TD n° 5 :

Intégrales curvilignes

Exercice 5.1. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la 1-forme ω telle que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\omega_{(x,y)} = xy^2\,dx + e^x\,dy$. On note $u = (1,0)$ et $v = (2,1)$. Calculer $\omega_{(3,2)}(u)$ et $\omega_{(0,1)}(v)$.

Exercice 5.2. Calculer les intégrales curvilignes $\int_\Gamma \omega$ dans les situations suivantes :
1. $\omega = xy\,dx + (x+y)\,dy$ et Γ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ pour x allant de -1 à 2.
2. $\omega = y\sin x\,dx + x\cos y\,dy$ et Γ est le segment de droite allant de $A = (0,0)$ à $B = (1,1)$.
3. $\omega = x^2y\,dx + xy\,dy$ et Γ est le cercle unité centré en 0 et parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 5.3. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle $\omega = x^2\,dx - xy\,dy$.
1. Calculer l'intégrale de ω le long des courbes suivantes :
a. le segment de droite allant de $A = (0,0)$ à $B = (1,1)$,
b. l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ pour x allant de 0 à 1.
2. La 1-forme ω est-elle exacte ?

Exercice 5.4. On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}.$$

1. Soit $a > 0$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}_a} \omega$ lorsque
a. $\mathcal{C}_a$ le cercle de rayon a centré en 0 et parcouru dans le sens trigonométrique,
b. $\mathcal{C}_a$ le carré orienté de sommets successifs $A = (a,a)$, $B = (-a,a)$, $C = (-a,-a)$ et $D = (a,-a)$.
2. La forme ω est-elle exacte ?

Exercice 5.5. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma y^2\,dx + x^2\,dy$ lorsque
1. Γ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 - ay = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$), orientée dans le sens trigonométrique.
2. Γ est la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$ (avec $a > 0$ et $b > 0$), orientée dans le sens trigonométrique.

Exercice 5.6. On considère

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2-2x \leqslant 0 \text{ et } x^2+y^2-2y \leqslant 0\right\}.$$

Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = y\,dx + 2x\,dy$ le long du contour de D parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 5.7. On considère sur le demi-plan $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Montrer que ω est exacte et déterminer ses primitives.

Exercice 5.8. On considère sur le demi-plan $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy.$$

1. Montrer que ω est exacte et déterminer ses primitives.
2. Soit Γ une courbe C^1 par morceaux allant de $A = (1,2)$ à $B = (3,8)$. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$.

Exercice 5.9. On considère la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$.
1. Montrer que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer l'intégrale de ω sur le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, allant de $A = (1, 2)$ vers $B = (3, 4)$.
3. On considère maintenant la courbe paramétrée $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (1 + 3t - t^2, 2 + 4t - 2t^2)$. Calculer l'intégrale de ω le long de γ.

Exercice 5.10. **1.** Déterminer l'ensemble des fonctions φ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\varphi(0) = 0$ et la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega = \frac{2xy}{(1 + x^2)^2} dx + \varphi(x) dy\,,$$

est exacte.
2. Déterminer alors une primitive de ω.
3. On considère la courbe Γ d'équation $3x^2 = -7y^2 + 21$ orientée dans le sens direct. Quelle est la nature de cette courbe ? Calculer l'intégrale de ω sur Γ.

Exercice 5.11. On considère l'anneau $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Retrouver l'aire de A en utilisant la formule de Green–Riemann.

Exercice 5.12. On note ∂D le contour du domaine D défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = xy^2 dx + 2xy dy$ le long de ∂D parcouru dans le sens direct
1. en utilisant un paramétrage de ∂D,
2. en utilisant la formule de Green–Riemann.

Exercice 5.13. Utiliser le théorème de Green–Riemann pour calculer les intégrales curvilignes suivantes (les courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique)
1. $\int_{C_R} -x^2y\, dx + xy\, dy$ où C_R est le cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$,
2. $\int_{C_R} (x^2 - y)\, dx + (y^2 + x)\, dy$ où C_R est comme précédemment,
3. $\int_{\partial T} 2(x^2 + y^2)\, dx + (x + y)^2\, dy$ où ∂T est le contour du triangle de sommets $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$ et $C = (1, 3)$, parcouru dans le sens direct.

Exercice 5.14. Utiliser le théorème de Green–Riemann pour calculer l'aire du domaine délimité par la courbe paramétrée par $\theta \mapsto (\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ pour θ allant de 0 à 2π.