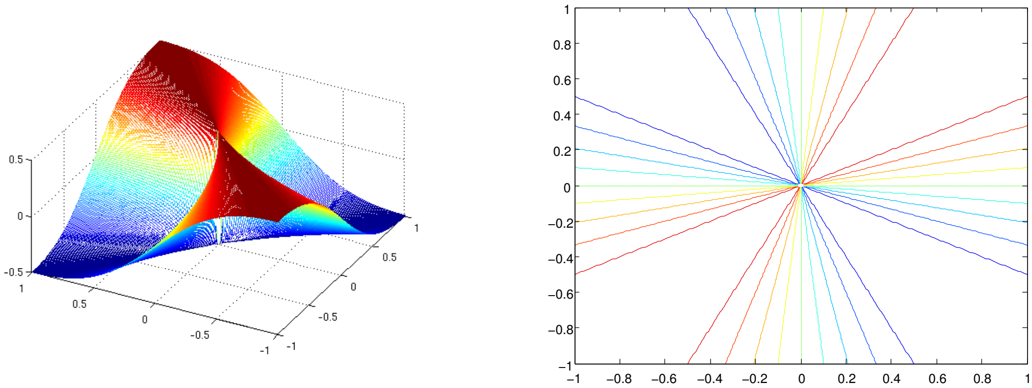

FIGURE 2.1 – Graphe et lignes de niveau pour le contre-exemple 2.12 : sur tout voisinage de (0,0) on trouve toutes les valeurs entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; en particulier f n'est pas continue.

Proposition 2.13. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en 0 et telle que pour tous $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a*

$$|f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon(r).$$

Démonstration. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Pour $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\|(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - (a_1, a_2)\|_2 = r.$$

On suppose que f est continue en a. Pour $r \geqslant 0$ on note

$$\varepsilon(r) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \geqslant 0$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ si $\|x - a\|_2 \leqslant \delta$, donc $\varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0$ si $r \leqslant \delta$. Cela prouve que $\varepsilon(r) \to 0$ quand $r \to 0$. Inversement, supposons qu'une telle fonction ε existe. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0$ si $r \leqslant \delta$. Soit alors $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x - a\|_2 \leqslant \delta$. Alors il existe $r \in [0, \delta]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $x = (a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin(\theta))$. On a alors

$$|f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0.$$

Cela prouve que f est continue en a. □

Exemple 2.14. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On étudie maintenant la continuité en (0,0). Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| = \frac{r^4 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2}{r^2} \leqslant r^2 \xrightarrow[r \to 0]{} 0.$$

Cela prouve que f est continue en (0,0).

La proposition suivante généralise le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un segment est continue et atteint ses bornes :

Proposition 2.15. *L'image d'un compact par une fonction continue est compacte.*

Corollaire 2.16. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

2.3 Exercices

***Exercice* 2.3.** Pour $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$x_m = \left(\frac{1}{1+m}, 1 + e^{-m}\right)$$

1. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

***Exercice* 2.4.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en (0,0) pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ possible) par

$$f_1(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \frac{xy}{x+y},$$
$$f_4(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_5(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad f_6(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$
$$f_7(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y), \qquad f_8(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad f_9(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

***Exercice* 2.5.** Les limites suivantes existent-elles :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \quad ?$$

***Exercice* 2.6.** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis déterminer si elles sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1 : (x,y) \mapsto \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \quad f_2 : (x,y) \mapsto \frac{y\sin(x+1)}{x^2-2x+1}, \quad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

***Exercice* 2.7.** Montrer la proposition 2.9.

***Exercice* 2.8.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le théorème des valeurs intermédiaires est vérifié : si les réels a et b sont dans l'image de f alors tous les réels entre a et b le sont également. Autrement dit, l'image de f est un intervalle de f. Question subsidiaire (dont la réponse sera donnée dans le cours d'approfondissement mathématiques) : dans quelle mesure ce résultat se généralise au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et son domaine n'est pas nécessairement $\mathbb{R}^n$ tout entier ?