

Stage de L3 - Introduction à la Théorie Spectrale

Thomas Cometx

27 octobre 2014

Introduction

Ce stage a été effectué en juin et juillet sous la direction de Julien Royer à l'Institut Mathématiques de Toulouse à l'Université Paul Sabatier. Il s'agissait d'une introduction à la théorie spectrale c'est à dire l'étude du spectre des opérateurs sur des espaces de Hilbert. La première partie du rapport traite de certaines propriétés des opérateurs dont on aura besoin pour la suite. La deuxième présente le Théorème Spectral qui généralise le théorème spectral sur les matrices hermitiennes. Dans la dernière, on traite le cas d'un exemple d'opérateur qui n'est plus auto-adjoint mais dissipatif.

Table des matières

1	Généralités sur les opérateurs	3
1.1	Opérateurs bornés	3
1.1.1	Définitions	3
1.1.2	Topologies sur les opérateurs bornés	3
1.1.3	Spectre d'un opérateur	3
1.1.4	Adjoints	3
1.1.5	Opérateurs compacts	4
1.2	Opérateurs non bornés	5
1.3	Opérateur dissipatif	5
2	Spectre des opérateurs auto-adjoints	6
2.1	Le théorème spectral	6
2.1.1	Mesures Spectrales	6
2.1.2	Intégration selon une mesure spectrale	6
2.1.3	Le théorème	7
2.2	Le calcul fonctionnel sur les opérateurs auto-adjoints	7
2.3	Les différentes notions de spectre	8
2.3.1	Décomposition associée à la mesure	8
2.3.2	Spectre essentiel	8
2.4	Perturbations relativement compactes du spectre	9
3	Un exemple non-autoadjoint sur les graphes quantiques	10
3.1	Définitions	10
3.2	Spectre	11
3.2.1	Premiers résultats	11
3.2.2	Outils pour la suite	12
3.3	Cas du graphe compact, déplacement des valeurs propres	13
3.4	Le théorème d'absorption limite	15

1 Généralités sur les opérateurs

1.1 Opérateurs bornés

1.1.1 Définitions

Un **opérateur** T sur un espace de Banach X est une application linéaire de X dans lui même.

Un **opérateur continu ou borné** est un opérateur tel que $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$. On note $L(X)$ l'espace vectoriel des opérateurs bornés sur X . [Bir]

1.1.2 Topologies sur les opérateurs bornés

On peut définir plusieurs topologies sur l'espace des opérateurs, on en utilisera principalement deux :

- La topologie **en norme d'opérateur**
- La topologie **faible** qui est la plus petite topologie rendant continues les applications $\alpha_{x,l}$ définies sur $L(X)$ par $\alpha_{x,l}(T) = l(T(x))$ pour $x \in X, l \in X^*$.

1.1.3 Spectre d'un opérateur

L' **ensemble résolvante** d'un opérateur T est l'ensemble $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - T \in GL(X)\}$. L'ensemble résolvante est un ouvert de \mathbb{C} . On définit le spectre $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$.

On définit alors la **résolvante** de T comme $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

Théorème 1 (Identité de la résolvante). *Soit T un opérateur sur un Banach X , on a :*

1. Pour λ et μ dans une même composante connexe de $\rho(T)$, $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T)$. De plus sur cette composante connexe, les résolvantes commutent.
2. $\lambda \rightarrow R_\lambda(T)$ est analytique en sur $\rho(T)$.

Preuve : Soit $\lambda \in \rho(T)$, on définit la série $R(z) = R_\lambda(T)(I + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - z)^i R_\lambda^n(T))$ qui converge en norme si $|z - \lambda| < \|R_\lambda(T)\|^{-1}$ et vérifie $R(z)(zI - T) = (zI - T)R(z) = I$ d'où $R(z) = R_z(T)$. L'égalité de (1) et la commutativité sont immédiates.

1.1.4 Adjoint

Si X est un espace de Hilbert, on rappelle que si $T \in L(X)$ alors $\exists ! V \in L(X)$ tel que $(T(x), y) = (x, V(y))$. On note alors $V = T^*$, c'est l'**adjoint de T** .

Définition (Opérateur autoadjoint, normal, unitaire). *On rappelle les définitions suivantes :*

1. T est **autoadjoint** si $T^* = T$

2. T est **normal** s'il commute avec son adjoint
3. T est **unitaire** si $TT^* = I$.

Théorème 2. Si T est auto-adjoint alors

1. $\sigma(T)$ est inclus dans \mathbb{R}
2. Les sous espaces propres de T sont orthogonaux.

1.1.5 Opérateurs compacts

Parmi les opérateurs bornés, on distingue les **opérateurs compacts**, et on note leur espace vectoriel $K(X)$. Ce sont opérateurs qui envoient les parties bornées de X sur des parties relativement compactes de Y .

Exemple Les **opérateurs de rang finis** sont compacts par le théorème de Riesz.

On a plusieurs propriétés et caractérisation intéressantes de la compacité des opérateurs :

Proposition. Si x_n (suite à valeur dans un Hilbert \mathcal{H}) converge faiblement vers x , et si T est compact, alors $T(x_n)$ converge vers Tx au sens de la norme.

Preuve La suite $\|x_n\|$ est bornée par le théorème de Banach-Steinhaus. On raisonne ensuite par l'absurde.

Proposition. Si T_n est une suite d'opérateurs compacts qui converge vers T pour la norme d'opérateur, alors T est compact. **Preuve** Par extraction diagonale.

Proposition. Si T ou S est compact, alors TS est compact. **Preuve** Immédiat.

Proposition. Sur un Hilbert séparable, T est compact si et seulement si il est la limite au sens de la norme d'opérateur d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Théorème 3 (Théorème Analytique de Fredholm). Soit D une domaine de \mathbb{C} et $f : D \rightarrow K(\mathcal{H})$ une fonction analytique, alors on a l'alternative suivante :

1. $\forall z \in D, (I - f(z))$ n'est pas inversible
2. $I - f(z)$ est inversible en dehors d'un ensemble discret de D , et cet inverse est une fonction méromorphe sur D dont les résidus sont de rang fini. De plus, $I - f(z)$ est toujours injective.

Corrolaire (Alternative de Fredholm). Soit T un opérateur compact sur \mathcal{H} , alors $I - T$ est inversible si et seulement si $I - T$ est injective.

Théorème 4 (Hilbert-Schmitt). Soit T un opérateur compact autoadjoint sur \mathcal{H} . Alors il existe une base de Hilbert de vecteurs propres que l'on peut ordonner de manière à ce que la suite des valeurs propres tende vers 0.

1.2 Opérateurs non bornés

Un opérateur non continu ne peut pas être défini sur \mathcal{H} tout entier, on cherche alors à le définir sur un **domaine** $D(T)$ qui ait des bonnes propriétés, comme par exemple qu'il soit dense.

Exemples

1. Sur \mathbb{R} , la dérivée seconde est définie sur H^2 .
2. (**Les Potentiels**) Sur $L^2(X)$, si V est une fonction de X dans \mathbb{C} , la multiplication par V dans $L^2(X)$ est définie sur $\{f \in L^2(X), \int_X V(x)f(x)dx < \infty\}$. Si V est finie presque partout, alors ce domaine est dense.

Définition (Opérateur fermé). *T est fermé si et seulement si son graphe est fermé.*

Si l'opérateur est fermé, on garde les mêmes définitions de **spectre, résolvente**. De plus si l'opérateur est défini sur un domaine dense, on conserve l'**identité de la résolvente**. On traitera maintenant avec des **opérateurs fermés dont le domaine de définition est dense**.

1.3 Opérateur dissipatif

On trouve beaucoup de définitions différentes pour ce qui est des opérateurs dissipatifs mais on peut en choisir une sans changer la nature des résultats. On prend donc celle de la référence [Roy10].

Définition (Opérateur dissipatif). *Soit $T \in L(\mathcal{H})$, T est **dissipatif** si et seulement si $\forall x \in \mathcal{H}, \text{Im}(Tx, x) \leq 0$. De plus T est maximal s'il n'admet pas d'extensions dissipatives non triviales.*

Proposition (Propriété spectrale des opérateurs dissipatifs). *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et T un opérateur dissipatif sur \mathcal{H} . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\forall z \in \mathbb{C}, z \notin \sigma(T)$
2. $\exists z \in \mathbb{C}, z \notin \sigma(T)$
3. T est maximal

C'est surtout l'équivalence entre (1) et (2) qui est intéressante.

Exemple Dans \mathbb{C}^n , si T est diagonalisable, on a équivalence entre le fait qu'un opérateur soit dissipatif et celui que ses valeurs propres soient toutes dans le demi-plan inférieur.

2 Spectre des opérateurs auto-adjoints

2.1 Le théorème spectral

2.1.1 Mesures Spectrales

On souhaite généraliser la réduction des endomorphismes en dimension finis à ceux des espaces de Hilbert quelconques, pour cela, on aura besoin de la notion de mesure spectrale.

Définition (Mesure spectrale). Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et (Y, A) un espace mesurable. On note $P(\mathcal{H})$ l'ensemble des projections orthogonales sur \mathcal{H} . Une mesure spectrale E est une application de Y dans $P(\mathcal{H})$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (σ - additivité) si (δ_n) est une famille finie ou dénombrable d'ensembles mesurables disjoints, alors $E(\cup_n \delta_n) = \sum_n E(\delta_n)$
- (complétude) $E(Y) = Id$

Proposition. En gardant les mêmes notations, les propriétés suivantes sont immédiates :

- $E(\delta_1)E(\delta_2) = E(\delta_2)E(\delta_1) = E(\delta_1 \cap \delta_2)$
- Si $\delta_1 \subset \delta_2$ alors $E(\delta_1) \leq E(\delta_2)$
- Si δ_n croît, alors $E(\cup_n \delta_n) = \lim E(\delta_n)$
- Si δ_n décroît, alors $E(\cap_n \delta_n) = \lim E(\delta_n)$

On peut alors définir les **mesures finies** suivantes :

1. $\mu_f(\delta) = (E(\delta)f, f)$
2. $\mu_{f,g}(\delta) = (E(\delta)f, g)$

2.1.2 Intégration selon une mesure spectrale

Comme pour la mesure de Lebesgue, on définit l'intégrale d'abord sur les fonctions simples bornées : si on écrit $\psi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\delta_i}$, alors $J_\psi = \int \psi dE =$

$$\sum_{i=1}^n a_i E(\delta_i).$$

Proposition. Il en découle les propriétés suivantes :

1. J est \mathbb{C} -linéaire
2. $J_{\psi\phi} = J_\phi J_\psi = J_\psi J_\phi$
3. $(J_\psi)^* = J_{\bar{\psi}}$
4. $J_1 = Id$
5. $(J_\psi f, g) = \int \psi d\mu_{f,g}$

6. $(J_\psi f, f) = \int \psi d\mu_f$
7. $\|J_\psi f\|^2 = \int |\psi|^2 d\mu_f$
8. $\|J_\psi\| = \|\psi\|_{+\infty}$ (le sup essentiel)

Par densité et convergence monotone, J s'étend naturellement à $L^\infty(Y, E)$, conservant ces propriétés. Il en suit que que l'application J est un morphisme de \mathbb{C}^* -algèbre entre $L^\infty(Y, E)$ et l'ensemble des opérateurs bornés sur \mathcal{H} .

On peut aussi définir J dans le cas d'opérateur non bornés, mais il faut ajouter quelques restrictions à l'ensemble de définition.

2.1.3 Le théorème

L'objection de cette partie de est montrer les résultats suivants :

Théorème 5 (Théorème Spectral). *Soit A un opérateur auto-adjoint sur un Hilbert \mathcal{H} , alors il existe une unique mesure spectrale E_A sur les boréliens de $\sigma(A)$ telle que*

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE_A(\lambda) \quad (1)$$

C'est une généralisation de la propriété sur les matrices hermitiennes en prenant $dE = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \delta_\lambda P_{\text{Ker}(A-\lambda I)}^\perp$.

2.2 Le calcul fonctionnel sur les opérateurs auto-adjoints

Soit A un opérateur auto-adjoint, on sait qu'on peut définir pour tout polynôme P l'opérateur $P(A)$. Si on note f_P la fonction polynomiale associée au polynôme P , on retrouve $P(A) = \int_{\sigma(A)} f_P(\lambda) dE_A(\lambda)$. C'est évident avec les propriétés de morphisme de l'application J . On peut généraliser ce genre de construction :

Définition (Image d'un opérateur auto-adjoint par une fonction borélienne). *On définit (quand elle existe) l'image d'un opérateur auto-adjoint A par une fonction borélienne f par $f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE_A(\lambda)$.*

Cette définition permet de généraliser un résultat connu sur les matrices hermitiennes positives :

Théorème 6 (Racine carrée d'un opérateur). *Soit A un opérateur auto-adjoint dont le spectre est strictement positif. Alors il existe un unique opérateur B tel que $B^2 = A$.*

Preuve Pour l'existence, il suffit de considérer $\int_{\sigma(A)} \sqrt{\lambda} dE_A(\lambda)$. L'unicité vient de la correspondance avec les mesures spectrales.

2.3 Les différentes notions de spectre

On a plusieurs décompositions de la mesure :

2.3.1 Décomposition associée à la mesure

Par le théorème de Radon-Nikodym, on peut décomposer toute mesure en trois parties : une partie discrète (somme dénombrable de mesures de Dirac) et une partie continue qui elle même se décompose en une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et une partie qui lui est étrangère.

- Spectre purement ponctuel : $\sigma_{pp}(T) = \{\lambda \in \sigma(T), \lambda \text{ est une valeur propre}\}$
- Spectre continu : $\sigma_c(T) = \sigma(T) - \sigma_{pp}(T)$
- Spectre absolument continu : C'est la partie du spectre dont les éléments x sont tels que μ_x est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
- Spectre singulier : σ_{sg} C'est la partie du spectre dont les éléments x sont tels que μ_x est étrangère à la mesure de Lebesgue tout en ne contenant pas d'atome.

Il existe aussi une décomposition de l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sg} \oplus \mathcal{H}_{ac}$ où les sous-espaces sont tels que leurs éléments y ont une mesure μ_x associée respectivement une somme de diracs, singulière, et absolument continue.

2.3.2 Spectre essentiel

- Spectre essentiel : $\sigma_{ess}(T) = \sigma_c(T) \cup \{\lambda \in \sigma_{pp}, \dim Ker(\lambda I - T) = \infty\}$
- Spectre discret : $\sigma_{disc}(T) = \sigma(T) - \sigma_{ess}(T)$

Caractérisations du spectre essentiel Il existe plusieurs caractérisations du spectre essentiel et du spectre continu intéressantes dans la pratique. On remarque d'ailleurs que $\sigma_{ess} = \sigma_c \cup \sigma_{pp, \infty}$.

Proposition. $\lambda \in \sigma_{ess}$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0, rg(E_T([\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]) = \infty$

Proposition. $\lambda \in \sigma_{ess}$ si et seulement si il existe une suite f_n bornée non compacte telle que $(T - \lambda I)f_n \rightarrow 0$

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, pour la suite, on pose
- $G = Ker(T - \lambda I)$
 - $T' = T|_{G^\perp}$

Lemme. Pour montrer des résultats intéressants sur le spectre essentiel, on aura besoin des résultats suivants :

1. $T' - \lambda I$ est borné inférieurement (par une constante $k > 0$)
2. $(T - \lambda I)D(T) = (T' - \lambda I)F$ et $(T' - \lambda I)$ est inversible.
3. σ_{ess} est fermé

Théorème 7. 1. Si $\lambda \notin \sigma_{ess}$ alors $(T' - \lambda I)^{-1}$ est continu

2. Si $(T' - \lambda I)^{-1}$ est continu et λ n'est pas une valeur propre de dimension infinie, alors $\lambda \notin \sigma_{ess}$

Théorème 8. 1. Si $\lambda \notin \sigma_{ess}$ alors $(T - \lambda I)D(T)$ est fermé

2. Si $(T' - \lambda I)D(T)$ est fermé et λ n'est pas une valeur propre de dimension infinie, alors $\lambda \notin \sigma_{ess}$

Corrolaire. Les résultats suivants découlent des caractérisations précédentes sur spectre essentiel :

- Si $T = (T_1 \oplus T_2)$ alors $\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T_1) \cup \sigma_{ess}(T_2)$
- Si T_1 est une extension finie de T , alors $\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T_1)$

Remarque Ces résultats sont prouvés avec soin dans [Gla].

Exemple Le Laplacien sur $L^2(\mathbb{R})$ On étudie l'opérateur $H : f \rightarrow -f''$ sur $D(H) = H^2(\mathbb{R})$.

La première remarque à faire est que l'opérateur est auto-adjoint donc que son spectre est inclus dans \mathbb{R} . On remarque aussi qu'il n'y a pas de valeur propre car les solutions de $f'' = -\lambda f$ ne sont jamais dans $L^2(\mathbb{R})$.

2.4 Perturbations relativement compactes du spectre

On souhaite étudier certaines opérations qui préservent le spectre essentiel, on en connaît une qui est la suivante :

Définition (Perturbation relativement compacte d'un opérateur). Soit A in $L(\mathcal{H})$, B est une **perturbation relativement compacte de A** si et seulement si BA est compact.

Proposition. Si B est une perturbation relativement compacte de A , alors $\sigma_{ess}(BA) = \sigma_{ess}(A)$ **Preuve** Voir [Ree].

Exemple : Perturbation du Laplacien par potentiel tendant vers zéro

On se donne un potentiel autoadjoint V tel que $V(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers zéro. Alors le potentiel V est une perturbation compacte du Laplacien, et donc $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H + V)$. Pour le prouver on montre que $V(H + I)^{-1}$ est compacte. En effet, si V est à support compact,

$$L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{(H+I)^{-1}} D(H) = H^2(\mathbb{R}) \cap H_0^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{V} H^2(O) \cap H_0^1(O)$$

où O est un ouvert borné. Donc si on prend une suite bornée de L^2 , elle est envoyée dans un espace de Sobolev sur un ouvert borné qui s'injecte de manière compacte dans $L^2(O)$ et donc dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc V est une perturbation compacte.

Plus généralement, si V n'est pas à support compact, on peut l'approcher en norme d'opérateur par $V_n = V1_{|x|<n}$, donc $V(H + I)^{-1}$ est la limite uniforme d'opérateurs compacts, donc compact. La propriété sur le spectre vient alors en appliquant le théorème précédent.

3 Un exemple non-autoadjoint sur les graphes quantiques

3.1 Définitions

Un graphe quantique est la donnée d'un graphe $\Gamma = (V, E)$ dont les arêtes ont des longueurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ce graphe est découpé en deux parties, une partie compacte Γ_0 , et une partie dite "de bord" Γ_1 . Les arêtes de Γ_0 sont considérées comme des intervalles $[0, l_e]$ et celles de Γ_1 comme \mathbb{R}_+ . On s'intéresse à l'étude du spectre de l'opérateur $H = -\Delta$ sur sur l'ensemble des fonctions de $L^2(\Gamma) = \oplus_{e \in E} L^2(e)$.

Notations Comme on va être amené à intégrer des fonctions sur ces graphes, on donne à chaque arête une "orientation" et on nomme e_+ et e_- les extrémités d'une arête e . Cette orientation n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale mais est utile pour faire des intégrations par parties. On utilisera la notation f_e pour parler de la fonction f vue comme une fonction de $[0, l_e]$ dans \mathbb{R} et $f'_{e, \text{sortant}}(v)$ pour parler de la dérivée sortante de f en le sommet v selon l'arête e .

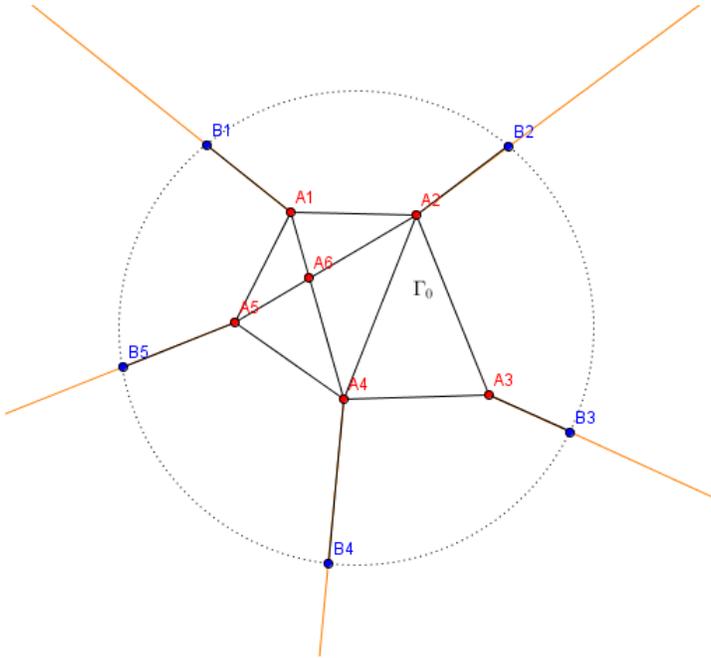


FIGURE 1 – Un Graphe Quantique

Pour que l'opérateur soit dissipatif, on le définit sur $D(H = -\Delta)$ qui est le sous ensemble des fonctions de $H^2(\Gamma)$ vérifiant les conditions suivantes :

- Degré 2 sur le bord (cela peut toujours être réalisé quitte à "décaler" le sommet de bord un peu plus loin sur l'arête)
- La continuité en les sommets
- Conditions de Neumann sur les sommets de bord (continuité de la dérivée)
- Conditions dissipatives sur les autres sommets : $\forall v \notin B, ia f(e) = \sum_{e \leftrightarrow v} f'_{e, \text{sortant}}(e)$,

avec $a \neq 0$.

C'est alors un opérateur dissipatif, non continu et défini sur un sous espace dense de $L^2(\Gamma)$. Si $a = 0$, alors l'opérateur est même auto-adjoint et son spectre est alors réel.

Proposition. *L'opérateur H ainsi défini est dissipatif.*

Preuve

$\forall f \in D(H)$,

$$\begin{aligned}
(Hf, f) &= - \sum_{e \in E} \int_{e-}^{e+} f'' \bar{f} \\
&= - \sum_{e \in E} (\overline{f_e(e+)}) f'_e(e+) - \overline{f_e(e-)} f'_e(e-) + \sum_{e \in E} \int_{e-}^{e+} f' \bar{f}' \\
&= - \sum_{e \in E} (\overline{f(e+)}) f'_{e, \text{sortant}}(e+) + \overline{f(e-)} f'_{e, \text{sortant}}(e-) + \|f'\|_2^2 \\
&= - \sum_{v \in V} \overline{f(v)} \sum_{e \leftrightarrow v} f'_{e, \text{sortant}}(v) + \|f'\|_2^2 \\
&= -ia \sum_{v \in V-B} \overline{f(v)} f(v) + \|f'\|_2^2 \\
&= -ia \sum_{v \in V-B} |f(v)|^2 + \|f'\|_2^2
\end{aligned}$$

La partie imaginaire de (Hf, f) est alors clairement négative, ce qui achève la démonstration.

On en déduit **que le spectre de H sera toujours dans le demi-plan inférieur** car le spectre non réel est ponctuel et, pour les opérateurs dissipatifs, on a équivalence entre le fait qu'il existe un élément du spectre dans le demi-plan supérieur et le fait que le demi plan supérieur soit entièrement contenu dans le spectre.

3.2 Spectre

3.2.1 Premiers résultats

Si le graphe est compact Si le graphe est compact, on peut montrer que H est à résolvante compacte, et donc que le spectre de H est discret et tend

vers l'infini (c'est une suite de valeurs propres associées à des espaces propres de dimension finie).

Si $V = B$ Le spectre est totalement essentiel, et est égal à \mathbb{R}_+ , car on étudie en fait simplement n copies du Laplacien sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Cas général On utilise les résultats sur le spectre essentiel, et le fait qu'ici $\sigma_{ess} = \sigma_c$, pour montrer que le spectre continu est en fait exactement \mathbb{R}_+ . On peut aussi avoir un spectre discret avec des valeurs propres de dimension finie.

3.2.2 Outils pour la suite

On va vouloir étudier plus précisément le comportement de la résolvante de H , pour cela on aura besoin des outils suivants :

H_0 : l'opérateur restreint au graphe compact On a déjà vu qu'il était à résolvante compacte, on note $\sigma(H_0) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$ son spectre et $R_0(\lambda)$ sa résolvante.

E : l'opérateur d'extension E est linéaire et va de \mathbb{C}^n dans $D(H_0)$ et est défini par $E(f)(x) = \sum_{v \in B} g_v(x)f(v)$ où g_v est une fonction plateau à support dans $[l_v - l_0/2, l_v]$ (l_0 est la plus petite longueur d'arête sur Γ_0).

N : La dérivée normale sortante Il va de l'ensemble des fonctions H^2 sur chaque arête du graphe compact, et va dans l'ensemble des fonctions de B dans \mathbb{C} . Il est défini par $N(f)(v) = f'(v)$ (dérivée croissante selon l'arête entrant dans v par Γ_0).

$\Lambda(\lambda)$: L'opérateur Dirichlet to Neumann C'est un endomorphisme de \mathbb{C}^n défini pour $\lambda \notin \sigma(H_0)$. Pour le définir, on pose le problème (P_λ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' - \lambda u = 0 \text{ sur chaque arête} \\ \text{conditions dissipatives à l'intérieur} \\ u|_B = \phi \end{array} \right.$$

Soit u une solution de ce problème, alors $\Lambda(\lambda)\phi = Nu$.

Lemme. 1. $\Lambda(\lambda) = NR_0(\lambda)(d^2/dx^2 + \lambda I)E$

2. $\Lambda(\lambda)$ est une application méromorphe de \mathbb{C} dans $L(\mathbb{C}^n)$ avec pour pôles les éléments de $\sigma(H_0)$

3. Quand elle est définie, $\Lambda(\lambda)$ est une "matrice dissipative".

Preuve

1. Soit $x \in \mathbb{C}^n$, on introduit $g = u - Ex$ où u est la solution du problème de Dirichlet avec x comme conditions aux bord. g vérifie les mêmes conditions aux bord que u sur les sommets internes et des conditions de Dirichlet triviales au bord. De plus, $Ng = Nu$ car $NE = 0$. Il s'en suit que $(H_0 - \lambda I)g = (d^2/dx^2 + \lambda)Ex$ et donc le résultat en appliquant NR_0 à l'égalité.
2. Cela découle de la première partie par composition en utilisant que $R_0(\lambda)$ a les propriétés voulues.
3. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ et u la solution au problème de Dirichlet associé, alors

$$\begin{aligned}
(u', u') &= - \sum_{e \in E} \int_{e^-}^{e^+} u' \bar{u}' \\
&= \sum_{e \in E} (\overline{u_e(e^+)}) u'_e(e^+) - \overline{u_e(e^-)} u'_e(e^-) - \int_{\Gamma} u \bar{u}'' \\
&= \sum_{e \in E} (\overline{u(e^+)}) u'_{e, \text{sortant}}(e^+) + \overline{u(e^-)} u'_{e, \text{sortant}}(e^-) + \bar{\lambda} \|u\|^2 \\
&= \sum_{v \in V} \overline{u(v)} \sum_{e \leftrightarrow v} u'_{e, \text{sortant}}(e) + \bar{\lambda} \|u\|^2 \\
&= \sum_{v \in B} \overline{u(v)} \sum_{e \leftrightarrow v} u'_{e, \text{sortant}}(e) + \sum_{v \in V-B} \overline{u(v)} \sum_{e \leftrightarrow v} u'_{e, \text{sortant}}(v) + \bar{\lambda} \|u\|^2 \\
&= (\Lambda(\lambda)x, x)_{\mathbb{C}^n} + ia \sum_{v \in V-B} |u(v)|^2 + \bar{\lambda} \|u\|^2
\end{aligned}$$

On déduit de cette égalité que $\text{Im}(\Lambda(\lambda)x, x)_{\mathbb{C}^n} = -a \sum_{v \in V-B} |u(v)|^2 + \text{Im}(\lambda) \|u\|^2$ et donc que $\text{Im}(\Lambda(\lambda)x, x)_{\mathbb{C}^n} \leq 0$, ce qui achève la preuve. De plus, le même calcul en faisant l'intégration par partie dans l'autre sens permet de déduire que si $a = 0$, on a un opérateur autoadjoint.

3.3 Cas du graphe compact, déplacement des valeurs propres

Cette partie réalisée en fin de stage, est essentiellement numérique, bien que l'on puisse prouver les résultats avancés. Il s'agit de regarder l'évolution des valeurs propres lorsque le paramètre a d'amortissement varie entre 0 et l'infini. On remarque tout d'abord que les cas extrêmes correspondent respectivement aux problèmes de Neumann et de Dirichlet, donc auto-adjoints, et que les valeurs propres sont donc réelles. On remarque en fait que les valeurs propres évoluent de manière continue entre ces deux ensembles lorsque a augmente. Certaines valeurs propres ne voient pas l'amortissement, ce sont celles qui sont à la fois des valeurs propres de Neumann et de Dirichlet. Comme prévu, ces valeurs propres évoluent dans le demi-plan inférieur (car l'opérateur est dissipatif).

Exemple 1 : simulation numérique Ce cas là est un peu compliqué pour être traité à la main. Il s'agit d'un graphe en forme de maison, à 5 sommets, dont toutes les arêtes ont la même longueur (ce qui permet de bien voir la convergence des valeurs propres vers les valeurs propres de Dirichlet)

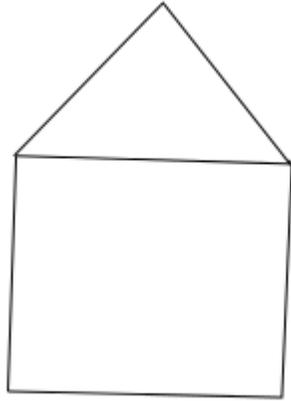


FIGURE 2 – Graphe "maison"

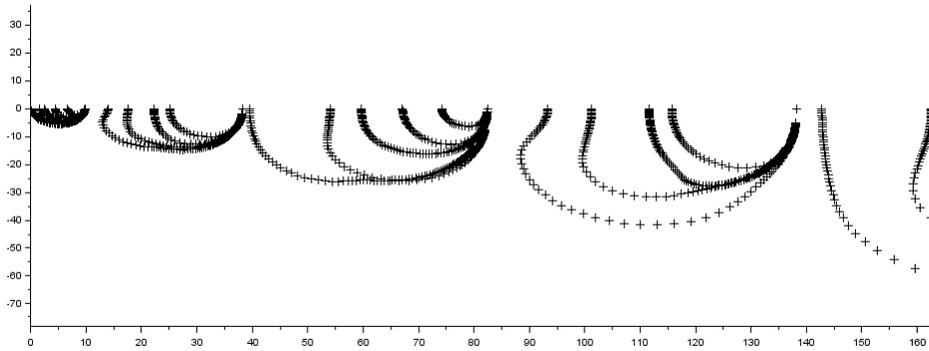


FIGURE 3 – Évolution du spectre en fonction de a

On remarque que l'on a convergence des valeurs propres vers des nombres proches des $(n\pi)^2$ qui sont les valeurs propres du problème de Dirichlet sur le segment $[0, 1]$, et les "valeurs propres limites" sont de multiplicité 6, ce qui correspond au nombre d'arêtes (on sait que sur le segment la multiplicité est simple). On "converge" donc vers 6 problèmes de Dirichlet indépendants.

Exemple 2 : un cas simple On choisit le graphe complet K_2 , avec une arête de longueur l_1 et une arête de longueur l_2 . Une valeur propre λ^2 est nécessairement de la forme $u = (u_1, u_2)$ avec $u_i = A_i e^{i\lambda x} + B_i e^{-i\lambda x}$. Il s'agit alors de trouver les λ tels qu'il existe A_1, B_1, A_2, B_2 non tous nuls tels que u vérifie les conditions initiales et l'équation différentielle. Ces conditions reviennent à trouver les zéros d'un déterminant 4×4 (deux équations pour les conditions de continuité, et deux équations pour les conditions sur les dérivées).

La résolution explicite n'est pas aisée mais les valeurs propres sont les solutions de cette équation :

$$4\lambda^2(e^{i(l_1+l_2)\lambda} - 1)^2 - 4a\lambda(e^{2i(l_1+l_2)\lambda} - 1) + a^2(e^{2il_1\lambda-1})(e^{2il_2\lambda-1}) = 0$$

qui permet d'en déduire certains résultats comme le fait que si le rapport $\frac{l_1}{l_2} \in \mathbb{Q}$, il existe au moins une valeur propre réelle qui ne bouge pas en fonction

de a : on peut prendre par exemple, si $\frac{l_2}{l_1} = \frac{p}{q}$, $\lambda = \frac{2\pi q}{l_1}$.

3.4 Le théorème d'absorption limite

Ce théorème est le suivant :

Théorème 9 (Principe d'absorption limite). *Soit $R(\lambda)$ la résolvante de H et f une fonction de $D(H)$ à support compact et C^∞ sur chaque arête. Alors $(R(\lambda)f, f)$ peut être prolongée analytiquement sur le demi plan supérieur privé d'un ensemble discret de \mathbb{R}_+ .*

Le reste du paragraphe est la preuve de ce théorème. Pour prouver le résultat recherché, il est suffisant de montrer le lemme suivant (voir [Yaf]).

Lemme. *Soit f une fonction de $D(H)$ à support compact et C^∞ sur chaque arête. Alors sur tout intervalle $[a, b]$ qui n'intersecte pas $\sigma(H_0)$,*

$$\sup_{a \leq \lambda \leq b, 0 < \epsilon < 1} |R(\lambda + i\epsilon)f, f| < \infty$$

Pour prouver ce lemme, on va utiliser les outils de la partie 3.2. On assimile l'ensemble des arêtes infinies du graphe à $(\mathbb{R}_+)^n$ et on peut maintenant écrire toute fonction u sur le graphe comme $u = (u_0, u_1)$ où u_0 est la fonction restreinte au graphe compact, et u_1 est une fonction de \mathbb{R}_+ à valeur dans \mathbb{C}^n . L'opérateur Λ permet alors de séparer le problème en deux problèmes indépendants sur les deux parties du graphe, problèmes dont on connaît les solutions explicites ce qui permet alors de conclure. La méthode est la même que dans [Ong05] (à partir de la page 6), un article qui traite de le problème dans le cas $a = 0$.

Références

- [Bir] M.S. Birman. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*.
- [Gla] I.M. Glazman. *Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators*.
- [Ong05] Beng-Seong Ong. On the limiting absorption principle and spectra of quantum graphs. *Contemporary Mathematics*, 2005.
- [Ree] Micheal Reed. *Methods of Modern Mathematical Physics I : Functional Analysis*.
- [Roy10] Julien Royer. *Analyse haute frequence de l'equation de Helmholtz dissipative*. PhD thesis, 2010.
- [Yaf] D. Yafaev. *Mathematical Scattering Theory : General Theory*.