TD n° 1 :
Intégration sur un segment

Exercice 1.1. Déterminer les primitives des fonctions définies de la façon suivante :

1.

$$f_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad ; \quad f_2(x) = x^{\frac{4}{5}} \quad ; \quad f_3(x) = (1-x)\sqrt{x}\,;$$
$$f_4(x) = (3x+2)^3 \quad ; \quad f_5(x) = \cos(4x+1) \quad ; \quad f_6(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

2.

$$f_7(x) = (5\sin x + 2)^3 \cos x \quad ; \quad f_8(x) = \frac{1}{3x+5} \quad ; \quad f_9(x) = \frac{1}{1+e^x}\,;$$
$$f_{10}(x) = (e^{2x}+2)^4 e^{2x} \quad ; \quad f_{11}(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

3.

$$f_{12}(x) = \frac{1}{x^2+4}\,; \quad f_{13}(x) = \frac{x}{x^2+4}\,; \quad f_{14}(x) = \frac{x^2}{x^2-4}\,; \quad f_{15}(x) = \frac{1}{x^2+6x+5}.$$

4.

$$f_{16}(x) = \sin^2(x)\,; \quad f_{17}(x) = \cos^4(2x)\,; \quad f_{18}(x) = \cos(ax)\cos(bx) \text{ avec } a^2 \neq b^2.$$

Exercice 1.2. On considère la fonction f définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ x & \text{si } x \in]1,2[, \\ 0 & \text{si } x = 2, \\ -2x+5 & \text{si } x \in]2,3]. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. La fonction f est-elle intégrable sur [0,3] ? Si oui, calculer $\int_0^3 f(x)\,dx$.

Exercice 1.3. En effectuant des intégrations par parties,
1. calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (2x+1)e^x\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^e x\ln(x)\,dx \quad ; \quad I_3 = \int_1^e \ln(x)\,dx$$
$$I_4 = \int_1^e x(\ln(x))^2\,dx \quad ; \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x\,dx \quad ; \quad I_6 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\,dx$$

2. déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \arctan(x)\,; \quad f_2(x) = x^{24}\ln(x)\,; \quad f_3(x) = x\sqrt{1+x}\,; \quad f_4(x) = \ln(x^2+2).$$

Exercice 1.4. **1.** En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx,$$
$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad I_4 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

2. Déterminer les primitives de la fonction $t \mapsto \cos(\sqrt{t})$.

Exercice 1.5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour $x \in [a, b]$, on pose : $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.
1. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$ (pourquoi un tel M existe-t-il ?). Montrer que pour tous $x, y \in [a, b]$ on a :

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M\,|x - y|\,.$$

2. En déduire que la fonction F est continue sur $[a, b]$.

Exercice 1.6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue.
1. Montrer que s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.
2. Montrer que si $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
3. Montrer que le résultat de la question précédente n'est plus valable si on retire l'hypothèse de continuité ou l'hypothèse de positivité pour f.

Exercice 1.7. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 1.8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que :

$$\int_a^b f(t) \cos(nt)\, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 1.9. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt.$$

1. Montrer que f est une fonction de classe C^1.
2. Montrer que f est une fonction impaire.
3. Étudier les variations de f.
4. Soit $x > 0$.
  a. Montrer que pour tout $t \in [x, 2x]$ on a : $e^{-4x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$.
  b. En déduire que $xe^{-4x^2} \leqslant f(x) \leqslant xe^{-x^2}$.
  c. Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1.10. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1 + x)\, dx$.
1. Calculer I_0.
2. a. Montrer que $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  b. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
  c. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. a. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$ on a : $x^n \ln(1 + x) \leqslant x^n$.
  b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
  c. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. a. En effectuant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n + 1} - \frac{1}{n + 1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1 + x}\, dx.$$

  b. Étudier la convergence de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 1.11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $A \geqslant 1$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ on note

$$F_\alpha(A) = \int_1^A \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \text{et} \quad G_\alpha(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

1. Calculer $F_\alpha(A)$ et $G_\alpha(\varepsilon)$ pour tous $A \geqslant 1$ et $\varepsilon \in]0, 1]$.
2. Étudier, en fonction du paramètre α, l'existence des limites de F en $+\infty$ et de G en 0^+.