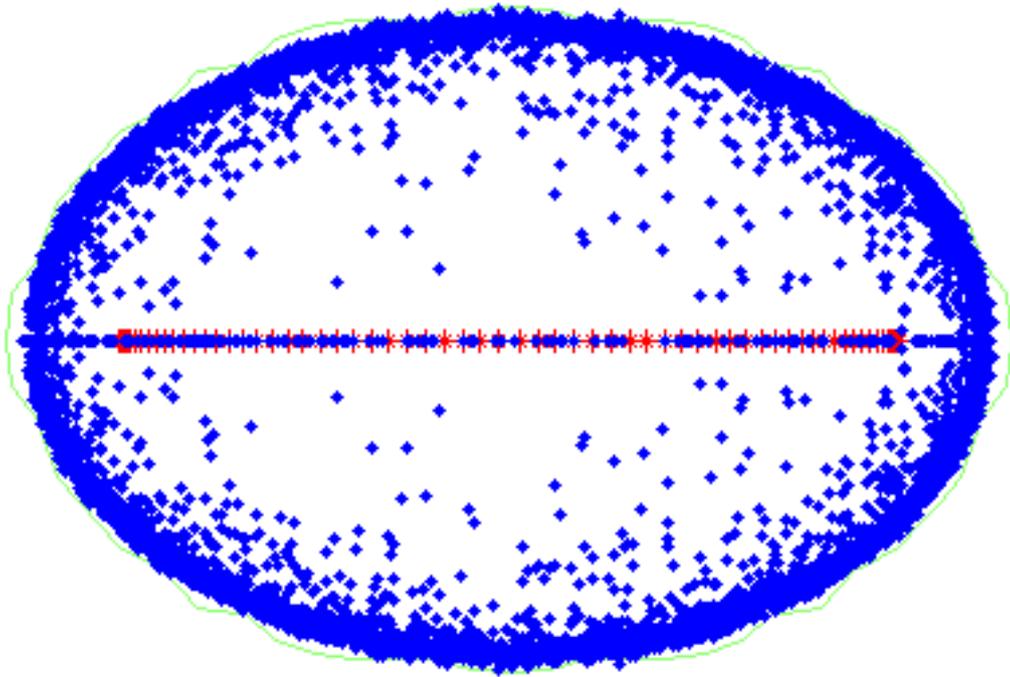


SPECTRES
ET
PSEUDO-SPECTRES



BLOHORN Hajer
BOQUEN Paul
DUBOIS Maeva

Sommaire

I- SPECTRE ET PSEUDO-SPECTRE D'UNE MATRICE.....	8
II- APPROXIMATION NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES	
1 Equations aux dérivées partielles(EDP) :	15
2 Méthode des différences finies :	16
2.1 Approximation de la dérivés :	17
2.2 L'équation de Poisson	18
2.3 Etude de l'erreur	20
III PSEUDO-SPECTRE D'OPERATEURS NON AUTO-ADJOINTS	23

Remerciements :

Nous tenons tout d'abord à remercier chaleureusement Julien ROYER pour son aide apportée tout au long de ce semestre. Ses conseils ont été plus que nécessaires et pas seulement en ce qui concerne ce projet. A lui et à sa motivation qu'il nous a transmise, merci.

Merci à Jérémie DARDE pour ses conseils sur les différents programmes utiles à la conception de notre projet et à leur installation pas toujours si simple. Merci également à Komla DOMELEVO pour ses conseils sur l'utilisation de matlab et pour son cours indispensable à notre engouement pour ce projet, ainsi qu'à Diane PEURICHARD pour ses travaux pratiques qui nous ont tout appris sur matlab.

Avant-propos :

Les valeurs propres, sans parler du spectre, ont été l'objet d'études et de recherches depuis plus d'un siècle et demi. Elles servent en pratique dans de nombreux cas comme la résolution d'équations différentielles, ou d'équations aux dérivées partielles, notamment en physique où l'on utilise très largement la théorie spectrale : elles servent de cadre général à la mécanique quantique et permettent par exemple l'étude de l'équation de Schrödinger.

Depuis l'apparition de l'informatique, le calcul des valeurs propres par le biais d'algorithmes implémentés sur ordinateur s'est démocratisé. Ceci a permis d'obtenir des spectres de matrices bien plus simplement. C'est cette utilisation pratique qui a soulevé quelques problèmes sur ces valeurs propres, entre autre celui dont nous abordons le sujet dans ce projet : la différence de comportement en pratique et en théorie des valeurs propres d'une matrice, c'est-à-dire le comportement du pseudo spectre.

Le pseudo spectre est une notion plutôt récente, de l'ordre d'une trentaine d'année, qui a été étudiée sur plusieurs continents, par différentes équipes de mathématiciens et dans des contextes pas toujours très proches. Cette notion a beaucoup été abordée pour répondre à des problèmes pratiques notamment, et a été, de façon indépendante, inventée au moins 5 fois en moins de 20 ans. En 1974, Henry Lanfau crée l'approximation epsilon des valeurs propres (epsilon approximate eigenvalues). Ce mathématicien a étudié le spectre asymptotique des opérateurs intégraux non hermitiens (et implicitement, le problème associé aux valeurs propres d'une matrice de Toeplitz), puis a su appliquer ses idées aux opérateurs intégraux qui interviennent dans l'étude des amplificateurs instables et des lasers.

Jim Varah, en 1977, invente l'epsilon-spectre (epsilon-spectrum). Il était intéressé par la stabilité des sous espaces invariants de matrices dans le contexte des solutions numériques aux problèmes des valeurs propres de matrices non hermitiennes.

C'est dans les années 1980 que Sergei Godunov et le groupe de Novosibirsk introduisent la notion de spectre figuré (spectral portrait). Les recherches sur ce domaine furent principalement dirigées à l'égard du développement des techniques pour garantir la précision du calcul des valeurs propres.

Le mathématicien Nick Trefethen quand à lui, invente en 1988 l'epsilon approximation des valeurs propres. Son travail prend racine dans les observations concernant les valeurs propres instables du spectre de matrices pour les

équations différentielles. Le premier écrit publié concerne les méthodes itératives polynomiales pour la résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires et la méthode des spectres.

Enfin, en 1990, Diederich Hinrichsen et Tony Pritchard apportent la notion de lot de valeurs spectrales (spectral value set). Hinrichsen et Pritchard étudiaient à l'origine cette notion dans le cadre du contrôle des théories. Dans ce contexte, ils étaient spécialement intéressés par les perturbations structurées de matrices. Au milieu des années 1980, ils ont commencé par étudier le "stability radii", une unité de mesure très liée aux valeurs propres qui servait à calculer la distance des instabilités sous des perturbations spécifiques.

D'autres utilisations plus récentes du pseudo spectre ont inclus Wilkinson et Demmel, qui ont apparemment suivi les définitions de Varah, et Chatelin qui a suivi celles de Godunov. Les thèses de Nicholas N. Trefethen et Karel Pravda-Starov sur l'étude du pseudo-spectre d'opérateurs respectivement non linéaires et non auto-adjoints ont été réalisées respectivement en 1997 et 2006 et sont les deux études approfondies les plus récentes.

Introduction :

En analyse numérique l'étude de la notion de pseudo spectre est un sujet sur lequel les mathématiciens se sont beaucoup posés de questions. Pour cela, il a fallu comprendre les problèmes et les difficultés du calcul des valeurs et vecteurs propres.

Nous pensons tous que le calcul des valeurs et vecteurs propres fait partie de l'algèbre linéaire, et donc que les problèmes rencontrés sont linéaire. En réalité pas du tout, le calcul des éléments propres est difficile à cause de la non-linéarité du problème. En effet, les valeurs propres de $A + B$ ne sont pas la somme des valeurs propres de A et de B , en effet :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par un calcul trivial on montre que les spectres de A et B sont respectivement $\{1, 2\}$ et $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Or le spectre de la somme de matrice

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est $\{0, 3\} \neq \{1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$.

On a bien montré la non-linéarité des valeurs propres.

La recherche des valeurs propres d'une matrice n'est pas toujours facile, le problème peut être très mal conditionné, c'est-à-dire que la variation des éléments propres est grande par rapport aux coefficients de la matrice. Nous remarquons que pour certaines matrices, entre autre pour des matrices auto-adjointes ou même normales, les différences entre la théorie et l'analyse numérique sont moindre pour le calcul des valeurs et vecteurs propres.

Qu'en est-il pour les matrices non-auto-adjointes ?

Les ingénieurs qui ont manipulé les matrices non auto-adjointes ont remarqué de sensibles différences entre, les résultats théoriques et les prédictions suggérées par l'analyse spectrale de ces matrices, et d'un autre côté, les résultats

obtenus par simulation numérique.

Ce constat laisse penser que dans certains cas, la connaissance seule du spectre ne permet pas de comprendre son action. C'est ainsi que pour compléter ce manque d'information contenu dans le spectre, de nouveaux sous-ensembles du plan complexe appelé pseudo-spectre ont été introduits.

Première partie

SPECTRE ET

PSEUDO-SPECTRE D'UNE

MATRICE

Avant de commencer il me semble nécessaire de rappeler la définition d'une norme matricielle :

Soit $A, B \in M^{n \times n}$, ensemble des matrices réelles de format $n \times n$.

Alors l'application $\|\cdot\| : M^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme matricielle si elle satisfait les propriétés suivantes :

1. $\|A\| \geq 0, \forall A \in M^{n \times n}$ et $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\|\beta A\| = |\beta| \|A\|$ et ce pour tout A et $B \in M^{n \times n}$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ et ce pour tout A et $B \in M^{n \times n}$
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ et ce pour tout A et $B \in M^{n \times n}$

Dans ce projet, nous utilisons une norme 2 définie par :

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

L'idée sous-jacente à la définition de ces nouveaux objets, est qu'il s'avère intéressant d'étudier non seulement les points où la résolvante d'une matrice n'est pas définie i.e. son spectre, mais également là où elle est en norme de taille significative i.e. les ensembles pseudo-spectraux qui sont définis précisément de la manière suivante : le ϵ -pseudo-spectre $\sigma_\epsilon(A)$ d'une matrice A est défini pour une valeur strictement positive du paramètre ϵ comme le sous-ensemble du plan complexe.

Dans cette partie, nous allons étudier la matrice A perturbée par une matrice E avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/4 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$E = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \dots & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \times \epsilon$$

où r_{ij} est un réel aléatoire compris entre $[-1; 1]$ et ϵ est un paramètre.

Définition 1. Posons A une matrice $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $\epsilon > 0$ quelconque, le pseudo-spectre $\sigma_\epsilon(A)$ de A est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\| (zI - A)^{-1} \| > \epsilon^{-1} \tag{1}$$

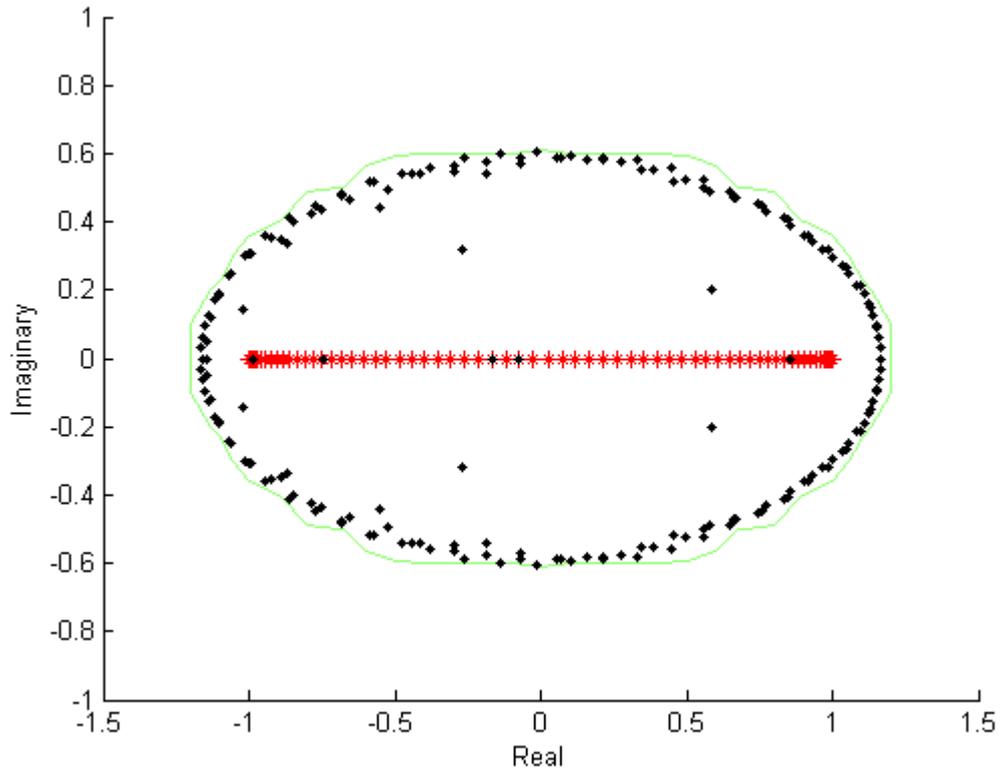


FIGURE 1 – Matrice de taille $n = 64$, 3 matrices de perturbations, $\epsilon = 10^{-2}$

Chaque graphe représente le spectre d'une matrice de taille n , perturbée un nombre fini de fois par des matrices E de norme égale à ϵ . Ici on a effectué 3 perturbations pour mettre en évidence les lignes de niveaux du pseudo-spectre.

L'étude des ϵ pseudo-spectres renvoie à l'étude des lignes de niveaux de la norme de sa résolvante, ceci permet de remarquer son instabilité spectrale par rapport à des perturbations.

La seconde définition du pseudo spectre est basée sur le lien entre la norme de la résolvante et la théorie des perturbations des valeurs propres.

Définition 2. $\sigma_\epsilon(A)$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z \in \sigma(A + E)$ pour $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ avec $\|E\| < \epsilon$. Le pseudo-spectre est l'ensemble des nombres qui sont les valeurs propres d'une matrice perturbée $A + E$ avec $\|E\| < \epsilon$.

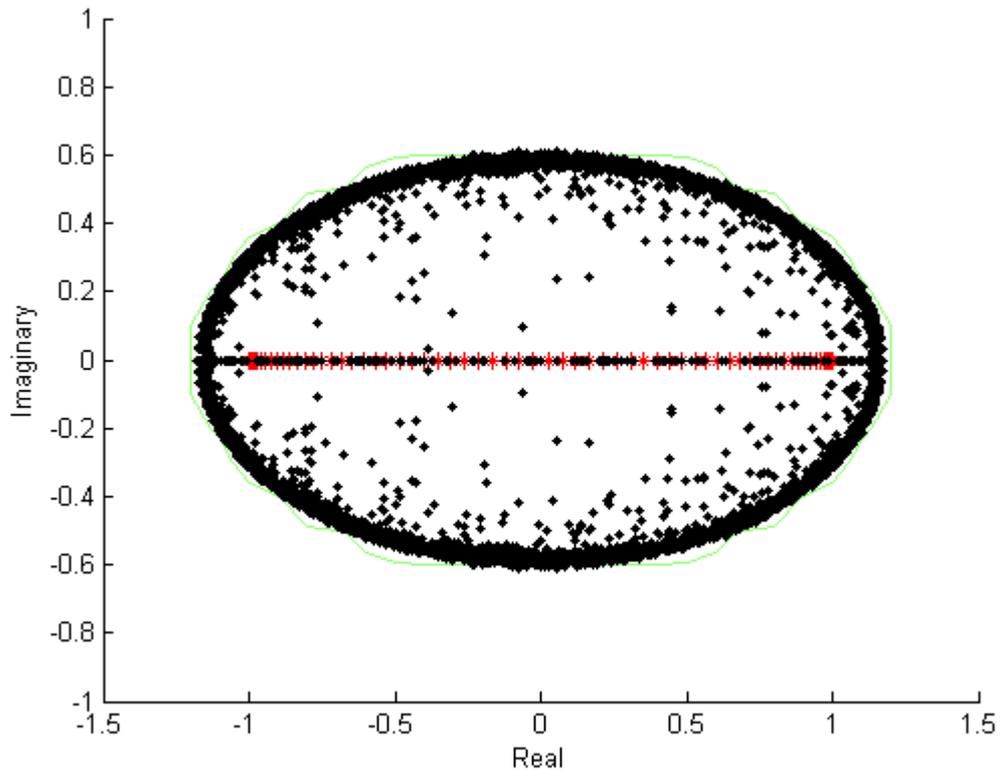


FIGURE 2 – Matrice de taille $n = 64$, 100 matrices de perturbations, $\epsilon = 10^{-4}$

En augmentant le nombre de matrices on obtient une figure plus représentative du pseudo-spectre. Les valeurs propres se concentrent autour de la ligne de niveau.

Voici une troisième caractéristique du pseudo-spectre :

Définition 3. $\sigma_z(A)$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\|(z - A)v\| < \epsilon$ pour $v \in \mathbb{C}^n$ avec $\|v\| = 1$.

Ici le nombre z est le pseudo-spectre propre de A et v correspond au pseudo-vecteur propre. En effet, le pseudo-spectre est l'ensemble des pseudo-vecteurs propres.

Les trois définitions du pseudo-spectre sont équivalentes. z n'appartient pas au pseudo-spectre sinon les équivalences seraient triviales.

Voici quelques équivalences :

Démonstration. Def2 \Rightarrow Def3

Supposons que $(A + E)v = zv$ Soit v un vecteur non nul et $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ avec $\|E\| < \epsilon$ et $\|v\| = 1$. On a donc : $\|(z - A)v\| = \|Ev\| < \epsilon$. \square

Démonstration. Def3 \Rightarrow Def1

Supposons que $(z - A)v = sv$ pour $v, u \in \mathbb{C}^n$ avec $\|v\| = \|u\| = 1$ et $s < \epsilon$ donc $(z - A)^{-1}u = s^{-1}v$ on déduit que $\|(z - A)^{-1}\| \geq s^{-1} > \epsilon^{-1}$. \square

Démonstration. Def1 \Rightarrow Def2

Supposons $\|(z - A)^{-1}\| > \epsilon^{-1}$, puis, $(z - A)^{-1}u = s^{-1}v$. Ces deux expressions nous ramènent à $zv - Av = su$ pour tout v et $u \in \mathbb{C}^N$ avec $\|v\| = \|u\| = 1$ et $s < \epsilon$. Pour arriver à la seconde définition, il suffit de montrer qu'il existe une matrice $E \in \mathbb{C}^N$ avec $\|E\| = s$ et $Ev = su$ et donc v sera un vecteur propre de la matrice perturbée $A + E$ avec pour valeur propre z .

En effet, E peut être une matrice de rang 1 de la forme $E = suw^*$ pour $w \in \mathbb{C}^N$ avec $w^*v = 1$. Si $\|\cdot\|$ est la norme 2, on peut prendre $w = v$. \square

Pour bien comprendre la 4ème définition du pseudo spectre, il semble nécessaire de rappeler la définition des valeurs singulières :

Soit M une matrice $n \times n$ à coefficients complexes. On appelle valeurs singulières de A les racines carrées des valeurs propres de la matrice M^*M .

Définition 4. Pour $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $\sigma_\epsilon(A)$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $S_{\min}(z - A) < \epsilon$.

$S_{\min}(z - A)$ représente la plus petite valeur singulière de $z - A$. La définition 1 et la définition 4 sont équivalentes et $E = suv^*$ une matrice de rang 1.

Les définitions précédemment énoncées nous permettent d'introduire le théorème suivant :

Théorème 5. (la norme de la résolvante) $\| (z - A)^{-1} \|$ est une fonction de $z \in \mathbb{C} \rightarrow [0; +\infty]$ pour $z \notin \sigma(A)$:

$$\| (z - A)^{-1} \| \geq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))} \quad (2)$$

$\text{dist}(z, \sigma(A))$ désigne la distance entre z et le spectre de la matrice A .

Ce résultat montre que la résolvante d'une matrice ne peut pas exploser en norme en dehors du spectre de A dans la mesure où la distance entre z et σA ne peut pas être infiniment petite. Il y a deux cas distincts selon si la matrice est normale ou non-normale.

Rappelons la définition d'une matrice normale : une matrice $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est normale si

$$A^* A = A A^*$$

Cas d'une matrice normale :

Considérons A une matrice normale avec $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dans ce cas, $\| (z - A)^{-1} \| = \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))}$ qui déduit que le ϵ -pseudo-spectre de cette matrice est exactement égal au ϵ -voisinage de son spectre :

$$\sigma_\epsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, \sigma(A)) \leq \epsilon\}, \epsilon > 0 \quad (3)$$

Donc la résolvante ne peut pas exploser en norme loin du spectre et induit que le spectre d'une matrice est stable sous de petites perturbations.

Cas d'une matrice non-normale :

Soit A une matrice $\in M_n(\mathbb{C})$ et $\sigma(A) \not\subset \mathbb{C}$. Dans ce cas là, il n'y a pas d'égalité. En effet, cette propriété de stabilité spectrale n'est plus du tout vérifiée si la propriété d'auto-adjoint de la matrice est violée. La résolvante de la matrice peut être alors grande en norme dans des régions de l'ensemble résolvant lointaines du spectre, ce qui induit une très forte instabilité de son spectre sous de petites perturbations.

Exemple :

Considérons pour $n \geq 1$ le bloc de Jordan nilpotant d'indice n :

$$\mathcal{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice J_n n'est pas auto-adjointe. Son spectre est le singleton $\{0\}$ et pour $z \neq 0$, la résolvante est donnée par son expression :

$$(zI_d - J_n)^{-1} = \frac{I}{z} + \frac{J_n}{z^2} + \dots + \frac{J_n^{n-1}}{z^n} \quad (4)$$

Ceci induit à $\forall 0 < \epsilon < 1. \overline{B(0, \epsilon^{\frac{1}{n}})} \subset \sigma_\epsilon(J_n) \subset \overline{B(0, 1 + \epsilon)}$
 où $B(z, r)$ désigne la boule ouverte centrée en z et de rayon r . Si le paramètre strictement positif ϵ est suffisamment petit que la taille n de la matrice J_n est suffisamment grande pour que $\epsilon^{\frac{1}{n}} \simeq 1$. On constate alors dans ce cas le ϵ -pseudo-spectre de J_n tend à remplir tout le disque fermé. Ainsi le spectre des grandes matrices J_n est très instable sous de petites perturbations.

Maintenant regardons le cas pour une matrice 2×2 auto-adjointe :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 10^4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 10^4 \\ -10^{-5} & 11 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 11,$$

et un calcul explicite donne celles de A'

$$\lambda'_1 = 6 - \sqrt{24.9} \sim 1.01001 \quad , \quad \lambda'_2 = 6 + \sqrt{24.9} \sim 10.98999.$$

Cela signifie qu'une perturbation en valeur absolue de 10^{-5} sur les coefficients de la matrice, ce qui est aussi 10^{-5} en valeur relative, cause une perturbation de l'ordre de 10^{-2} sur les valeurs propres. Nous voyons ainsi que les valeurs propres sont fortement sensibles aux perturbations des données.

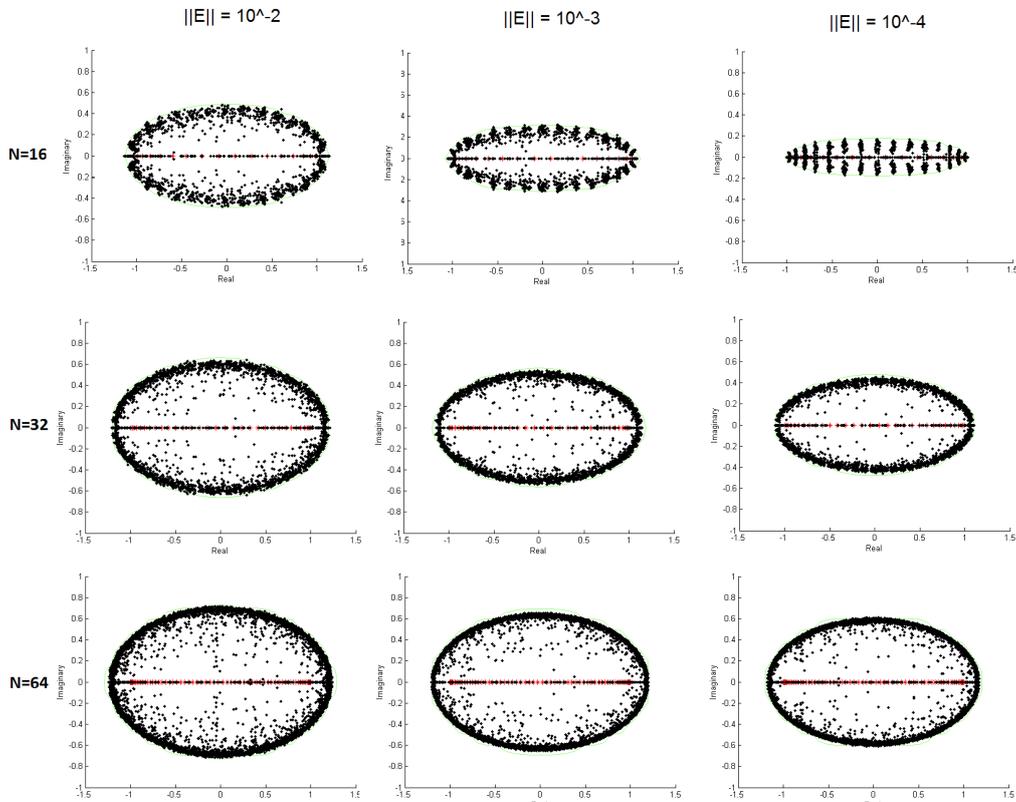


FIGURE 3 – Ensemble de matrices de taille N , perturbées 100 fois par des matrices E

Voici un ensemble de neuf matrices de différentes tailles avec différentes perturbations. On observe que la zone d'instabilité dans laquelle restent confinées les valeurs propres perturbées, possède une certaine structure : il s'agit ici d'une ellipse. On peut par ailleurs remarquer que l'étendue de cette zone, dans cet exemple, augmente à la fois avec la taille N de la matrice et la taille en norme de E .

Nous avons abordé les différentes définitions du pseudo spectre, et quelques propriétés le concernant. Nous avons également vu quelques représentations graphiques de ce dernier pour des matrices auto-adjointes. Mais qu'est-il pour les matrices non auto-adjointes? Afin de répondre à cette question, nous allons introduire avant cela la méthode des différences finies.

Deuxième partie

APPROXIMATION NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

1 Equations aux dérivées partielles(EDP)

Les équations aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (EDP) apparaissent chez Alembert en 1747 et chez Euler en 1745. Les EDP apparaissent dans tous les domaines des sciences et de l'ingénierie. La EDP proviennent souvent de la physique mais également en finance et en assurance. Une EDP est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante, des variables indépendantes $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0$$

Les EDP peuvent être classées suivant leur nature : elliptique, parabolique ou hyperbolique et leurs conditions initiales ou leurs conditions aux limites.

Exemple d'EDP :

-Equation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

Il définit le problème de Dirichlet et le problème de Cauchy dans le demi-

espace $x \geq 0$ avec pour condition aux limites pour $x = 0$, $u = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial x} = u'_0$.
 u_0 et u'_0 étant des fonctions données de y et z .

-Equation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6)$$

données initiales en $t = 0$, $u = U$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = U'$
avec U et U' étant des fonctions données de x, y, z .

Nous aborderons par la suite une méthode d'approximations des EDP qui est la méthode des différences finies.

Nous présenterons les propriétés algorithmiques et la théorie de la convergence vers la solution de l'EDP.

2 Méthode des différences finies :

Il s'agit d'approcher la solution de l'EDP en un nombre fini de points seulement. On approche alors les dérivées par des accroissements de la fonction entre deux points.

Il n'existe pas de méthode universelle pour la résolution numérique des EDP. L'algorithme de résolution dépend très étroitement du type de problème posé.

Voici un exemple :

-Equation de Poisson :

$$\begin{cases} -hu''(x) = f(x), & a < x < b \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta \end{cases} \quad (7)$$

L'inconnu est une fonction $u : x \mapsto u(x)$ définie sur $[a, b]$. Les conditions en a et b sont appelées les conditions aux limites. Notons qu'elles portent ici sur la valeur de la solution au bord du domaine : nous parlons dans ce cas de conditions de Dirichlet. Lorsque les conditions aux limites portent sur les valeurs de la dérivée de la solution au bord, ce sont des conditions de

Neumann. La discrétisation de l'équation de Poisson par une méthode des différences finies consiste à approcher les dérivées successives d'une fonction u à partir des valeurs de la fonction en certains points.

2.1 Approximation de la dérivées :

Supposons par exemple que $u(x)$ soit une fonction à une variable $x \in \mathbb{R}$ régulière, disons $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'idée de la méthode aux différences finies est de combiner plusieurs valeurs de u en certains points pour estimer u' . Cette approximation par différences finies est à la base de la plupart des méthodes pour résoudre des équations de toutes sortes. L'avantage de cette méthode est qu'il y a une grande simplicité d'écriture et un faible coût de calcul. Elle repose sur deux notions : la discrétisation des fonctions de dérivation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenue.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et un petit paramètre $\delta_x > 0$, nous notons par D_Δ une approximation de la valeur de la dérivée $u'(x)$, plusieurs choix sont alors possibles.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_\Delta u(x) = \frac{u(x+\Delta_x) - u(x)}{\Delta_x} \\ D_\Delta u(x) = \frac{u(x) - u(x-\Delta_x)}{\Delta_x} \\ D_\Delta u(x) = \frac{u(x+\Delta_x) - u(x-\Delta_x)}{2\Delta_x} \\ D_\Delta u(x) = \frac{-u(x+2\Delta_x) + 4u(x+\Delta_x) - 3u(x)}{2\Delta_x} \end{array} \right.$$

Les trois premières approximations ont des interprétations géométriques simples. Elles représentent les pentes formées à partir des points voisins de la fonction $u(x)$. En outre, la troisième formule est plus précise que les deux premières. Nous donnons une explication analytique de cela ci-dessous. Quant à la dernière formule, elle est bien plus technique et moins intuitive. Observons que cette formule est décentrée tout comme les deux premières car elles n'exploitent pas les valeurs de u seulement d'un côté alors que la troisième formule est centrée utilisant des points symétriques autour de x .

Effectuons d'abord une analyse d'erreur de base de la première formule à l'aide d'un développement de Taylor pour une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$u(x + \Delta_x) = u(x) + \Delta_x u'(x) + \frac{\Delta_x^2}{2} u''(\eta_x)$$

avec $\eta_x \in [x, x + \Delta_x]$, ce qui donne alors

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta_x) - u(x)}{\Delta_x} - \frac{\Delta_x}{2} u''(\eta_x)$$

Ainsi pour une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'erreur d'approximation de la première formule est proportionnelle à Δ_x . Une analyse similaire peut être réalisée pour la deuxième formule d'approximation.

En ce qui concerne la formule centrée, la situation est légèrement différente : nous supposons que $u \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et réalisons un développement de Taylor au point $x + \Delta_x$

$$u(x + \Delta_x) = u(x) + \Delta_x u'(x) + \frac{\Delta_x^2}{2} u''(x) + \frac{\Delta_x^3}{6} u^{(3)}(\eta_x^+)$$

et au point $x - \Delta_x$

$$u(x - \Delta_x) = u(x) - \Delta_x u'(x) + \frac{\Delta_x^2}{2} u''(x) - \frac{\Delta_x^3}{6} u^{(3)}(\eta_x^-)$$

où $\eta_x^+ \in [x, x + \Delta_x]$ et $\eta_x^- \in [x - \Delta_x, x]$. Ainsi, en soustrayant les deux égalités, il vient

$$u(x + \Delta_x) - u(x - \Delta_x) = 2\Delta_x u'(x) + \frac{\Delta_x^3}{6} [u^{(3)}(\eta_x^+) + u^{(3)}(\eta_x^-)]$$

ou encore

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta_x) - u(x - \Delta_x)}{2\Delta_x} - \frac{\Delta_x^2}{12} [u^{(3)}(\eta_x^+) + u^{(3)}(\eta_x^-)]$$

Cette fois-ci, l'erreur est proportionnelle à Δ_x^2 , ce qui confirme bien que la formule centrée est plus précise que les deux premières à condition que la fonction u soit régulière.

Enfin pour justifier la validité de la dernière formule, il suffit une nouvelle fois de réaliser un développement de Taylor en $x + 2\Delta_x$ et $x + \Delta_x$, il vient alors

$$u'(x) = \frac{-u(x + 2\Delta_x) + 4u(x + \Delta_x) - 3u(x)}{2\Delta_x} - \frac{\Delta_x^2}{3} [u^{(3)}(\eta_x^1) - 2u^{(3)}(\eta_x^2)]$$

L'erreur est alors proportionnelle à Δ_x^2 lorsque la fonction $u \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.2 L'équation de Poisson

Dans cette partie, nous appliquons la méthode des différences finies pour discrétiser l'équation de Poisson.

Avant de commencer, nous allons définir ce qu'est un maillage car on en aura tout le temps besoin. On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Nous souhaitons approcher la solution en certains points du segment $[a, b]$ et introduisons alors un maillage de segment $[a, b]$. On va approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylors et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Soit $n_x \geq$ un entier fixé, posons $\Delta_x = \frac{b-a}{n_x+1}$, et définissons les points $x_i = a + i\Delta_x$ pour tout $i \in \{0, \dots, n_x + 1\}$. Puis pour un point x_i quelconque intérieur à l'intervalle $]a, b[$, c'est-à-dire tel que $1 \leq i \leq n_x$, nous écrivons les développements de Taylor de la solution u :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \Delta_x u'(x_i) + \frac{\Delta_x^2}{2} u''(x_i) + \frac{\Delta_x^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta_x^4}{24} u^{(4)}(\eta_{i+1})$$

avec $\eta_{i+1} \in [x_i, x_{i+1}]$ et

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - \Delta_x u'(x_i) + \frac{\Delta_x^2}{2} u''(x_i) - \frac{\Delta_x^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta_x^4}{24} u^{(4)}(\eta_{i-1})$$

avec $\eta_{i-1} \in [x_{i-1}, x_i]$. Ainsi, en ajoutant les deux égalités :

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + \Delta_x^2 u''(x_i) + \frac{\Delta_x^4}{24} [u^{(4)}(\eta_{i+1}) + u^{(4)}(\eta_{i-1})]$$

nous avons donc :

$$-\kappa u''(x_i) = -\kappa \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{\Delta_x^2} + \kappa \frac{\Delta_x^2}{24} [u^{(4)}(\eta_{i+1}) + u^{(4)}(\eta_{i-1})]$$

Puisque la fonction u est solution de l'équation de Poisson, il vient pour tout $1 \leq i \leq n_x$

$$-\kappa \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{\Delta_x^2} + \kappa \frac{\Delta_x^2}{24} [u^{(4)}(\eta_{i+1}) + u^{(4)}(\eta_{i-1})] = f(x_i)$$

Pour définir un schéma de discrétisation du problème par la méthode aux différences finies, nous ne prenons en compte que les termes d'ordre inférieur à deux dans le développement précédent de $f(x_i)$ en supposant que les autres sont négligeables pour Δ_x assez petit.

Nous notons alors v_i une approximation de la solution u au point x_i pour

tout $0 \leq i \leq n_x + 1$, le schéma est alors donné par

$$-\kappa \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta_x^2} = f(x_i), 1 \leq i \leq n_x \quad (8)$$

Ce système d'équation comporte n_x équations pour $n_x + 2$ inconnues ; il faut éliminer des inconnues ou rajouter des équations. Pour cela, il suffit d'interpréter numériquement les conditions aux limites. Ici, comme ce sont des conditions de Dirichlet, nous pouvons éliminer deux inconnues en posant :

(i) $v_0 = \alpha$ puisque $u(x_0) = u(a) = \alpha$,

(ii) $v_{n_x+1} = \beta$ puisque $u(x_{n_x+1}) = u(b) = \beta$

Le système à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} 2\kappa v_1 & -\kappa v_2 = \Delta_x^2 f(x_1) + \kappa\alpha \\ \vdots & \vdots \\ -\kappa v_{i-1} & +2\kappa v_i - \kappa v_{i+1} = \Delta_x^2 f(x_i) \\ \vdots & \vdots \\ -\kappa v_{n_x-1} & +2\kappa v_{n_x} = \Delta_x^2 f(x_{n_x}) + \kappa\beta \end{cases}$$

Ce système linéaire s'écrit matriciellement

$$\kappa A v = \Delta_x^2 F \quad (9)$$

où A est une matrice centrée de taille $n_x \times n_x$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $v \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur des inconnues et F la donnée

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n_x} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\kappa\alpha}{\Delta_x^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n_x}) + \frac{\kappa\beta}{\Delta_x^2} \end{pmatrix}$$

On peut montrer simplement que la matrice A est symétrique, définie positive et donc inversible. En outre, elle possède une structure particulière tridiago-

nale dont les seuls coefficients non nuls sont :

$$\begin{cases} a_{i,i} = 2, & 1 \leq i \leq n_x \\ a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, & 1 \leq i \leq n_x - 1 \end{cases}$$

C'est pourquoi, la résolution numérique de ce système ne pose pas de problème. En revanche, il faut maintenant justifier rigoureusement la validité de la discrétisation par le schéma aux différences finies. L'étude précédente montre la cohérence du schéma lorsque la solution $u \in C^4([a, b], \mathbb{R})$, mais il reste à démontrer que la solution numérique est également stable.

2.3 Etude de l'erreur

Démontrons que la méthode aux différences finies est convergente. En observant que $u \in L^2(]a, b[)$, nous recherchons à projeter la solution sur \mathbb{R}^{n_x} en introduisant la norme discrète de \mathbb{R}^{n_x} associée à l'espace $L^2(]a, b[)$

$$\| u \|_{\Delta, L^2}^2 := \Delta_x \frac{u^2(a) + u^2(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n_x} \Delta_x |u(x_i)|^2$$

Et on a donc la formule de Newton-Cotes qui assure :

$$\left| \| u \|_{\Delta, L^2}^2 - \int_a^b |u(x)|^2 dx \right| \rightarrow 0$$

lorsque $\Delta_x \rightarrow 0$ L'analyse de convergence consiste donc à évaluer la quantité $e_i(\Delta_x) := v_i - u(x_i)$, pour tout $i \in 0, \dots, n_x + 1$. Comme $v_0 = u(a)$ et $v_{n_x+1} = u(b)$, il suffit de calculer

$$\sum_{i=1}^{n_x} \Delta_x |e_i(\Delta_x)|^2$$

Définissons donc la notion de consistance. Elle renseigne sur la cohérence de la discrétisation et de la stabilité, qui signifie le contrôle de la solution numérique. Tout d'abord, l'erreur de consistance du schéma est obtenue en appliquant le schéma numérique à la solution exacte. Plus précisément, nous avons la définition suivante.

Définition 6. L'erreur de consistance $R(x, u, \Delta_x)$ au point x est définie par :

$$R(x, u, \Delta_x) := -\kappa \frac{u(x + \Delta_x) - 2u(x) + u(x - \Delta_x)}{\Delta_x^2} - f(x)$$

Le schéma 8 est consistant lorsque l'erreur de consistance tend vers zéro lorsque Δ_x tend vers zéro

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \| R(u, x, \Delta_x) \|_{\Delta, L^2} = 0$$

En outre, le schéma 8 est consistant d'ordre p s'il existe une constante $C > 0$, ne dépendant pas de Δ_x , telle que

$$\| R(u, x, \Delta_x) \|_{\Delta, L^2} \leq C \Delta_x^p$$

avec u solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\kappa u''(x) = f(x), & a < x < b \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta \end{cases}$$

En définitive, l'erreur de consistance représente l'écart entre le schéma de discrétisation et le problème différentiel vérifié par u .

Proposition 7. *Supposons que $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, alors le schéma (i) correspondant au problème aux limites est constant d'ordre deux.*

Proposition 8. *Soient $\Delta_x = \frac{(b-a)}{(n_x+1)}$, alors pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^{n_x+2}$ tel que $w_0 = w_{n_x+1} = 0$*

$$\sum_{i=1}^{n_x} \Delta_x |w_i|^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sum_{i=0}^{n_x} \frac{|w_{i+1} - w_i|^2}{\Delta_x}$$

Nous sommes alors en mesure de prouver le résultat de convergence suivant

Théorème 9. *Supposons que $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ et notons $e(\Delta_x)$ le vecteur des erreurs*

$$e(\Delta_x) = v - u_\Delta$$

où $u_\Delta \in \mathbb{R}^{n_x}$ avec $u_{\Delta, i} = u(x_i), i = 1, \dots, n_x$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n_x} \Delta_x |e_i(\Delta_x)|^2 \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } \Delta_x \rightarrow 0$$

De plus, il existe une constante $C > 0$, dépendant de la dérivée quatrième de u et pas de Δ_x , telle que

$$\sum_{i=1}^{n_x} \Delta_x |v_i - u(x_i)|^2 \leq C \Delta_x^2$$

La résolution numérique d'une équation différentielle linéaire, avec conditions aux limites, se résume donc en trois grandes étapes :

La discrétisation du problème, c'est à dire le choix des points sur lesquels sera approximé l'équation différentielle ainsi que le type d'approximation numérique des dérivées en ces mêmes points. On obtient ainsi un système linéaire liant les valeurs de la solution numérique entre elles.

La prise en compte des conditions aux limites du problème : Au même titre que celles-ci complètent l'équation différentielle, leurs approximations numériques, injectées dans le système linéaire complètent ce dernier.

La résolution du système linéaire liant les valeurs de la solution numérique entre elles.

Nous avons vu les deux premières étapes dans cette partie, nous allons donc porter notre attention sur cette troisième étape, et surtout parler de quelques exemples.

Troisième partie

PSEUDO-SPECTRE D'OPERATEURS NON AUTO ADJOINTS

Nous nous intéressons dans cette partie à l'instabilité d'un opérateur non-autoadjoint.

Soit la matrice non auto-adjointe :

$$\mathcal{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons vu dans la première partie que la taille de la norme de la résolvante pour des matrices non auto-adjointes ne peut pas être contrôlée par le spectre. Voici la modélisation du pseudo spectre de la matrice \mathcal{J}_n :

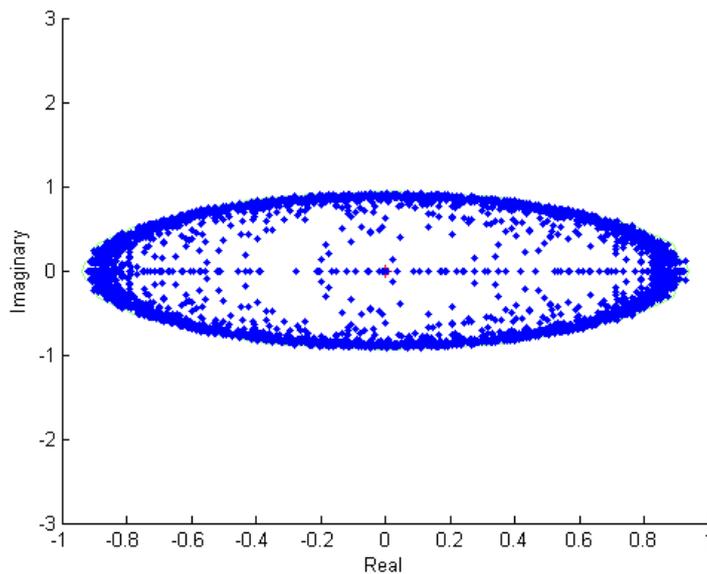


FIGURE 4 – Modélisation du pseudo spectre d'une matrice non auto-adjointe de taille $N = 64$

Maintenant prenons une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Pour passer du problème différentiel au problème matriciel, on utilise le fait que les conditions initiales ont été discrétisées. On obtient :

$$(A + Q)u = F$$

où A est une matrice auto-adjointe utilisée dans la partie précédente, Q est une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs de q au point du maillage, u est le vecteur des solutions et F est le vecteur qui représente f .

On calcule le pseudo spectre de la matrice $A + Q$ avec $n = 5$.

avec :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient :

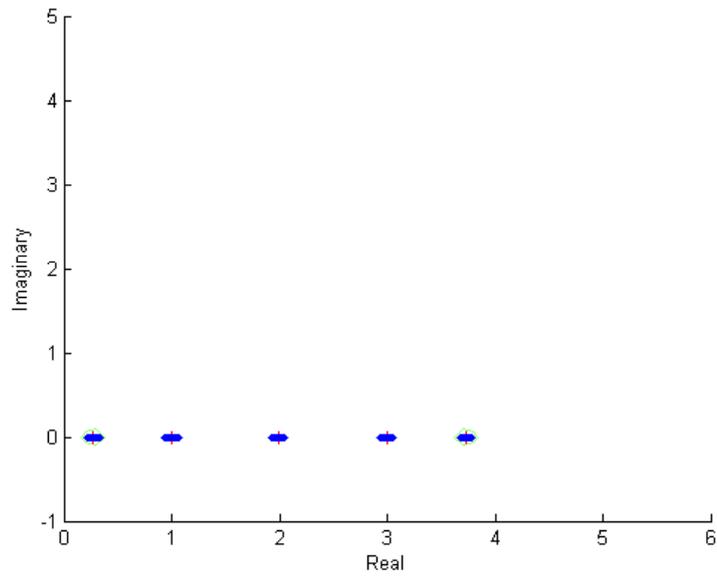


FIGURE 5 – Modélisation du pseudo spectre de la matrice $A + Q$

On essaye avec plusieurs valeurs des coefficients de Q réelles et complexes :

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on obtient :

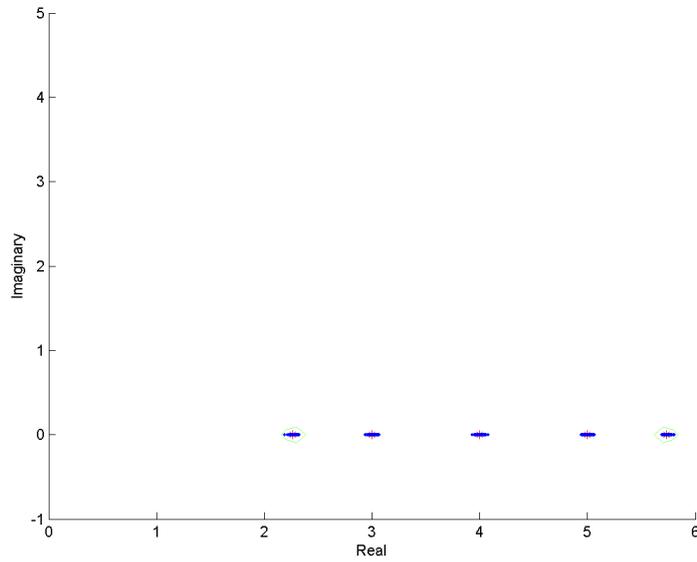


FIGURE 6 – Modélisation du pseudo spectre de la matrice $A + Q$

Pour des valeur réelle, $A+Q$ est une matrice autoadjointe puisqu'on remarque que le pseudo spectre est stable sous de petites perturbations.

$$Q_i = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

On obtient :

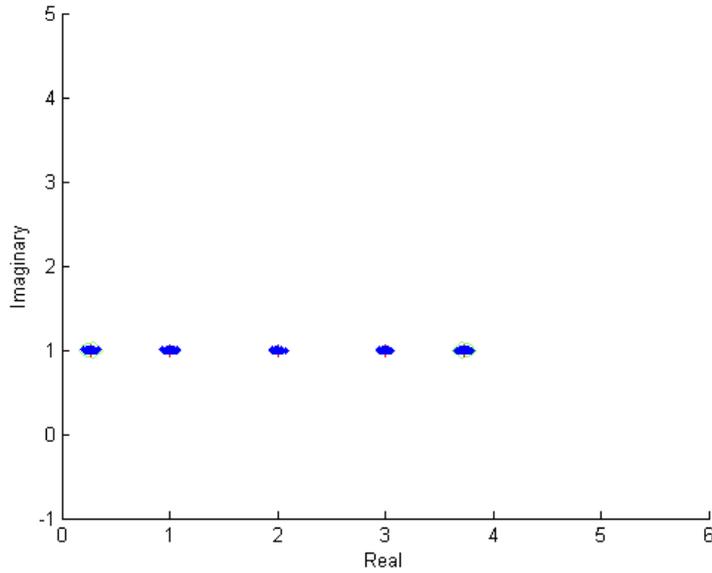


FIGURE 7 – Modélisation du pseudo spectre de la matrice $A + Q$

Ici, on remarque aussi une certaine stabilité en effet , la matrice Q est une matrice normale non auto-adjointe ce qui explique que les spectres des matrices perturbées sont proches du spectre de la matrice initiale.

$$Q_{ic} = \begin{pmatrix} i * 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i * 2^2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i * 3^2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i * 4^2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i * 5^2/5 \end{pmatrix}$$

On obtient :

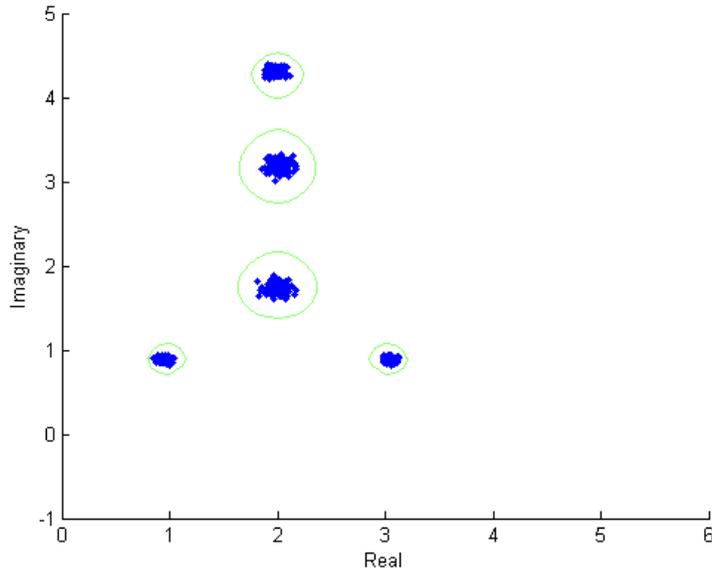


FIGURE 8 – Modélisation du pseudo spectre de la matrice $A + Q$

Sur cette figure, la matrice $A + Q$ a un comportement instable, pour les 5 matrices, les spectres se comportent différemment les uns des autres.

$$Q_{1/2} = \begin{pmatrix} 1/2 * 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 * 2^2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 * 3^2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 * 4^2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 * 5^2/5 \end{pmatrix}$$

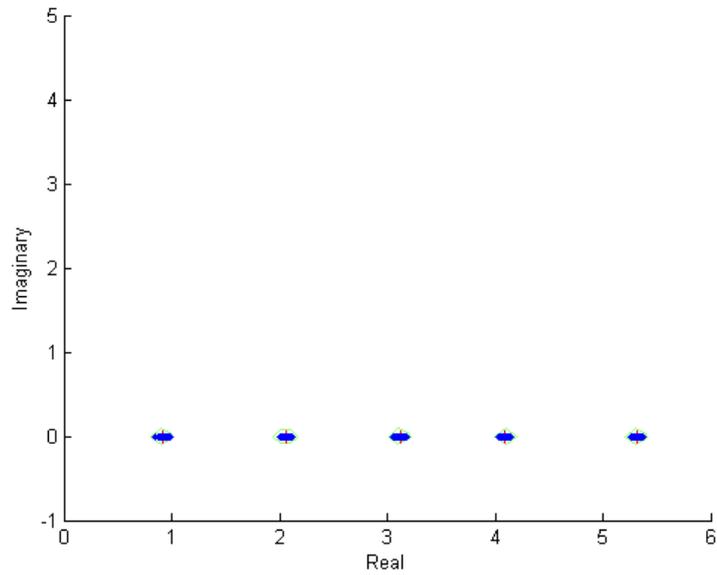


FIGURE 9 – Modélisation du pseudo spectre de la matrice $A + Q$

Nous avons pris différentes valeurs de Q , soit réelles soit complexes, et on constate que la stabilité de Q ne dépend pas uniquement de cette caractéristique.

Conclusion et perspectives :

Le but de ce projet a été d'étudier le pseudo-spectre pour des matrices auto-adjointes puis non auto-adjointes et pour finir un exemple d'opérateur non auto-adjoint. Il faut savoir que le pseudo spectre est un sujet en cours de recherche dont nous avons montré l'instabilité spectrale de quelques matrices. Seulement quelques modèles unidimensionnels non auto-adjoint comme par exemple, l'oscillateur harmonique sont essentiellement bien compris. Nous avons établi que le fait qu'une matrice soit normale, sous de petites perturbations, assure la stabilité de l'ensemble de ses valeurs propres.

Il reste encore beaucoup à apprendre sur le comportement du spectre en pratique, et nul doute que de futurs problèmes sur le sujet se poseront à nous dans différents domaines.

Annexe

Fonction pour modéliser le pseudo-spectre :

```
function y=pseudo100(n,epsilon)

coeff1=1; %coeff de la diagonale supérieure
coeff2=1/4; %coeff de la diagonale inférieure

nbEps=3; %nombre de matrice epsilon
minX=-1.5; maxX=1.5; minY=-1; maxY=1;%bornes du graphique

A=coeff1*diag(ones(n-1,1),1)+coeff2*diag(ones(n-1,1),-1);
sigma=eig(A);

% fonction courbe de niveau
[X,Y]=meshgrid(minX :0.1 :maxX,minY :0.1 :maxY);
[nb_lignes_x,nb_colonnes_x]=size(X);
for k=1 :nb_lignes_x
    for l = 1 : nb_colonnes_x
        R(k,l) = norm((A - (X(k,l) + Y(k,l) * i) * eye(n))eye(n));
    end
end

%représentation graphique close all
figure(1)
hold on
contour(X,Y,R,[1/epsilon+10^8])
plot(real(sigma),imag(sigma),'r*')
for k=1 :nbEps
    Eps=epsilon*(2*rand(n,n)-ones(n,n));
    sigmaEps=eig(A+Eps);
    plot(real(sigmaEps),imag(sigmaEps),'k. ');
end
xlabel('Real')
ylabel('Imaginary')
axis([minX,maxX,minY,maxY]);
end
```

Bibliographie

Spectra and Pseudospectra : The behaviour of nonnormal Matrices and Operators (LLOYD N. TREFETHEN et MARK EMBREE)

<http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/10/98/95/PDF/manuscrit.pdf>

http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/92/44/25/PDF/VD2_HENRY_RAPHAEL_29112013.pdf

<http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/10/98/95/PDF/manuscrit.pdf>

Analyse numérique : Algorithmes et étude mathématique 2ème édition (FRANCIS FILBERT)

<http://pravda-starov.u-cergy.fr/Articles/xedp.pdf>

Bound on the number of eigenvalues near the boundary of the pseudospectrum - Proc. Amer. Math. Soc. 135 (3867-3873), 2007.(M. HAGER)

Analyse numérique : Une approche mathématique 2ème édition (MICHELLE SCHATZMAN)

http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/92/44/25/PDF/VD2_HENRY_RAPHAEL_29112013.pdf

Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur 2 : Méthodes itératives (PATRICK LASCAUX et RAYMON THEODOR)

<http://www.cs.ox.ac.uk/projects/pseudospectra/history.html>

<http://courses.engr.illinois.edu/cs591mh/fa2012/trefethen/pseudospectra.pdf>

Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004) 384-415. (N. DENCKER, J. SJÖSTRAND et M. ZWORSKI)