Examen Partiel - 12 mars 2014

Durée : 2 heures.

Aucun document (ni calculatrice,etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter les questions dans l'ordre, mais veillez à bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{t(t-1)}\,dt; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\,dt;$$

$$I_4 = \int_0^1 \sin(t^2)\,dt; \quad I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt.$$

Exercice 2. Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1}{\big(x - \sin(x)\big)^\alpha}\,dx.$$

On pourra commencer par vérifier que $\sin(x) < x$ *pour tout* $x \in]0,1]$.

Exercice 3. Pour tout l'exercice on fixe $a \in]0,1[$. Pour $x \in]0,+\infty[$ et $y \in [0,+\infty[$ on note

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1+ax}\right) \quad \text{et} \quad F(y) = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(y+t)}{t}\,dt.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $F(0)$.
3. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donner une expression de F' ne faisant pas intervenir d'intégrale.
4. Montrer que f admet une limite finie en 0. On prolonge alors f par continuité en 0 et on note encore f la fonction sur $[0,+\infty[$ ainsi obtenue.
5. Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$F(x) = \frac{\ln(a)^2}{2} + \int_0^x f(s)\,ds.$$

Exercice 4. Soit f une fonction continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.
1. Montrer que toute primitive de f sur $[1,+\infty[$ est bornée.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est convergente.

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1. • La fonction $x \mapsto x^3$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a $x^3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^3\,dx$ est grossièrement divergente. Ainsi l'intégrale I_1 est divergente.

• La fonction $t \mapsto \frac{-1}{t(t-1)}$ est définie et continue sur $]0,1[$ et ne prend que des valeurs positives. On a

$$\frac{-1}{t(t-1)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t},$$

et l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente (intégrale de Riemann). Par comparaison pour des fonctions à valeurs positives, on obtient que l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{t(t-1)}\,dt$ est divergente. Cela prouve que $\int_0^1 \frac{-1}{t(t-1)}\,dt$ et donc I_2 sont divergentes.

⚠Beaucoup d'entre vous ont écrit que

$$\frac{1}{t(t-1)} \geqslant \frac{1}{t^2}$$

pour $t \in]0,1[$. C'est bien entendu impossible puisque le terme de gauche est négatif et celui de droite est positif. Évidemment cela pose problème pour appliquer les théorèmes de comparaison pour des fonctions à valeurs positives. D'ailleurs l'inégalité n'est toujours pas vraie si on considère les valeurs abolues...

⚠Certains d'entre vous ont raisonné de la façon suivante. On a

$$\frac{1}{t(t-1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1},$$

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge, donc I_2 diverge. Attention, pour une intégrale qui a un problème aux deux bornes il n'y a pas de compensation possible, et si l'intégrale est divergente d'un côté elle est divergente globalement. Par contre si une fonction f s'écrit comme la somme de f_1 et f_2, il se peut que les intégrales de f_1 et/ou f_2 divergent mais que l'intégrale de f converge. Par exemple, on peut écrire $0 = f + (-f)$ et l'intégrale de 0 est toujours convergente, même si l'intégrale de f (et donc de $-f$) diverge. Remarque : si l'intégrale de f_1 diverge et l'intégrale de f converge, alors l'intégrale de f_2 diverge.

• La fonction $t \mapsto \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On a

$$\frac{2\sin(t)\cos(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 2,$$

donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\,dt$ est faussement généralisée, et donc convergente. L'application $t \mapsto 1/t$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, décroissante, et tend vers 0 en $+\infty$. La fonction $t \mapsto 2\sin(t)\cos(t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ et pour tous $x, y \in [1,+\infty[$ on a

$$\left| \int_x^y 2\sin(t)\cos(t)\,dt \right| = \left| \sin(y)^2 - \sin(x)^2 \right| \leqslant 1.$$

D'après la règle d'Abel, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\,dt$ est convergente. Finallement on obtient que l'intégrale I_3 est convergente.

• La fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$. L'intégrale I_4 n'est pas généralisée (on peut donc considérer qu'elle est convergente).
• L'application $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et ne prend que des valeurs positives. Par croissances comparées, on a

$$t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2} = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

et donc

$$\frac{\ln(t)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}\,dt$ est convergente (intégrale de Riemann), donc par comparaison pour des fonctions à valeurs positives, on obtient que l'intégrale I_5 est convergente.

On peut aussi voir que l'intégrale I_5 est convergente par calcul direct : pour $A \geqslant 1$ on a

$$\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 2. Soit $x \in]0,1]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $y \in]0,x[$ tel que

$$0 \leqslant \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \sin'(y) = \cos(y) < 1.$$

Cela prouve que $x - \sin(x) > 0$. Ainsi l'application $x \mapsto \big(x-\sin(x)\big)^{-\alpha}$ est bien définie et continue sur $]0,1]$. En outre elle ne prend que des valeurs positives. On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^3),$$

donc

$$\sin(x) - x \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^3}{6},$$

ou encore

$$x - \sin(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^3}{6}.$$

Par composition on obtient que

$$\frac{1}{\big(x-\sin(x)\big)^{\alpha}} \underset{x\to0}{\sim} \frac{6^{\alpha}}{x^{3\alpha}}.$$

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{3\alpha}}\,dx$ est convergente si et seulement si $\alpha < \frac{1}{3}$, donc par comparaison pour des fonctions à valeurs positives on obtient que I_α est intégrable si et seulement si $\alpha < \frac{1}{3}$.

Exercice 3. **1.** L'application $(t,y) \mapsto y+t$ est de classe C^∞ (car polynomiale) de $\left[1,\frac{1}{a}\right] \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi l'application $(t,y) \mapsto \ln(y+t)$ est de classe C^∞ sur $\left[1,\frac{1}{a}\right] \times \mathbb{R}_+$. En outre le dénominateur $(t,y) \mapsto t$ ne s'annule pas sur $\left[1,\frac{1}{a}\right] \times \mathbb{R}_+$, donc on obtient finalement que l'application $(t,y) \mapsto \frac{\ln(y+t)}{t}$ est de classe C^∞ sur $\left[1,\frac{1}{a}\right] \times \mathbb{R}_+$. En particulier elle est continue, donc par continuité pour une intégrale à paramètre on obtient que F est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. On a

$$F(0) = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \ln(1)^2\right) = \frac{\ln(a)^2}{2}.$$

3. On a vu a la question 1 que l'application $(t,y) \mapsto \frac{\ln(y+t)}{t}$ est de classe C^1 sur $\left[1, \frac{1}{a}\right] \times \mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $y > 0$ on a

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{1}{(y+t)t}\,dt = \frac{1}{y}\int_1^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y+t}\right) dt \\ &= \frac{1}{y}\left[\ln(t) - \ln(y+t)\right]_1^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{y}\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(y + \frac{1}{a}\right) + \ln(1+y)\right) \\ &= \frac{1}{y}\ln\left(\frac{1+y}{1+ay}\right) = f(y). \end{aligned}$$

4. On a

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - a\frac{\ln(1+ax)}{ax} \xrightarrow[x\to 0]{} 1-a.$$

5. Comme $F' = f$ est f est continue sur $[0,+\infty[$, la fonction F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$ on a

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(s)\,ds = \frac{\ln(a)^2}{2} + \int_0^x f(s)\,ds.$$

Exercice 4. 1. Pour $x \geqslant 1$ on note $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. La fonction F est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et par hypothèse elle admet une limite finie (qu'on note I) en $+\infty$. Cela implique que F est bornée sur $[1,+\infty[$ (en effet, il existe $A \geqslant 1$ tel que $F(x) \in [I-1, I+1]$ pour tout $x \geqslant A$, et la fonction F est continue donc bornée sur $[1,A]$). Toute primitive de f est donc bornée car elle ne diffère de F que par une constante.
2. Soit $A \geqslant 1$. On a

$$\int_1^A \frac{f(t)}{t}\,dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{F(t)}{t^2}\,dt.$$

Comme F est bornée, on a

$$\frac{F(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann on obtient donc que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ est convergente, et finalement

$$\int_1^A \frac{f(t)}{t}\,dt \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt.$$

Cela prouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est convergente (si on y tient vraiment, on peut aussi utiliser la règle d'Abel, ce qui est plus ou moins équivalent).