

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables. Limites dans \mathbb{R}^n .

Le but principal de ce cours est d'étudier les fonctions de plusieurs variables. En première année vous avez vu les fonctions d'une seule variable, où un paramètre réel (qui physiquement peut représenter une température, une pression, une densité massique, volumique, etc.) dépend d'un autre paramètre, également réel (le temps, une abscisse, etc).

Ici on va donc s'intéresser à des fonctions de plusieurs paramètres réels. Par exemple on peut vouloir étudier la température, la pression ou la densité volumique en fonction de la position dans l'espace (3 dimensions), de la position et de la vitesse (par exemple quelle est la densité de particules qui se trouve à cet endroit et qui va dans cette direction, ce qui fait 6 dimensions), on peut s'intéresser en plus à la dépendance par rapport au temps (une dimension supplémentaire). La quantité étudiée peut dépendre de la position de N objets, auquel cas on doit travailler avec $3N$ dimensions. Bref, les exemples ne manquent pas...

Notre exemple favori dans ce cours sera celui d'une altitude dépendant de deux paramètres (latitude et longitude ou, de façon plus abstraite, x et y). Il s'agit donc d'une fonction sur un domaine de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} . L'intérêt est que le graphe de cette fonction correspond exactement à la montagne que l'on est en train d'escalader.

Mathématiquement, on devra donc étudier des fonctions qui ne sont plus définies sur un intervalle (ou une partie quelconque) de \mathbb{R} , mais sur un domaine de \mathbb{R}^n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. L'espace d'arrivée pourra être \mathbb{R} ou bien \mathbb{R}^p pour un certain $p \in \mathbb{N}$, si la quantité qui nous intéresse est elle-même multi-dimensionnelle. On verra que le fait d'avoir plusieurs dimensions à l'arrivée n'est pas très gênant, alors que le fait d'avoir plusieurs dimensions au départ va poser un certain nombre de difficultés par rapport à ce que vous connaissez.

Les principales propriétés des fonctions de plusieurs variables auxquelles on va s'intéresser sont les questions de régularité (continuité, dérivabilité, ...) et leurs conséquences (comportement local d'une fonction, étude des extrema, ...), d'intégration, et enfin le lien entre les deux.

1.1 Fonctions de plusieurs variables

On considère une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}^n , ainsi qu'une fonction f de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^p . A tout point

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$$

on associe un point $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^p . On notera parfois

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)),$$

où f_1, \dots, f_p sont des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

L'ensemble des fonctions de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^p est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension infinie. Si λ est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} alors $\lambda f : x \mapsto \lambda(x)f(x)$ définit encore une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^p . Si g est une fonction d'une partie \mathcal{D}' de \mathbb{R}^p contenant l'image de f à valeurs dans \mathbb{R}^m , alors la composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^m .

Définition 1.1. On appelle graphe de f l'ensemble

$$\{(x, f(x)), x \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{D} \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{n+p}.$$

On observe que le graphe d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est un objet à n dimensions (en un sens qui sera précisé plus tard) dans l'espace à $(n+p)$ dimensions. Concrètement on dessine sur une page en 2 dimensions. Tant qu'on considère des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , tout va bien (un graphe est alors une courbe, objet de dimension 1, dans le plan). Quand $n = 2$ et $p = 1$, il faut dessiner en trois dimensions, ce qui est déjà moins parlant (voir tout de même la figure 1.1), et au-delà c'est essentiellement impossible. Dans tout le cours les dimensions seront quelconques, mais c'est souvent une bonne idée d'avoir en tête des exemples le cas où $n = 2$ et $p = 1$.

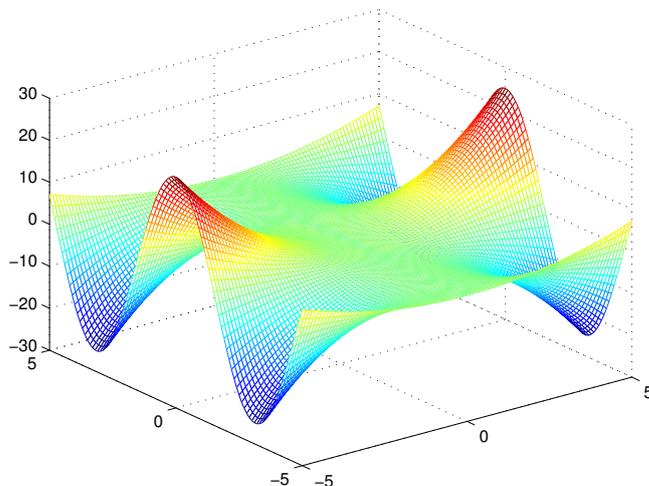


FIGURE 1.1 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto x^2 \cos(y)$.

Une autre façon de visualiser une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est de dessiner ses lignes de niveau :

Définition 1.2. On suppose que f est à valeurs réelles ($p = 1$). On appelle lignes de niveau de f les ensembles

$$\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) = \lambda\} \subset \mathcal{D}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

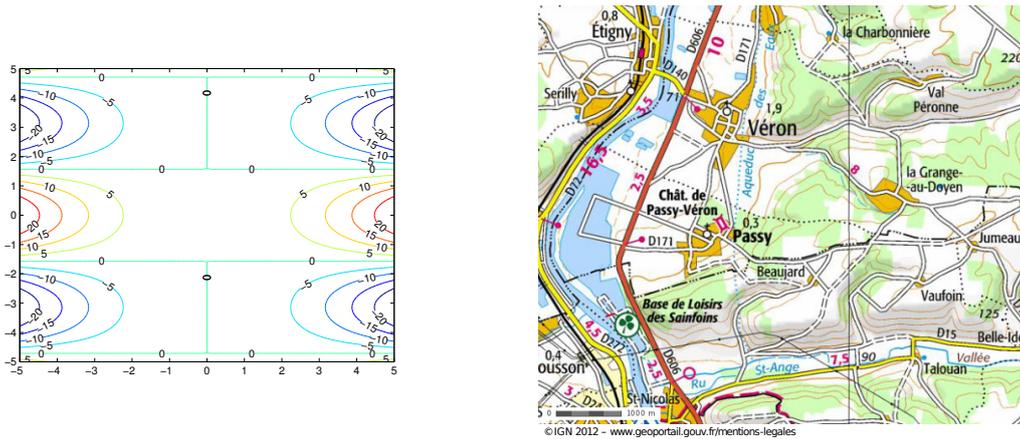


FIGURE 1.2 – Lignes de niveau pour l’application $(x, y) \mapsto x^2 \cos(y)$ et carte IGN avec lignes de niveau pour l’altitude.

1.2 Normes

Notre objectif est maintenant d’étudier la régularité des fonctions de plusieurs variables. La notion de limite, sur laquelle reposent en particulier les notions de continuité et de dérivabilité, s’appuie elle-même sur la notion de proximité entre deux points. Pour une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$ si $f(x)$ est « proche » de l dès lors que x est « assez proche » de a . Intuitivement, deux réels x et y sont proches si la valeur absolue (quantité positive) $|x - y|$ est petite, en un sens à préciser.

Avant de parler de limite pour des fonctions définies sur \mathbb{R}^n , il faut donc donner un sens précis à l’assertion « x est proche de y » lorsque x et y sont des points de \mathbb{R}^n .

En fait, on sait déjà mesurer la distance entre deux points de \mathbb{R}^n . Par exemple pour deux points $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans \mathbb{R}^2 , la longueur du segment $[x, y]$ est donnée par

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Cette quantité sera appelée distance euclidienne entre x et y . Mais ce n’est pas toujours la bonne façon de mesurer la distance entre deux points, comme le montrent les exemples suivants. Considérons un piéton dans une ville organisée par blocs (voir figure 1.3), chaque bloc faisant 500m de côté. Il devra parcourir _____m pour aller du point A au point B et _____m pour aller du point A au point C , alors que les distances euclidiennes (à vol d’oiseau) entre A et B et entre A et C sont respectivement de _____m et _____m. Marseille

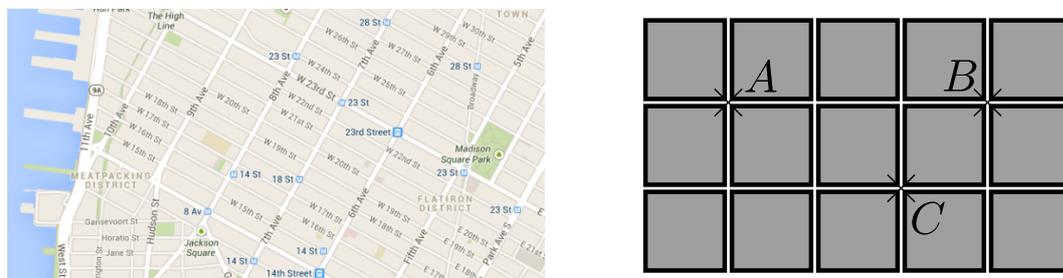


FIGURE 1.3 – Les villes américaines et les déplacements en norme l^1 .

est plus proche de Paris que de Toulouse si on regarde le temps de parcours par le train,

alors que c'est quasiment deux fois plus loin en termes de kilomètres par la route. Ainsi il y a différentes façons de mesurer la distance entre deux points, et il n'y en a pas de bonnes ou de mauvaises : chacune est plus ou moins bien adaptée à chaque contexte.

Définition 1.3. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation),
- (ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité),
- (iii) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Étant donnée une norme N sur E , on appelle distance associée à N l'application

$$d_N : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto N(x - y) \end{cases}$$

On note que toutes les distances ne sont pas obtenues de cette façon, mais on ne s'attardera pas sur ces questions dans ce cours (voir tout de même les exercices 14 et 15, plus de détails seront donnés dans le cours d'approfondissements mathématiques).

Exercice 1. Montrer que la valeur absolue est une norme sur \mathbb{R} .

Proposition 1.4. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}.$$

Alors l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Démonstration. Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont faciles et laissées en exercice. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on considère deux points $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n . Si $x + y = 0$ alors le résultat est clair. Sinon on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^n x_j(x_j + y_j) + \sum_{j=1}^n y_j(x_j + y_j) \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2} \\ &\leq (\|x\|_2 + \|y\|_2) \|x + y\|_2. \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité triangulaire en divisant par $\|x + y\|_2 \neq 0$. □

Exercice 2. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Montrer que les applications $x \mapsto \|x\|_1$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{R}^n .

1.3 Limites

Maintenant qu'on a introduit les normes, qui jouent dans \mathbb{R}^n le rôle que joue la valeur absolue dans \mathbb{R} , on peut définir la convergence d'une suite exactement de la même façon dans \mathbb{R}^n que dans \mathbb{R} , en remplaçant simplement la valeur absolue par une norme.

Définition 1.5. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soient $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $l \in E$. On dit que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers l et on note

$$x_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \quad \|x_m - l\| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit x_m tend vers l si la quantité réelle $\|x_m - l\|$ tend vers 0 au sens usuel.

Sans surprise, on retrouve les mêmes propriétés de base que pour la limite d'une suite réelle :

Proposition 1.6. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

(i) Unicité de la limite. Soient $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $l_1 \in E$ et $l_2 \in E$. Si $x_m \rightarrow l_1$ et $x_m \rightarrow l_2$ quand m tend vers $+\infty$, alors $l_1 = l_2$.

(ii) Linéarité de la limite. Soient $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E . Soient $l_1, l_2 \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si

$$x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} l_1 \quad \text{et} \quad y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} l_2,$$

alors

$$\lambda x_m + \mu y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lambda l_1 + \mu l_2.$$

Exercice 3. Démontrer la proposition 1.6 (la démonstration est la même que pour les limites dans \mathbb{R}).

Définition 1.7. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soient N_1, N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $x \in E$ on a

$$N_1(x) \leq CN_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leq CN_1(x).$$

L'intérêt de cette nouvelle définition est illustré par l'exercice 4. La difficulté avec la définition 1.5 est qu'elle dépend a priori de la norme dont l'espace E est muni. Ainsi, une suite peut converger vers une certaine limite pour une norme, ne pas être convergente pour une autre norme, ou encore converger vers une limite différente pour une troisième norme. Ce n'est pas très agréable.

Lorsque deux normes sont équivalentes, il est facile de voir qu'une suite converge vers une certaine limite pour l'une des deux normes si et seulement c'est aussi le cas pour l'autre. C'est bien mieux.

Exercice 4. 1. Montrer que les trois normes $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n sont deux à deux équivalentes.

2. Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de points de \mathbb{R}^n et $l \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\|x_m - l\|_1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \iff \|x_m - l\|_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \iff \|x_m - l\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

La vraie bonne nouvelle est qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Comme on travaillera en dimension finie dans tout ce cours, cela signifie qu'on pourra parler de limite sans préciser la norme avec laquelle on travaille. Dans la suite, lorsqu'on parlera d'une norme sur \mathbb{R}^n , on ne précisera donc la norme utilisée que quand ce sera nécessaire. Sinon cela signifiera que le résultat énoncé ne dépend pas du choix de la norme.

Attention tout de même à bien garder en tête cette subtilité, car tous les espaces ne sont pas de dimension finie, loin de là...

Proposition 1.8. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration. La démonstration de ce résultat sera admise pour ce cours. Elle sera donnée dans le cours d'approfondissements mathématiques. \square

On munit maintenant \mathbb{R}^n d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.9. On dit que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{R}^n est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall j, k \geq N, \quad \|x_j - x_k\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.10. \mathbb{R}^n est complet. Cela signifie que toute suite de Cauchy dans \mathbb{R}^n est convergente.

Démonstration. Voir le cours d'approfondissements mathématiques. \square

1.4 Ouverts et fermés.

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Définition 1.11. Pour $x \in E$ et $r > 0$ on note

$$B(x, r) = \{y \in E \mid \|x - y\| < r\}$$

la boule ouverte de centre x et de rayon r ,

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E \mid \|x - y\| \leq r\}$$

la boule fermée de centre x et de rayon r , et enfin

$$S(x, r) = \{y \in E \mid \|x - y\| = r\}$$

la sphère de centre x et de rayon r .

Définition 1.12. Soit Ω une partie de E . On dit que Ω est ouvert si pour tout $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$. On dit que Ω est fermé si son complémentaire $E \setminus \Omega$ est ouvert.

Exemple 1.13. Dans $E = \mathbb{R}$, muni de la valeur absolue :

- Un intervalle de la forme $]a, b[$ avec $a < b$ est ouvert,
- un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a \leq b$ est fermé,
- un intervalle de la forme $]a, b]$ ou $[a, b[$ avec $a < b$ n'est ni ouvert ni fermé,
- \mathbb{R} et l'ensemble vide \emptyset sont à la fois ouverts et fermés.

Exemple 1.14. • Une boule ouverte est un ensemble ouvert de E ,

- une boule fermée ou une sphère sont des ensembles fermés de E .

Démonstration. On montre la première assertion de l'exemple 1.14. Soit $x \in E$ et $r > 0$. On considère $y \in B(x, r)$ et on note $\rho = r - \|y - x\| > 0$. Alors on a $B(y, \rho) \subset B(x, r)$. En effet pour tout $z \in B(y, \rho)$ on a par l'inégalité triangulaire

$$\|z - x\| \leq \|(z - y) + (y - x)\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \rho + (r - \rho) = r.$$

Cela prouve que $B(x, r)$ est une partie ouverte de E . \square

Exercice 5. Démontrer les autres assertions des exemples 1.13 et 1.14.

Définition 1.15. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et \mathcal{V} une partie de \mathbb{R}^n . On dit que \mathcal{V} est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

Remarque 1.16. Tout ouvert de \mathbb{R}^n contenant a est un voisinage de a , mais tous les voisinages de a ne sont pas des ouverts de \mathbb{R}^n .

Par la suite on dira qu'une propriété est vraie au voisinage de a s'il existe un voisinage de a sur lequel elle est vraie. Par exemple l'assertion « $f \geq 0$ au voisinage de a » signifie qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r)$ on a $f(x) \geq 0$.

1.5 Exercices

Exercice 6. Déterminer et représenter le domaine de définition maximal des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}} \quad ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto \ln(x + y) \quad ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{\ln(y)}{\sqrt{x - y}}.$$

Exercice 7. Déterminer et représenter les lignes de niveau des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto x \quad ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto y \quad ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto 1$$

$$f_4 : (x, y) \mapsto x + y + 1 \quad ; \quad f_5 : (x, y) \mapsto e^{y - x^2} \quad ; \quad f_6 : (x, y) \mapsto y - \cos(x).$$

Exercice 8. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f_1(x, y) = \sin(x) - \sin(y), \quad f_2(x, y) = \sin(xy), \quad f_3(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \left(1 - \frac{y^2}{9}\right),$$

$$f_4(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}, \quad f_5(x, y) = \cos(x)e^{\frac{y}{5}}, \quad f_6(x, y) = \sin(x - y).$$

Associer à chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 son graphe (voir Figure 1.4) et ses lignes de niveau (voir Figure 1.5).

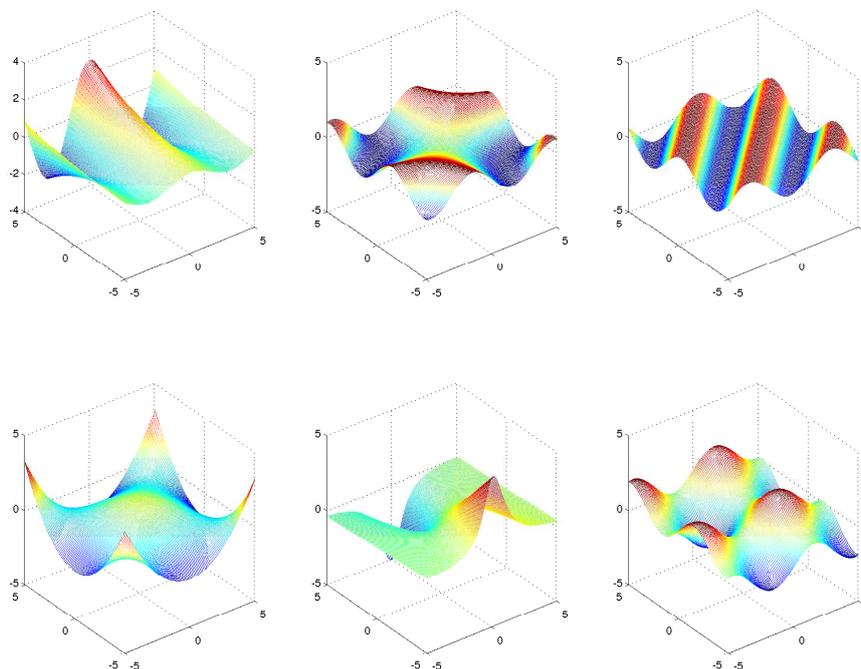


FIGURE 1.4 – Graphes pour l'exercice 8.

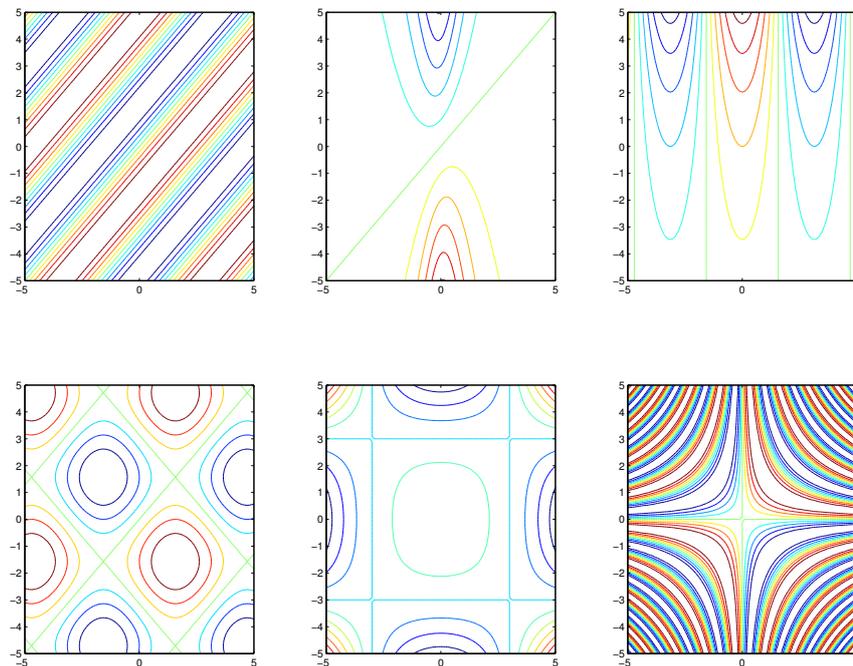


FIGURE 1.5 – Lignes de niveau pour l'exercice 8.

Exercice 9. Dessiner dans \mathbb{R}^2 la boule de rayon 1 et de centre 0 pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$

Exercice 10. Pour $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$x_m = \left(\frac{1}{1+m}, 1 + e^{-m} \right)$$

1. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Pour aller plus loin

Exercice 11. On note E l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ on note

$$\|u\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

(la somme est une somme finie).

1. Vérifier que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension infinie.
2. Montrer que les applications $u \mapsto \|u\|_1$ et $u \mapsto \|u\|_\infty$ sont des normes sur E .
3. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 12. Soit F une partie de \mathbb{R}^n . Montrer que F est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers un certain $l \in \mathbb{R}^n$ on a $l \in F$.

Exercice 13. On appelle distance sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y, z \in E$ on a

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur E alors l'application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E .

Exercice 14. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur \mathbb{R}^n .
2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n telle que $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 15. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^2 . On note $O = (0, 0)$ l'origine de \mathbb{R}^2 . Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on note

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{si les points } x, y \text{ et } O \text{ sont alignés,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur \mathbb{R}^2 .
2. Dessiner la boule fermée de centre $x_0 = (0, 2)$ et de rayon 3, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $d(x, x_0) \leq 3$.
3. On considère la suite $x_m = (1, \frac{1}{m+1})$ de points de \mathbb{R}^2 . Montrer que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $x = (1, 0)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, mais que $d(x_m, x)$ ne tend pas vers 0 quand m tend vers $+\infty$.
4. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^2 telle que $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 16. On a déjà défini les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n . Plus généralement pour $p \in [1, +\infty[$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur \mathbb{R}^n (*L'inégalité triangulaire pour cette norme est l'inégalité de Minkowski, qui repose elle-même sur l'inégalité de Hölder*).
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|x\|_\infty.$$

Chapitre 2

Continuité d'une fonction de plusieurs variables

Maintenant qu'on a défini la notion de limite pour des suites dans \mathbb{R}^n , la notion de continuité s'étend sans problème à des fonctions de plusieurs variables. En outre, bon nombre des propriétés des fonctions continues connues pour les fonctions d'une variable seront encore valables ici.

2.1 Fonctions continues

Soit \mathcal{D} une partie de \mathbb{R}^n et f une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^p .

Définition 2.1. Soit $a \in \mathcal{D}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. On dit que f tend vers l en a et on note

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - l\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.2. De même que pour la limite d'une suite, la limite d'une fonction en un point ne dépend pas du choix des normes sur \mathbb{R}^n et sur \mathbb{R}^p , qui sont des espaces de dimensions finies.

Les définitions suivantes sont sans surprise :

Définition 2.3. Soit $a \in \mathcal{D}$.

- (i) On dit que f est continue en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a .
- (ii) On dit que f est continue sur \mathcal{D} si elle est continue en tout point de \mathcal{D} .

Exercice 1. 1. Montrer qu'une fonction constante est continue.

2. Montrer que l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

3. Montrer que toute norme sur \mathbb{R}^n définit une fonction continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Proposition 2.4. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p . Soit h une fonction continue de $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^m .

- La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur \mathcal{D} (l'ensemble des fonctions continues de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^p est un \mathbb{R} -espace vectoriel).
- Si $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}$, alors fg est continue sur \mathcal{D} . Si de plus g ne s'annule pas sur \mathcal{D} , alors f/g est continue.
- Si \mathcal{D}' contient l'image de g , alors la fonction $h \circ g$ est continue de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^m .

Exercice 2. Montrer la proposition 2.4.

On appelle fonction polynômiale sur \mathbb{R}^n une application qui s'écrit comme une somme de termes qui sont eux-mêmes des produits de fonctions coordonnées. En langage mathématiques, c'est une fonction de la forme

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \leq N} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

avec $N \in \mathbb{N}$. Par exemples les fonctions suivantes sont polynômiales : $(x, y) \mapsto xy^4 + x^3y^2$, $(x, y, z) \mapsto x + xyz + y^2z^2$.

Une fraction rationnelle est une fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômiales.

Corollaire 2.5. *Toute fonction polynômiale sur \mathbb{R}^n est continue. Plus généralement toute fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est bien définie et continue sur ce domaine.*

On énonce maintenant le critère séquentiel pour la continuité en un point :

Proposition 2.6. *Soit f une fonction de \mathcal{D} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Soit $a \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a la suite $(f(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.*

Comme pour une fonction d'une variable réelle, cette propriété sert souvent à montrer qu'une fonction n'est pas continue.

Exemple 2.7. On considère sur \mathbb{R}^2 l'application f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(voir figure 2.1). La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. D'autre part on a

$$f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = f(0, 0),$$

et pourtant f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet si on note $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors u_n tend vers $(0, 0)$ mais $f(u_n)$ ne tend pas vers $f(0, 0)$ quand n tend vers $+\infty$.

Plutôt que d'utiliser des suites et la proposition 2.6, on peut préférer utiliser la composition de fonctions continues pour aboutir à la même conclusion : l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t) \in \mathbb{R}^2$ est continue en 0, donc si f est continue en $(0, 0) = \varphi(0)$ l'application $f \circ \varphi$ est continue en 0. Or $f(\varphi(0)) = 0$ et $f(\varphi(t)) = \frac{1}{2}$ pour tout $t \neq 0$, ce qui donne une contradiction et prouve par l'absurde que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

⚠ C'est une erreur trop fréquente que de se contenter de vérifier la continuité des fonctions $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ pour prouver la continuité de f . On voit bien sur cet exemple que ce n'est malheureusement pas suffisant...

La proposition qui suit permet elle de montrer efficacement la continuité d'une fonction en un point de \mathbb{R}^2 :

Proposition 2.8. *Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R} . Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en a si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en 0 et telle que pour tous $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a*

$$|f(a_1 + r \cos(\theta), a_2 + r \sin(\theta)) - f(a_1, a_2)| \leq \varepsilon(r).$$

Démonstration. On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Pour $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\|(a_1 + r \cos(\theta), a_2 + r \sin(\theta)) - (a_1, a_2)\|_2 = r.$$

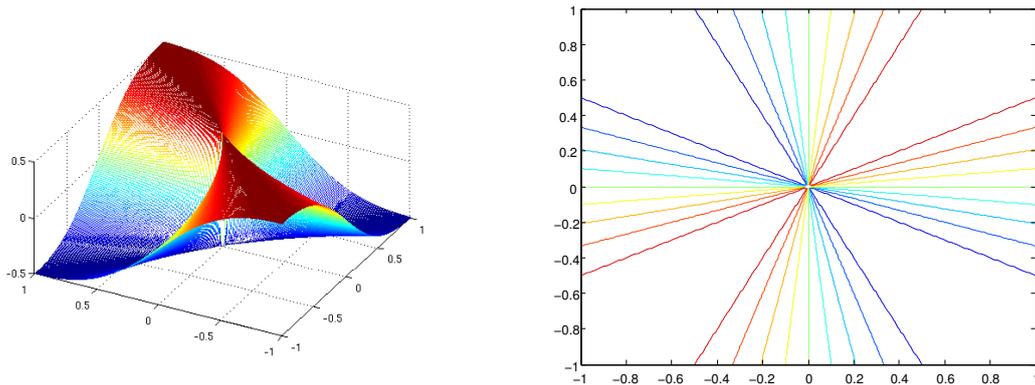


FIGURE 2.1 – Graphe et lignes de niveau pour le contre-exemple 2.7 : autour de $(0,0)$ on trouve toutes les valeurs entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; en particulier f n'est pas continue.

On suppose que f est continue en a . Pour $r \geq 0$ on note

$$\varepsilon(r) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a_1 + r \cos(\theta), a_2 + r \sin(\theta)) - f(a_1, a_2)| \geq 0$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ si $\|x - a\|_2 \leq \delta$, donc $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_0$ si $r \leq \delta$. Cela prouve que $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. Inversement, supposons qu'une telle fonction ε existe. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_0$ si $r \leq \delta$. Soit alors $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x - a\|_2 \leq \delta$. Alors il existe $r \in [0, \delta]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $x = (a_1 + r \cos(\theta), a_2 + r \sin(\theta))$. On a alors

$$|f(a_1 + r \cos(\theta), a_2 + r \sin(\theta)) - f(a_1, a_2)| \leq \varepsilon(r) \leq \varepsilon_0.$$

Cela prouve que f est continue en a . □

Exemple 2.9. On considère sur \mathbb{R}^2 l'application f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On étudie maintenant la continuité en $(0, 0)$. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| = \frac{r^4 \cos^2(\theta)^2 \sin^2(\theta)^2}{r^2} \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Cela prouve que f est continue en $(0, 0)$.

2.2 Encore un peu de topologie

Définition 2.10. On dit d'une partie de \mathbb{R}^n qu'elle est compacte si elle est fermée et bornée.

Attention, cette définition est propre à la dimension finie. Il y a d'autres définitions équivalentes de la compacité qui elles sont encore valables en dimension infinie. Mais on ne s'attardera pas sur la notion de compacité dans ce cours (là encore, ce sera fait dans le cours d'approfondissements mathématiques).

La proposition suivante généralise le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un segment est continue et atteint ses bornes :

Proposition 2.11. *L'image d'un compact par une fonction continue est compacte.*

Corollaire 2.12. *Soit K un compact de \mathbb{R}^n et f une fonction continue de K dans \mathbb{R} . Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

2.3 Fonctions contractantes - théorème du point fixe

Soit f une fonction d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^p .

Définition 2.13. Soit $K \geq 0$. On dit que f est K -lipschitzienne si

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

On dit que f est lipschitzienne si elle est K -lipschitzienne pour un certain $K \geq 0$.

Remarque 2.14. Attention, la constante de Lipschitz K dépend du choix des normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p . Par contre, par équivalence des normes, le fait qu'une fonction soit lipschitzienne ou non ne dépend pas des normes choisies.

Proposition 2.15. Une fonction lipschitzienne est continue.

Exercice 3. Démontrer la proposition 2.15.

Définition 2.16. On dit que f est contractante si elle est K -lipschitzienne pour un certain $K \in [0, 1[$.

On montre maintenant un résultat qui nous sera utile au chapitre 6 pour montrer les théorèmes de l'inversion locale et des fonctions implicites. C'est un théorème qui est également très utile par ailleurs. Par exemple, c'est aussi sur le théorème du point fixe que repose le théorème de Cauchy-Lipschitz, point de départ de la théorie des équations différentielles.

Théorème 2.17 (Théorème du point fixe). Soit Ω une partie fermée de \mathbb{R}^n et f une fonction contractante de Ω dans Ω . Alors f admet un unique point fixe a (solution de l'équation $f(a) = a$) dans Ω . En outre si on se donne $x_0 \in \Omega$ et si on définit par récurrence $x_{m+1} = f(x_m)$, alors x_m tend vers cet unique point fixe quand m tend vers l'infini. Plus précisément on a

$$\|x_m - a\| \leq \frac{K^m}{1 - K} \|x_1 - x_0\|.$$

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, montrer que la conclusion du théorème du point fixe n'est pas vérifiée, puis expliciter l'hypothèse qui n'est pas satisfaite :

- (i) $\Omega =]0, 1[$ et $f : x \mapsto x/2$,
- (ii) $\Omega = [0, 1]$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
- (iii) $\Omega = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
- (iv) $\Omega = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f : x \mapsto \sin(x)$.

Démonstration. On suppose que x et y sont deux points fixes de f . Alors on a

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|,$$

ce qui implique que $\|x - y\| = 0$ et donc que $x = y$. Cela prouve l'unicité d'un éventuel point fixe pour f . Soit maintenant $x_0 \in \Omega$. Comme Ω est stable par f , on peut poser par récurrence $x_m = f(x_{m-1})$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a alors

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \|f(x_m) - f(x_{m-1})\| \leq K \|x_m - x_{m-1}\|,$$

et donc on obtient par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leq K^m \|x_1 - x_0\|.$$

Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\|x_{m+l} - x_m\| \leq \sum_{i=0}^{l-1} \|x_{m+i+1} - x_{m+i}\| \leq \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{l-1} K^{i+m} \leq K^m \frac{\|x_1 - x_0\|}{1 - K} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Cela prouve que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque \mathbb{R}^n est complet, elle converge vers une limite x . Comme Ω est fermé, cette limite appartient à Ω . Enfin pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a

$$x_{m+1} = f(x_m).$$

Comme f est contractante elle est continue sur Ω , donc par passage à la limite ($m \rightarrow \infty$) on obtient

$$x = f(x).$$

D'où l'existence d'un point fixe et la propriété d'approximation par des suites. □

En fait on aura besoin d'une version à paramètre de ce théorème du point fixe. On peut éventuellement omettre cette version raffinée en première lecture :

Théorème 2.18 (Théorème du point fixe à paramètre). *Soit Ω une partie fermée de \mathbb{R}^n et Λ une partie de \mathbb{R}^m . Soit f une fonction continue de $\Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{n+m}$ dans Ω . On suppose que f est uniformément contractante : il existe $K \in [0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in \Lambda$ on a*

$$\|f(x, \lambda) - f(y, \lambda)\| \leq K \|x - y\|.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $x \mapsto f(x, \lambda)$ admet un unique point fixe a_λ (solution de l'équation $f(a_\lambda, \lambda) = a_\lambda$) dans Ω . En outre l'application $\lambda \mapsto a_\lambda$ est continue de Λ dans Ω .

Démonstration. L'existence et l'unicité du point fixe a_λ résultent pour chaque $\lambda \in \Lambda$ du théorème 2.17. Il suffit de montrer la continuité. Soient $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$. Par l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} \|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| &= \|f(a_\lambda, \lambda) - f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)\| \\ &\leq \|f(a_\lambda, \lambda) - f(a_{\lambda_0}, \lambda)\| + \|f(a_{\lambda_0}, \lambda) - f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)\| \\ &\leq K \|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| + \|f(a_{\lambda_0}, \lambda) - f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)\|. \end{aligned}$$

On obtient

$$\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| \leq \frac{1}{1-K} \|f(a_{\lambda_0}, \lambda) - f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)\|,$$

et donc la continuité de $\lambda \mapsto a_\lambda$ en λ_0 est conséquence de la continuité de f au point $(a_{\lambda_0}, \lambda_0)$. □

2.4 Dérivabilité pour une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^p .

On considère dans ce paragraphe une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^p :

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{cases}$$

où f_1, \dots, f_p sont des fonctions de I dans \mathbb{R} .

Exercice 5. Montrer que f est continue sur I si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_p le sont.

On anticipe maintenant sur le prochain chapitre en commençant à parler de dérivabilité. La dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle est définie de la même façon quand elle est à valeurs dans \mathbb{R}^p que quand elle est à valeurs dans \mathbb{R} :

Définition 2.19. • Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si le quotient

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \tag{2.1}$$

admet une limite dans \mathbb{R}^p quand t tend vers t_0 . Dans ce cas on note $f'(t_0)$ cette limite.

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I . Dans ce cas on appelle fonction dérivée l'application $f' : t_0 \mapsto f'(t_0)$.

Exercice 6. Montrer que f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_p le sont, et que dans ce cas on a pour tout $t \in I$:

$$f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_p(t)).$$

A la lumière des exercices 5 et 6 on voit que l'étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^p ne pose pas vraiment de difficulté nouvelle. Il suffit de travailler coordonnées par coordonnées. Ainsi on retrouve sans problèmes les propriétés de base de la dérivée (linéarité, dérivation du produit entre une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, dérivée de la composée $f \circ g$ où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, etc.)

Il faut tout de même faire attention à quelques subtilités. Par exemple le théorème de Rolle et ses conséquences ne sont plus valables pour une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^p .

Exemple 2.20. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$$

Alors f est dérivable sur \mathbb{R} , on a $f'(0) = f'(2\pi)$, et pourtant la dérivée f' ne s'annule jamais.

La semaine prochaine...

Dans ce chapitre on a vu comment généraliser la notion de continuité pour des fonctions de plusieurs variables. On a également vu que la notion de dérivabilité ne pose pas de réel problème pour une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^p . Par contre on se doute que les soucis vont arriver lorsqu'on voudra dériver des fonctions de plusieurs variables, puisque si t et t_0 sont des points de \mathbb{R}^n le quotient (2.1) n'a pas de sens.

On cherchera dans le chapitre suivant à généraliser les notions de dérivabilité. Pour cela

- bien revoir la notion de dérivabilité pour une fonction d'une variable, et surtout bien se rappeler pourquoi c'est une notion intéressante, voir parmi les applications lesquelles pourraient être généralisées à des fonctions de plusieurs variables,
- voir pourquoi la définition utilisée en dimension 1 ne peut pas être transposée brutalement en dimension supérieure,
- essayer de proposer une définition de dérivée en dimension supérieure qui permet de retrouver autant que possible les bonnes propriétés de la dimension 1,
- ...

2.5 Exercices

Exercice 7. Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en $(0,0)$ pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine de \mathbb{R}^2 possible) par

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & f_2(x, y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2}, & f_3(x, y) &= \frac{xy}{x + y}, \\ f_4(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & f_5(x, y) &= (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & f_6(x, y) &= \frac{x + y}{x^2 + y^2}, \\ f_7(x, y) &= \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin(y), & f_8(x, y) &= \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & f_9(x, y) &= \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Les limites suivantes existent-elles :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2} \quad ?$$

Exercice 9. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis déterminer si elles sont prolongeables par continuité sur \mathbb{R}^2 :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \quad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{y \sin(x+1)}{x^2 - 2x + 1}, \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}.$$

Exercice 10. Soit f une fonction continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Montrer que le théorème des valeurs intermédiaires est vérifié : si les réels a et b sont dans l'image de f alors tous les réels entre a et b le sont également. Autrement dit, l'image de f est un intervalle de \mathbb{R} . Question subsidiaire (dont la réponse sera donnée dans le cours d'approfondissement mathématiques) : dans quelle mesure ce résultat se généralise au cas où f est à valeurs dans \mathbb{R}^p et son domaine n'est pas nécessairement \mathbb{R}^n tout entier ?

Chapitre 3

Dérivées partielles, différentielle, fonctions de classe C^1

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de dérivée pour une fonction f de plusieurs variables. L'objectif est évidemment de donner une définition qui permet de retrouver autant que possible toutes les bonnes propriétés de la dérivation d'une fonction d'une variable :

- En tout point x_0 où la fonction est dérivable, la dérivée doit permettre de définir une fonction simple qui approche bien f au moins pour des points proches de x_0 , comme c'est le cas pour l'application $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ en dimension 1.
- En particulier on attend d'une fonction dérivable qu'elle soit continue.
- La dérivée doit permettre d'étudier les variations de f , localiser et étudier les extréma.
- ...

Pour tout ce chapitre, on se donne un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , une fonction f de \mathcal{U} dans \mathbb{R}^p et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{U}$. On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

3.1 Dérivées partielles

Définition 3.1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de f existe au point a si l'application

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

(définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}^p) est dérivable en 0. Dans ce cas on note

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \quad \text{ou} \quad \partial_k f(a)$$

cette dérivée.

- On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de f existe sur \mathcal{U} si elle existe en tout point de \mathcal{U} .

Les dérivées partielles ne sont finalement rien de plus que des dérivées au sens usuel. Pour dériver par rapport à une variable on considère que toutes les autres sont des constantes et on dérive alors par rapport à la variable qui nous intéresse comme on a l'habitude.

Remarque 3.2. Souvent, on note (x, y) et (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2) et (x_1, x_2, x_3) les points de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 respectivement. Dans ce cas on notera par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$ la dérivée partielle par rapport à la première variable. C'est une habitude à laquelle on peut se fier. Mais les choses peuvent devenir ambiguës quand d'autres variables entrent en jeu, typiquement lorsqu'on change de coordonnées. Il faudra donc être vigilant en lisant et en écrivant des calculs faisant intervenir des dérivées partielles...

Exercice 1. 1 On considère sur \mathbb{R}^2 les fonctions

$$f_1 : (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}, \quad f_2 : (x, y) \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad f_3 : (x, y) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que f_1, f_2, f_3 admettent en tout point de \mathbb{R}^2 des dérivées partielles par rapport à x et à y , et les expliciter.

Exercice 2. Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles en tout point des fonctions définies par

$$f_1(x, y) = e^x \cos(y), \quad f_2(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}, \quad f_3(x, y) = x^y \quad (\text{pour } x > 0).$$

L'exemple suivant montre que l'étude des dérivées partielles ne répond pas à toutes nos attentes puisqu'une fonction peut avoir des dérivées partielles bien définies en tout point sans nécessairement être continue :

Remarque 3.3. L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet en tout point de \mathbb{R}^2 des dérivées partielles selon x et selon y mais n'est pas continue en $(0, 0)$ (voir l'exemple 2.7)

L'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$ pour une fonction f définie sur \mathbb{R}^2 assure que f « paraît continue » tant qu'on se déplace le long des axes des abscisses ou des ordonnées. Dans l'exemple précédent, le problème vient du fait que ce n'est plus du tout le cas si on approche du point $(0, 0)$ en suivant par exemple la droite d'équation $x = y$.

Ce problème peut être évité si au lieu de ne considérer que les dérivées partielles, c'est-à-dire les dérivées selon les directions données par les axes, on considère les dérivées selon toutes les directions possibles :

Définition 3.4. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f admet une dérivée en a suivant v si l'application $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. La dérivée $\varphi'(0)$ est alors appelée dérivée de f en a suivant v .

Remarque 3.5. Si elle existe, la k -ième dérivée partielle de f au point a n'est autre que la dérivée de f en a suivant e_k .

Exercice 3. Calculer la dérivée de l'application $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ au point $a = (1, 2)$ suivant le vecteur $v = (3, 5)$.

Remarque 3.6. Malheureusement cette nouvelle définition ne résoud pas notre problème, puisqu'une fonction peut admettre des dérivées selon tout vecteur en un point sans pour autant être continue en ce point. Considérons par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées selon tout vecteur en tout point mais n'est pas continue (voir exercice 13).

3.2 Fonctions différentiables

3.2.1 Différentielle

Définition 3.7. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $d_a f$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p telle que

$$f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Autrement dit il existe une application ε_a définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^p telle que $\varepsilon_a(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_a(h).$$

Remarque 3.8. On écrira parfois $df(a)$ au lieu de $d_a f$.

Remarque 3.9. On rappelle (sinon ce sera vu en approfondissements mathématiques) qu'en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues. Cela signifie en particulier que

$$\|d_a f\| := \sup_{h \neq 0} \frac{\|d_a f(h)\|}{\|h\|}$$

est bien défini.

Proposition 3.10. *Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .*

Démonstration. Avec les notations de la définition 3.7 on a $h \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|d_a f(h)\| + \|h\| \|\varepsilon_a(h)\| \leq \|h\| (\|d_a f\| + \|\varepsilon_a(h)\|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Proposition 3.11. *Si f est différentiable en a , alors elle est dérivable en a suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et cette dérivée vaut $d_a f(v)$.*

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit on a

$$f(a+tv) = f(a) + d_a f(tv) + \|tv\| \varepsilon_a(tv) = f(a) + td_a f(v) + o_{t \rightarrow 0}(t).$$

Cela prouve que $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 de dérivée $d_a f(v)$. □

Exemples 3.12. • Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en a et dans ce cas $d_a f$ est l'application $h \mapsto hf'(a)$.

- Une application constante est différentiable en tout point de différentielle nulle.
- Soit L une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$L(a+h) = L(a) + L(h)$$

Ainsi L est différentiable en a de différentielle $d_a L = L$.

Proposition 3.13. *On suppose que f est différentiable en a . Alors toutes les dérivées partielles de f existent au point a et pour tout $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(v) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Autrement dit :

$$d_a f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k^*,$$

où (e_1^*, \dots, e_n^*) est la base duale de la base canonique.

Démonstration. Le fait que les dérivées partielles de f existent au point a résulte de la proposition 3.11 appliquée avec les vecteurs de la base canonique. Par linéarité de $d_a f$ on a

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_{k=1}^n v_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n v_k d_a f(e_k) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a). \quad \square$$

3.2.2 Plan tangent

On suppose que f est différentiable en a . Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note

$$g(x) = f(a) + d_a f(x - a)$$

(on note que cette définition a un sens même si f n'est pas définie sur tout \mathbb{R}^n). Alors g est une application affine (une constante + une application linéaire) telle que

$$f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow a}(\|x - a\|)$$

g est en fait la seule application affine à avoir cette propriété. L'image de \mathbb{R}^n par l'application g est appelée plan tangent au graphe de f au point a .

Supposons que $n = 2$ et $p = 1$. Alors le graphe de f est une « surface » de \mathbb{R}^3 , et le plan tangent au graphe de f est véritablement un plan de \mathbb{R}^3 . C'est le plan qui est proche du graphe de f quand on « zoome » sur le point $(a, f(a))$ (voir figure 3.1).

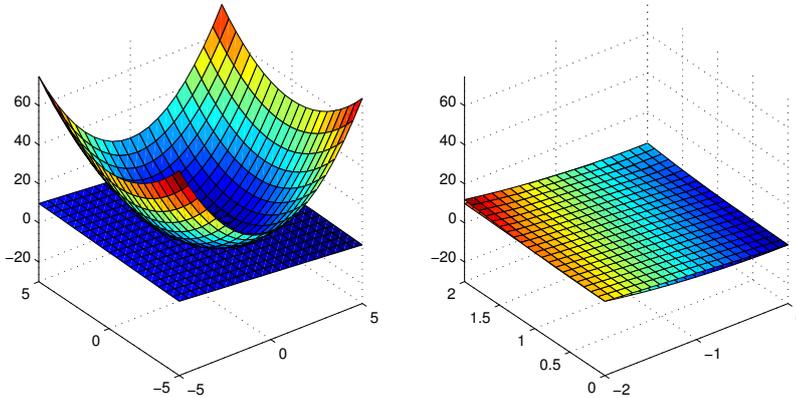


FIGURE 3.1 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2$ et son plan tangent au point $(-1, 1)$. Si on zoome autour du point $(-1, 1, f(-1, 1))$, le graphe et le plan tangent paraissent quasiment confondus.

3.2.3 Vecteur gradient

On suppose dans ce paragraphe que $p = 1$, c'est-à-dire que f est à valeurs réelles.

Définition 3.14. Soit $a \in \mathcal{U}$. On appelle gradient de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 3.15. Pour tout $a \in \mathcal{U}$ le gradient $\nabla f(a)$ est l'unique vecteur tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle,$$

où pour deux vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n on a noté $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire usuel $\sum_{j=1}^n u_j v_j$.

Démonstration. C'est clair d'après la proposition 3.13. □

Le vecteur gradient indique en chaque point la direction de plus grande pente. Dans la montagne, si vous voulez prendre la pente la plus dure, il faut suivre le gradient de la fonction altitude. Si vous voulez descendre le plus possible, il faut au contraire suivre la direction opposée. Et si vous voulez garder la même altitude, c'est-à-dire rester sur votre ligne de niveau, il faut alors suivre une direction orthogonale. En particulier le vecteur gradient est en tout point orthogonal aux lignes de niveau (en un sens à préciser...).

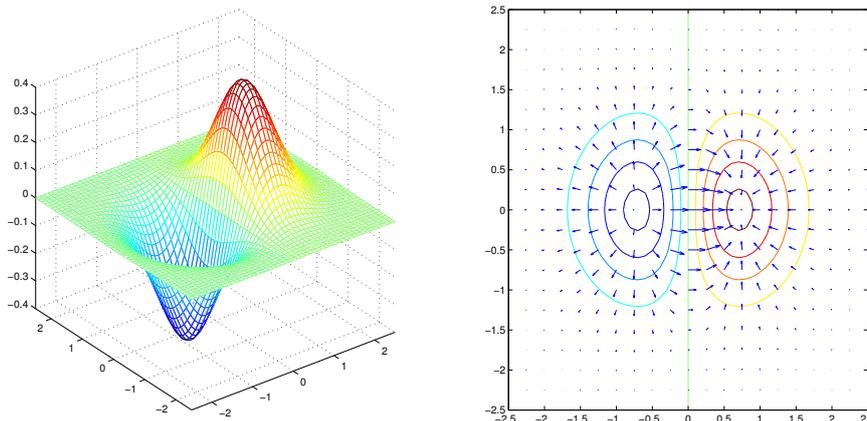


FIGURE 3.2 – Le graphe, les lignes de niveau, et le gradient de l'application $f : (x, y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.

Exercice 4. Déterminer en tout point de \mathbb{R}^2 le vecteur gradient de l'application $f : (x, y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.

3.2.4 Matrice jacobienne

On revient au cas général où f peut être à valeurs dans \mathbb{R}^p pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}^*$.

On introduit maintenant la matrice jacobienne d'une application différentiable. Il n'y a pas de concept nouveau, on donne simplement un nom à la matrice de la différentielle :

Définition 3.16. Si f est différentiable en a , alors on appelle matrice jacobienne de f en a et on note $\text{Jac}_a f$ la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p :

$$\text{Jac}_a f = \text{Jac } f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Exemple 3.17. Coordonnées polaires : on considère sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'application $\psi : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Alors ψ est différentiable et sa matrice jacobienne au point (r, θ) est

$$\text{Jac } \psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le fait que ψ est partout différentiable sera une conséquence du théorème 3.21.

Exercice 5. Écrire la matrice jacobienne de l'application $(x, y, z) \mapsto (xyz, x^2y + y)$ en tout point de \mathbb{R}^3 .

3.2.5 Addition et composition de fonctions différentiables

On termine cette section par la linéarité de la différentielle, puis par la composition de fonctions différentiables :

Proposition 3.18. *On suppose que f et g sont deux fonctions de \mathcal{U} dans \mathbb{R}^p différentiables en a . Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a de différentielle*

$$d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g.$$

La propriété suivante généralise la propriété de dérivation pour la composée de fonctions d'une variable réelle. Il n'y a pas particulièrement de difficulté nouvelle par rapport à la dimension 1, mais il faut être vigilant car les notations commencent à devenir un peu lourdes...

Proposition 3.19. *On suppose que $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Soient \mathcal{V} un ouvert de \mathbb{R}^p contenant $f(\mathcal{U})$ et $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $f(a)$. Alors l'application $g \circ f$ est différentiable en a de différentielle*

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f.$$

En termes matriciels on obtient

$$\text{Jac}_a(g \circ f) = \text{Jac}_{f(a)}g \text{Jac}_a f.$$

Si on note x_1, \dots, x_n les coordonnées dans \mathbb{R}^n et y_1, \dots, y_p les coordonnées dans \mathbb{R}^p cela donne

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Exercice 6. Démontrer les propositions 3.18 et 3.19. Pour la proposition 3.19, la première égalité se montre exactement comme pour la dérivée d'une composition de fonction d'une variable, la deuxième égalité est une simple ré-écriture de la première en termes matriciels, et la troisième explicite pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de cette matrice $\text{Jac}_a(g \circ f)$.

La dernière formule de la proposition 3.19 n'est pas très sympathique a priori, mais une fois passée la (légitime) petite appréhension elle permet de calculer concrètement les dérivées partielles d'une fonction composée. Un petit exemple est sans doute utile ici :

Exemple 3.20. On considère une application différentiable f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on note

$$g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Alors g est différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \times \frac{\partial(r \cos(\theta))}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \times \frac{\partial(r \sin(\theta))}{\partial r} \\ &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Exercice 7. Avec les notations de l'exemple précédent, calculer $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en tout point de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 8. Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on note $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. On considère une fonction différentiable f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , puis on note $\tilde{f} = f \circ \psi$.

1. Montrer que \tilde{f} est une fonction différentiable de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .

2. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On note $(x, y) = \psi(r, \theta)$, $\vec{u}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $\vec{u}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Faire un dessin.

3. Montrer que $\partial_r \tilde{f}(r, \theta)$ est égale à la dérivée de f au point (x, y) et dans la direction \vec{u}_r , tandis que $\partial_\theta \tilde{f}(r, \theta)$ vaut r fois la dérivée de f au point (x, y) et dans la direction \vec{u}_θ .

\triangle Bien souvent pour « simplifier » les notations on écrit $f(r, \theta)$ au lieu de $\tilde{f}(r, \theta)$, et donc les dérivées partielles $\partial_r f$ et $\partial_\theta f$ désignent les dérivées partielles de la composée $\tilde{f} = f \circ \psi$. Cet abus de notation peut éventuellement être pratique pour celui qui a bien l'habitude, mais il est aussi très dangereux. Car si les fonctions f et \tilde{f} désignent la même quantité physique en coordonnées cartésiennes ou polaires, ce sont bel et bien des fonctions différentes.

3.3 Fonctions de classe C^1

Dans ce chapitre, on a commencé par définir les dérivées partielles. Puis on a dit que ce n'était pas une notion de dérivée satisfaisante, en particulier parce que l'existence des dérivées partielles n'implique même pas la continuité. On a ensuite défini la notion de différentiabilité, qui elle est satisfaisante. C'est une notion plus forte, puisque l'existence de la différentielle implique en particulier l'existence des dérivées partielles. Malheureusement c'est aussi une notion plus compliquée, alors que les dérivées partielles ne sont finalement que des dérivées usuelles.

Le but de ce paragraphe est maintenant d'introduire les fonctions de classe C^1 . Cela généralise la notion connue en dimension 1. Mais le véritable intérêt est que c'est une notion plus forte que la différentiabilité, et pourtant plus simple à vérifier. Ainsi, bien souvent, pour montrer qu'une fonction est différentiable, on montrera plutôt qu'elle est de classe C^1 (tout en gardant à l'esprit que ce n'est pas parce qu'une fonction n'est pas C^1 qu'elle n'est pas différentiable...)

Théorème 3.21. *On suppose que toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues au voisinage de $a \in \mathcal{U}$. Alors f est différentiable en a .*

Démonstration. Pour alléger les notations on suppose que $n = 2$. Le cas général se montre exactement de la même manière. Pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ avec h_1 et h_2 assez petits on peut définir

$$r(h) = f(a + h) - f(a) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

On a

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= \int_0^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + t, a_2 + h_2) dt + \int_0^{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + t) dt \\ &= h_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2) ds + h_2 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2) ds, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} r(h) &= h_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) ds \\ &\quad + h_2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) ds \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les dérivées partielles de f sont continues en a , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h_1, h_2 \in [-\delta, \delta]$ et $s \in [0, 1]$ on a

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon$$

et

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon.$$

Cela prouve que $|r(h)| \leq \varepsilon \max(|h_1|, |h_2|)$, et finalement $r(h) = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)$. D'où le résultat. \square

Définition 3.22. On dit que f est de classe C^1 sur \mathcal{U} si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur \mathcal{U} .

Définition 3.23. Soit \mathcal{V} un ouvert de \mathbb{R}^p . On dit que f est un C^1 difféomorphisme de \mathcal{U} dans \mathcal{V} si f est une bijection de \mathcal{U} dans \mathcal{V} , est de classe C^1 sur \mathcal{U} , et si sa réciproque f^{-1} est C^1 sur \mathcal{V} .

Remarque 3.24. Si f est un C^1 -difféomorphisme de \mathcal{U} dans \mathcal{V} et $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ est ouvert, alors $f(\mathcal{W})$ est ouvert comme image réciproque de \mathcal{W} par l'application continue f^{-1} .

3.4 Inégalité des accroissements finis

On a déjà dit que le théorème de Rolle et ses applications (en particulier le théorème des accroissements finis) n'étaient plus valables pour des fonctions de plusieurs variables. Sous une condition de type convexité, on va tout de même pouvoir montrer un analogue à l'inégalité des accroissements finis.

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 .

Théorème 3.25 (Inégalité des accroissements finis). *Soient $a, b \in \mathcal{U}$ tels que*

$$[a; b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]\} \subset \mathcal{U}.$$

Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|d_x f\|.$$

Démonstration. On considère l'application

$$g : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & f(a + t(b - a)) \end{cases}$$

Par composition de fonctions de classe C^1 on obtient que g est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et

$$\forall t \in [0, 1], \quad g'(t) = d_{a+t(b-a)} f(b - a).$$

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a alors

$$\|g'(t)\| \leq \|d_{a+t(b-a)} f\| \|b - a\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|d_x f\|.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle on a

$$\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq |1 - 0| \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|d_x f\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|d_x f\|.$$

D'où le résultat. \square

Corollaire 3.26. *On suppose que \mathcal{U} est convexe. Si toutes les dérivées partielles de f sont nulles sur \mathcal{U} alors f est constante sur \mathcal{U} .*

Remarque 3.27. Revenons sur le théorème 2.17. En général, pour montrer qu'une application est contractante, on utilise l'inégalité de la moyenne : si f est différentiable sur le convexe Ω et s'il existe $K \in [0, 1[$ tel que $\|df(x)\| \leq K$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est K -contractante sur Ω .

3.5 Équations aux dérivées partielles

On appelle équation aux dérivées partielles une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et qui fait intervenir les dérivées partielles de cette inconnue.

L'étude des équations aux dérivées partielles (EDP pour les intimes) est une branche importante de la recherche en mathématiques et ses applications sont très nombreuses en physique. La théorie « générale » des EDP dépasse largement le cadre de ce cours, mais on est tout de même capables de discuter les cas les plus simples.

En guise d'exemple, on considère le problème de transport suivant :

Exemple 3.28. Étant donné $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, déterminer l'ensemble des fonctions $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0 \quad (3.1)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (3.2)$$

On connaît la fonction u à l'instant initial $t = 0$, on cherche à déterminer ce qu'elle deviendra dans le futur, à partir d'une égalité faisant intervenir sa dérivée par rapport au temps t .

On commence par supposer que u est solution et on considère la fonction \tilde{u} qui à $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $\tilde{u}(t, y) = u(t, y + ct)$. \tilde{u} est alors une fonction de classe C^1 (comme composée des fonctions u et $(t, y) \mapsto (t, y + ct)$). En outre pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, y + ct) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, y + ct) = 0.$$

Cela prouve que pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto \tilde{u}(t, y)$ est constante, et donc pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\tilde{u}(t, y) = \tilde{u}(0, y) = u_0(y).$$

Ainsi pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$u(t, x) = \tilde{u}(t, x - ct) = u_0(x - ct). \quad (3.3)$$

Cela prouve que s'il existe une solution, c'est forcément cette fonction là. Inversement on vérifie la fonction u ainsi définie est bien solution. Il s'agit encore de calculer les dérivées partielles d'une fonction composée : pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a bien $u(0, x) = u_0(x)$ et de plus

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = -cu'_0(x - ct) + cu'_0(x - ct) = 0.$$

Cela prouve que u est solution. Finalement le problème (3.1)-(3.2) admet une unique solution, c'est la fonction u donnée par (3.3).

3.6 Exercices

Exercice 9. Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^n . Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n . Étudier la différentiabilité de f sur \mathbb{R}^n .

Exercice 10. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ (où $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n) n'est pas différentiable en 0.

Exercice 11. Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)| \leq \|x\|_2^2.$$

1. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle.
2. Interpréter ce résultat géométriquement.
3. Mêmes questions en remplaçant $\|x\|_2^2$ par $\|x\|_1^2$ et $\|x\|_\infty^2$.

Exercice 12. Si une mole de gaz parfait occupe le volume V à la température T et à la pression P alors on a $PV = RT$, où R est une constante. Montrer qu'on a

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1 \quad \text{et} \quad T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} = R.$$

Attention, s'il n'y a pas de difficulté calculatoire dans cet exercice, il faut faire attention à l'utilisation des notations « physiques ».

Exercice 13 (Existence des dérivées directionnelles n'implique pas continuité). On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en $(0,0)$ une dérivée selon tout vecteur et la calculer.
2. Montrer que f n'est pas continue en 0.

Exercice 14. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs jacobiniennes :

$$f_1 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x^2 - z^2}{2}, \sin(x) \sin(y) \right), \quad f_2 : (x, y) \mapsto \left(xy, \frac{x^2}{2} + y^2, \ln(1 + x^2) \right).$$

Exercice 15. Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Après en avoir vérifié l'existence, exprimer en fonction de f' les dérivées partielles des fonctions

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & f(z \sin(x)) \end{cases}$$

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on pose

$$g_1(x) = f(x, -x), \quad g_2(x, y) = f(y, x), \quad g_3(x) = f(x, f(x, x)), \quad g_4(x, y) = f(y, f(x, x)).$$

Montrer que ces fonctions sont de classe C^1 sur \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 , et calculer leurs dérivées (partielles) en fonction des dérivées partielles de f .

Exercice 17. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est C^1 .

Exercice 18. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est C^1 .

Exercice 19. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \inf(x^2, y^2)$. Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est C^1 .

Exercice 20 (Coordonnées polaires). On note $D = \mathbb{R}_- \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ on note $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. On admet que ψ réalise un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$ et $g = f \circ \psi$.

1. Montrer que g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .
3. Sans chercher à expliciter ψ^{-1} , exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g .

On pourra montrer que ψ est bien un difféomorphisme en utilisant le théorème de l'inversion globale. Ici on aurait pu le faire directement en explicitant ψ^{-1} .

Exercice 21. Pour $(x, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on pose $\psi(x, \theta) = (x, x \tan(\theta))$.

1. Montrer que ψ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $g = f \circ \psi$.
 - a. Montrer que g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
 - b. Calculer $\partial_x g$ en fonction des dérivées partielles de f .
 - c. Interpréter « géométriquement » la différence entre $\partial_x g$ et $\partial_x f$.

Exercice 22. Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = kf(x, y).$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$.

Exercice 23. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercice 24 (Équation d'Euler). Soient $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx) = t^\alpha f(x)$$

(f est positivement homogène de degré α) si et seulement si

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha f(x).$$

Chapitre 5

Dérivées d'ordres supérieurs

On s'intéresse dans ce chapitre aux dérivées d'ordre 2 ou plus d'une fonction de plusieurs variables. Comme pour une fonction d'une seule variable, la dérivée première (la différentielle ici) permet d'avoir la meilleure approximation d'une fonction en un point par une fonction affine, mais on peut avoir besoin d'être plus précis.

L'application que l'on va détailler ici est l'étude des extremums d'une fonction à valeurs réelles. Comme pour une fonction d'une variable, on va voir que la différentielle première s'annule là où la fonction atteint ses extremums locaux, mais on aura besoin de la dérivée seconde pour voir s'il s'agit effectivement d'un extremum local et, le cas échéant, s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Cela a évidemment de nombreuses applications, les problèmes où on cherche à optimiser une grandeur en fonction de divers paramètres étant très nombreux.

On peut également avoir besoin d'approcher localement une fonction par un polynôme de degré arbitraire. Comme en dimension 1, c'est alors la formule de Taylor qui entre en jeu. . .

5.1 Dérivées partielles successives

Soit f une fonction de classe C^1 d'un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^p .

Définition 5.1. • On dit que f est de classe C^2 sur \mathcal{U} si elle est de classe C^1 et que toutes ses dérivées partielles sont de classe C^1 sur \mathcal{U} .

- Par récurrence, on dit que f est de classe C^k sur \mathcal{U} si elle est de classe C^1 et que toutes ses dérivées partielles sont de classe C^{k-1} sur \mathcal{U} .

Si f est de classe C^2 , alors pour $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \quad \text{si } j \neq k, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \text{si } j = k.$$

On a également des notations analogues pour les dérivées partielles à tout ordre.

Exercice 1. Calculer, en tous les points (x, y) où elles sont définies, toutes les dérivées partielles secondes des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto x^2 \quad ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto x^2 \cos(y) \quad ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto x^y.$$

Les résultats de l'exercice précédent semblent indiquer que les dérivées croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont égales. C'est effectivement le cas pour une fonction de classe C^2 . Et c'est une très bonne nouvelle.

Théorème 5.2 (Théorème de Schwarz). *On suppose que f est de classe C^2 sur \mathcal{U} . Alors pour tous $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Remarque 5.3. Attention tout de même! Il existe des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telles que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent en un point a (sans que f ne soit de classe C^2) mais prennent des valeurs distinctes (voir exercice 10).

Démonstration. Soit $a \in \mathcal{U}$. Soit $\delta_0 > 0$ tel que $a + h_j e_j + h_k e_k \in \mathcal{U}$ pour tout $h_j, h_k \in [0, \delta_0]$. Pour $h_j, h_k \in [0, \delta_0]$ on note

$$\phi(h_j, h_k) = \frac{1}{h_j h_k} (f(a + h_j e_j + h_k e_k) - f(a + h_j e_j) - f(a + h_k e_k) + f(a)).$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} \phi(h_j, h_k) &= \frac{1}{h_j h_k} \left(\int_0^{h_k} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + h_j e_j + t e_k) dt - \int_0^{h_k} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + t e_k) dt \right) \\ &= \frac{1}{h_j} \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a + h_j e_j + s h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + s h_k e_k) \right) ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a + \tau h_j e_j + s h_k e_j) ds d\tau. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ il existe $\delta \in]0, \delta_0]$ tel que pour tous $h_j, h_k \in [0, \delta]$ on a

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a + h_j e_j + h_k e_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \right\| < \varepsilon$$

Ainsi pour $h_j, h_k \in [0, \delta]$ on a

$$\left\| \phi(h_j, h_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \right\| \leq \int_0^1 \int_0^1 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a + \tau h_j e_j + s h_k e_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \right\| ds d\tau \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$\phi(h_j, h_k) \xrightarrow{(h_j, h_k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a).$$

Mais d'autre part on a

$$\begin{aligned} \phi(h_j, h_k) &= \frac{1}{h_j h_k} \left(\int_0^{h_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + t e_j + h_k e_k) dt - \int_0^{h_k} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + t e_j) dt \right) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a + \tau h_j e_j + s h_k e_j) d\tau ds, \end{aligned}$$

et on obtient de la même manière que

$$\phi(h_j, h_k) \xrightarrow{(h_j, h_k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).$$

D'où le résultat par unicité de la limite. \square

Par récurrence, on peut montrer que si f est de classe C^k , alors l'ordre de dérivation des dérivées jusqu'à l'ordre k n'a pas d'importance.

Si f est une fonction de classe C^k , $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$ et

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

On note également $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$.

On énonce maintenant la formule de Taylor. Comme souvent avec le calcul différentiel, la principale difficulté est de ne pas avoir trop peur des notations.

Théorème 5.4 (Formule de Taylor avec reste intégral). *Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+1} , $a \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans \mathcal{U} . Alors on a*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt,$$

où pour $j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$

$$\frac{1}{j!} D^j f(a)(h)^j = \frac{1}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_j=1}^n \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}}(a) h_{i_1} \dots h_{i_j} = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) h^\alpha.$$

Démonstration. On applique le théorème connu en dimension 1 à la fonction $g : t \mapsto f(a+th)$, qui est de classe C^k sur $[0, 1]$. Il faut vérifier que pour tous $m \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$ et $t \in [0, 1]$ on a

$$\frac{g^{(j)}(t)}{j!} = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a+th).$$

Cela se montre par récurrence sur $m \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket$. □

Théorème 5.5 (Formule de Taylor-Young). *Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k et $a \in \mathcal{U}$. Alors avec les notations du théorème 5.4 on a*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^k).$$

Exemple 5.6. Si $n = 2$ et f est de classe C^2 au voisinage de $a \in \mathcal{U}$ on obtient pour $h = (h_1, h_2)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ &+ \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \right) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Exercice 2. Après avoir vérifiées qu'elles étaient de classe C^3 , calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions définies par

- $f_1 : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 z + 10y + 7x^4 - 3x^2 z^2 + 2xyz^3 + 5xyz$,
- $f_2 : (x, y) \mapsto (ye^x, \cos(xy))$.

C'est la formule (5.1) qui va nous servir pour étudier les extremums d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . Pour simplifier le discours, la définition suivante sera utile :

Définition 5.7. Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} et $a \in \mathcal{U}$. On appelle Hessienne de f en a la matrice (symétrique)

$$\text{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi le terme d'ordre 2 du développement de Taylor s'écrit encore

$$Q_a f(h) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{1}{2} (h_1, \dots, h_n) \text{Hess}_a(f) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Après avoir vérifié qu'elles étaient de classe C^2 , calculer les matrices Hessiennes des fonctions suivantes :

- $(x, y, z) \mapsto \sin(xyz)$ sur \mathbb{R}^3 ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Enfin on introduit le laplacien. On n'en dira pas grand chose dans ce cours, mais cet opérateur d'ordre 2 apparaît dans la plupart des EDP qui interviennent dans les problèmes physiques.

Définition 5.8. Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} . On appelle laplacien de f la fonction définie sur \mathcal{U} par

$$\Delta f : x \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)$$

5.2 Application à l'étude des extremums locaux

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction de \mathcal{U} dans \mathbb{R} . On cherche maintenant à trouver les extremums locaux de f . Comme les EDP, l'optimisation est une branche importante des mathématiques.

Définition 5.9. Soit $a \in \mathcal{U}$.

- On dit que f admet un maximum (minimum) local en a s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r)$ on a $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$).
- On dit que f admet un maximum (minimum) local strict en a s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r) \setminus \{a\}$ on a $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$).
- On dit que f admet un extremum local en a si elle admet un maximum ou un minimum local en a .

Proposition 5.10. On suppose que f est de classe C^1 et admet un extremum local en a . Alors $d_a f = 0$ ou, ce qui est équivalent, $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration. Soit $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. L'application $t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0. Cela implique que sa dérivée en 0, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, est nulle. \square

Définition 5.11. On dit que f admet un point critique en a si $\nabla f(a) = 0$.

Remarque 5.12. Comme en dimension 1, le fait que a soit un point critique de f n'implique pas que f admet un extremum local en a .

On suppose maintenant que f est de classe C^2 et que a est un point critique de f . D'après la formule de Taylor-Young on a

$$f(a + h) = f(a) + Q_a f(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2).$$

Le signe de la quantité $Q_a f(h)$ va nous permettre de déterminer si pour h petit $f(a + h)$ est plus petit ou plus grand que $f(a)$, ou si les deux cas se présentent.

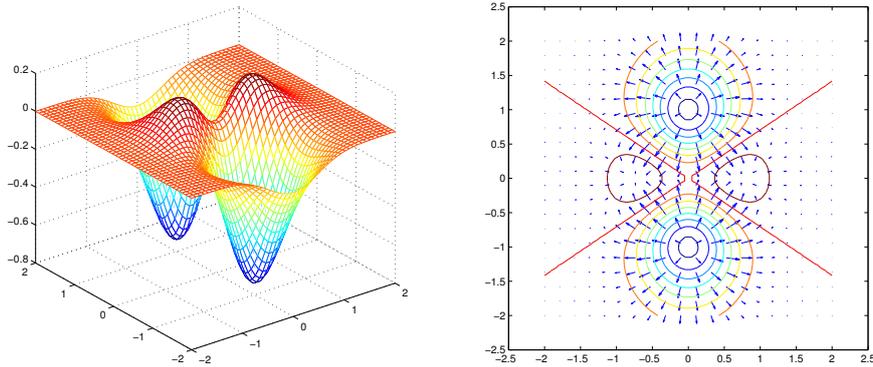


FIGURE 5.1 – La fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 2y^2e^{-2x^2 - y^2}$ admet deux maximums, deux minimums, et un point critique qui n'est pas un extremum local.

Définition 5.13. On dit que (la forme quadratique) Q_a est

- positive si $Q_a(h) \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,
- négative si $Q_a(h) \leq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,
- définie positive si $Q_a(h) > 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- définie négative si $Q_a(h) < 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On observe que la forme quadratique Q_a peut n'être ni positive ni négative. La proposition suivante donne une condition nécessaire pour qu'un point critique soit un minimum ou un maximum local.

Proposition 5.14. Soit a un point critique de f .

- Si f admet un minimum local en a , alors $Q_a(f)$ est positive.
- Si f admet un maximum local en a , alors $Q_a(f)$ est négative.

Démonstration. On montre la première propriété. La deuxième s'obtient en appliquant la première à $-f$. On suppose donc que f admet un minimum local en a et on considère $h \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit on a

$$f(a + th) - f(a) \geq 0.$$

Or

$$\frac{1}{t^2}(f(a + th) - f(a)) = Q_a(f)(h) + \frac{o}{t \rightarrow 0}(1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} Q_a(f)(h).$$

Cela prouve que $Q_a(f)(h) \geq 0$. □

Exercice 4. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ admet un point critique mais n'admet aucun extremum local (voir figure 5.2)

Malheureusement la réciproque de la proposition 5.14 n'est pas vraie. Ainsi cette proposition permet de dire qu'un point critique n'est pas un maximum local ou pas un minimum local, mais elle ne donne pas de conclusion positive.

On admet pour ce cours le résultat suivant :

Proposition 5.15. La matrice $\text{Hess}_a f$ est orthodiagonalisable : cela signifie qu'il existe une

matrice diagonale réelle $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $P^{-1} = {}^tP$ et

$$\text{Hess}_a(f) = P^{-1}DP = {}^tPDP.$$

Avec ce résultat on est capable de donner une condition suffisante pour qu'un point critique soit un minimum ou un maximum local :

Proposition 5.16. Soit a un point critique de f .

- Si $Q_a(f)$ est définie positive, alors f admet un minimum local strict en a .
- Si $Q_a(f)$ est définie négative, alors f admet un maximum local strict en a .

Remarque 5.17. Si $Q_a(f)$ est positive mais pas définie positive, ou négative mais pas définie négative, alors ni la proposition 5.14 ni la proposition 5.16 ne permettent de dire si f admet ou non un extrémum en a .

Démonstration. On suppose que $Q_a(f)$ est définie positive. On a $D = P \text{Hess}_a(f)^t P$. Donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$\lambda_j = {}^t e_j D e_j = {}^t ({}^t P e_j) \text{Hess}_a(f) P e_j = 2Q_a(f)({}^t P e_j) > 0.$$

On note $\lambda = \min(\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$. On note $Ph = \begin{pmatrix} \tilde{h}_1 \\ \vdots \\ \tilde{h}_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned} Q_a(f)(h) &= {}^t h \text{Hess}_a(f) h = {}^t (Ph) D (Ph) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\tilde{h}_j)^2 \geq \lambda \sum_{j=1}^n (\tilde{h}_j)^2 \\ &= \lambda {}^t (Ph) \cdot (Ph) = \lambda {}^t h \cdot h = \lambda \|h\|_2^2. \end{aligned}$$

Et comme

$$f(a+h) - f(a) = Q_a(f)(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|_2^2),$$

il existe $r > 0$ tel que $f(a+h) - f(a) > 0$ pour tout $h \in B(0, r) \setminus \{0\}$, et donc f admet un minimum local strict en a . \square

Définition 5.18. Soit a un point critique de f . On dit que a est un point selle de f si $Q_a(h)$ prend des valeurs strictement positives et strictement négatives.

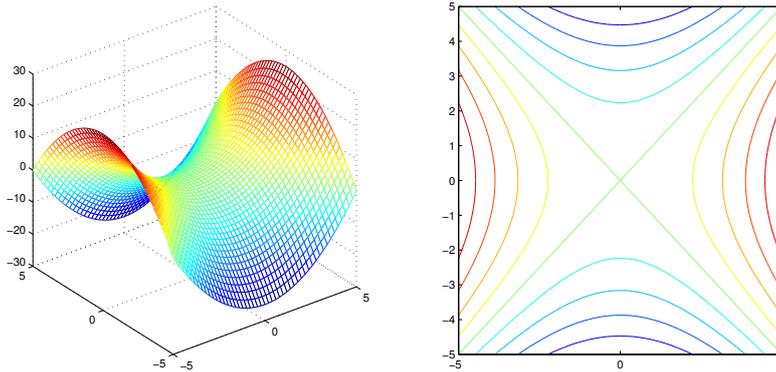


FIGURE 5.2 – Le point $(0,0)$ est un point selle pour la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Remarque 5.19. Si a est un point selle de f , alors f n'admet pas d'extrémum local en a .

Proposition 5.20. On suppose que $n = 2$. Soit a un point critique de f .

- Si $\det \text{Hess}_a(f) < 0$, alors a est un point selle de f .

- Si $\det \text{Hess}_a(f) > 0$, alors a admet un extremum local strict en a .
 - Si $\Delta f(a) \geq 0$, c'est un minimum local.
 - Si $\Delta f(a) \leq 0$, c'est un maximum local.

Démonstration. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $\text{Hess}_a(f)$. Alors avec les notations précédentes on a $\det \text{Hess}_a(f) = \det D = \lambda_1 \lambda_2$ et $\Delta f(a) = \text{Tr} \text{Hess}_a(f) = \text{Tr} D = \lambda_1 + \lambda_2$. Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, on en déduit que $Q_a(f)(Pe_1) = \lambda_1$ et $Q_a(f)(Pe_2) = \lambda_2$ sont non nuls et de signes distincts. Le point a est donc un point selle de f . Si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, les deux valeurs propres sont non nulles et de même signe, positif si $\Delta f(a) \geq 0$ et négatif si $\Delta f(a) \leq 0$. Le calcul de la preuve précédente montre que f admet alors en f un minimum local strict (respectivement maximum local strict). □

5.3 Exercices

Exercice 5. Étudier sur \mathbb{R}^2 les extrema locaux et globaux des fonctions définies par

$$f_1 : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 \quad ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto x^4 - y^4 \quad ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto x^4 \quad ; \quad f_4 : (x, y) \mapsto -(x^4 + y^4).$$

Exercice 6. Étudier les extrema locaux et globaux des fonctions définies par

- $f_1(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur \mathbb{R}^2 ,
- $f_2(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur \mathbb{R}^2 ,
- $f_3(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,
- $f_4(x, y) = y^2 + x^2 + xy + 2x - 2y$ sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On admet (ou pas) que l'application

$$\phi : x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

admet un minimum global sur \mathbb{R}^n . Montrer que ce minimum est atteint au point $A^{-1}b$.

Exercice 8 (Laplacien en coordonnées polaires). Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et F définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

1. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\Delta f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) (r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} (r, \theta).$$

Exercice 9 (Équation des cordes vibrantes). Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 telles que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $u = x + ct$, $v = x - ct$.

Exercice 10 (Contre-exemple pour le théorème de Schwarz). On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f .
2. Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées premières et secondes de f .
3. Déterminer le plus grand domaine de \mathbb{R}^2 sur lequel f est C^1 , C^2 .

Exercice 11. Soit f une fonction de classe C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $F(x, y) = f(x)f(y)$.

1. Montrer que F est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. La fonction F admet-elle un extremum local en $(0,0)$?

Exercice 12. Déterminer

$$\inf_{\substack{x > 0 \\ y > 0}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \right).$$

Chapitre 6

Théorème de l'inversion locale - Théorème des fonctions implicites

Le but de ce chapitre est de montrer deux applications importantes de la notion de différentiabilité. Ces deux théorèmes sont assez proches dans la mesure où on obtient assez facilement l'un comme conséquence de l'autre, mais les énoncés et surtout les applications sont finalement bien distincts.

6.1 Théorème de l'inversion locale

On considère une application f de classe C^1 d'un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p et $a \in \mathcal{U}$.

On a dit que l'application affine $x \mapsto f(a) + d_a f(x - a)$ est une bonne approximation de la fonction f au voisinage du point a . Le but de ce paragraphe est de voir s'il est possible de faire un lien entre le fait que f est une bijection et le fait que sa différentielle en tout point de \mathcal{U} est elle-même bijective. Tout d'abord il est facile de voir que si f est inversible, alors sa différentielle l'est également en tout point :

Proposition 6.1. *On suppose que f réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathcal{U} dans $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$. Alors $n = p$ et pour tout $a \in \mathcal{U}$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n d'inverse $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$.*

La démonstration repose simplement sur le calcul de la différentielle d'une fonction composée :

Démonstration. On a $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\mathcal{U}}$. En différentiant on obtient que pour tout $a \in \mathcal{U}$ on a

$$d_{f(a)}(f^{-1}) \circ d_a f = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} .$$

De même on a $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\mathcal{V}}$ donc pour tout $b \in \mathcal{V}$

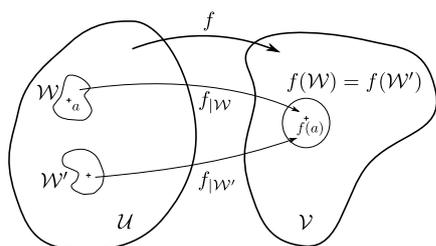
$$d_{f^{-1}(b)} f \circ d_b(f^{-1}) = \text{Id}_{\mathbb{R}^p} .$$

Avec $b = f(a)$ on obtient que

$$d_a f \circ d_{f(a)}(f^{-1}) = \text{Id}_{\mathbb{R}^p} .$$

Cela prouve que \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p sont isomorphes (ce qui implique que $n = p$), et $d_a f$ et $d_{f(a)} f^{-1}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. \square

En dimension 1, on sait qu'une fonction de classe C^1 d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} dont la dérivée ne s'annule pas est injective, et en particulier elle réalise une bijection de I dans $f(I)$. En outre la réciproque est-elle même de classe C^1 , donc f réalise un C^1 difféomorphisme de



Sous l'hypothèse que $d_a f$ est inversible, le théorème de l'inversion locale assure l'existence du voisinage \mathcal{W} de a tel que f réalise un difféomorphisme de \mathcal{W} sur $f(\mathcal{W})$. Cependant rien n'empêche l'existence de $b \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$ tel que $f(b) = f(a)$, donc on ne pourra pas conclure à l'injectivité globale. Cependant

- le difféomorphisme entre \mathcal{W} et $f(\mathcal{W})$ va tout de même nous rendre bien des services,
- et si par ailleurs on peut montrer l'injectivité globale, alors on aura un difféomorphisme global (c'est le corollaire 6.3).

FIGURE 6.1 – Théorème de l'inversion locale

I dans $f(I)$. Il s'agit même d'un C^k -difféomorphisme si f est de classe C^k .

Tout cela repose sur le théorème de Rolle qui dit en gros que si on se déplace sur une droite, pour pouvoir revenir au point de départ il faut nécessairement faire demi-tour et donc être à l'arrêt à un certain moment.

Ce n'est plus le cas en dimension supérieure. Sur un plan, on peut sans problème revenir au point de départ sans jamais être à l'arrêt.

Exercice 1. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ .
2. Montrer que la différentielle de f est inversible en tout point.
3. Montrer que f n'est pas injective.
4. On considère l'application φ qui à $\theta \in [0, 2\pi]$ associe $\varphi(\theta) = f(0, \theta)$. Montrer que φ est de classe C^∞ , que sa dérivée ne s'annule jamais, et que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$.

À la lumière de cet exemple on comprend qu'on ne pourra pas obtenir l'injectivité (propriété globale) à partir de l'inversibilité de la différentielle (propriété locale).

On va néanmoins l'obtenir localement : si la différentielle de f est inversible en un point, alors f réalise un difféomorphisme au voisinage de ce point. Ce n'est pas aussi fort qu'en dimension 1, mais c'est déjà un résultat très important qui illustre bien l'intérêt d'étudier la différentielle (il est bien plus facile de montrer qu'une application linéaire est inversible que de montrer directement qu'une fonction est localement inversible en un point).

Théorème 6.2 (Théorème de l'inversion locale). *Soit f une fonction de classe C^k (avec $k \geq 1$) d'un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^p . Soit $a \in \mathcal{U}$. Si $d_a f$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p alors $n = p$ et il existe un voisinage \mathcal{W} de a dans \mathcal{U} tel que la restriction de f à \mathcal{W} réalise un C^1 difféomorphisme de \mathcal{W} dans $f(\mathcal{W})$.*

Heuristique. Soit $a \in \mathcal{U}$. Étant donné y proche de $f(a)$, on cherche à montrer que l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x proche de a . Pour cela on écrit

$$f(x) = f(a) + d_a f(x - a) + \dots$$

où les points de suspension désignent un petit reste. Si $d_a f$ est inversible et si on s'autorise à oublier ce reste, alors on peut écrire

$$y = f(x) \quad \stackrel{\approx}{\iff} \quad x = a + (d_a f)^{-1}(y - f(a)) + \dots$$

On obtient bien une unique solution, qui se trouve être proche de a . La démonstration rigoureuse du théorème repose sur le théorème du point fixe 2.17 :

Démonstration. Pour $y \in \mathbb{R}^p$ on considère l'application $\phi_y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\phi_y(x) = x - (d_a f)^{-1}(f(x) - y).$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, ϕ_y est de classe C^k sur Ω , sa différentielle ne dépend pas du paramètre y , et au point a on a

$$d_a \phi_y = d_a \phi_0 = 0.$$

Par continuité des dérivées partielles et donc de la différentielle, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(a, r) \subset \mathcal{U}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^p$ et $x \in B(a, r)$ on a

$$\|d_x \phi_y\| \leq \frac{1}{2}.$$

Pour $y \in \mathbb{R}^p$ et $x_1, x_2 \in \overline{B}(a, r)$, on a alors d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Cela prouve que ϕ_y est contractante. D'autre part, par continuité de l'application linéaire $(d_a f)^{-1}$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B(f(a), \delta)$ on a

$$\|(d_a f)^{-1}(f(a) - y)\| \leq \frac{r}{2}.$$

Pour $x \in \overline{B}(a, r)$ et $y \in B(f(a), \delta)$ on a donc

$$\|\phi_y(x) - a\| \leq \|\phi_y(x) - \phi_y(a)\| + \|\phi_y(a) - a\| \leq \frac{1}{2} \|x - a\| + \frac{r}{2} \leq r.$$

Ainsi ϕ_y envoie la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ dans elle-même. On peut donc appliquer le théorème du point fixe. Pour tout $y \in B(f(a), \delta)$ il existe un unique $x \in \overline{B}(a, r)$ tel que $\phi_y(x) = x$, soit $f(x) = y$. Notant $g(y)$ ce point fixe, g est donc une bijection de $B(f(a), \delta)$ dans son image $\mathcal{W} \subset \overline{B}(a, r)$ par g , et g est la réciproque de la restriction de f à \mathcal{W} .

Il reste à montrer que g est une application de classe C^k . En utilisant la version continue du théorème du point fixe (théorème 2.18) et le fait que l'application $(x, y) \mapsto \phi_y(x)$ est continue, on obtient directement que g est continue. Pour obtenir le caractère C^k , il faudrait montrer une version C^k du théorème du point fixe, ce qu'on ne fera pas ici. \square

Corollaire 6.3 (Théorème de l'inversion globale). *Soit f une application de l'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans l'ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$. On suppose que f est bijective, de classe C^k ($k \geq 1$) et que pour tout $a \in \mathcal{U}$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme. Alors $n = p$ et f est un difféomorphisme de classe C^k de \mathcal{U} dans \mathcal{V} .*

On obtient finalement dans ce corollaire une propriété globale, mais la propriété d'injectivité qui faisait défaut pour l'exemple vu en début de paragraphe est ici ajoutée aux hypothèses. Rien d'extraordinaire donc...

Cet énoncé du théorème de l'inversion globale est bien pratique, mais il faut être conscient qu'il n'apporte pas grand chose par rapport au théorème de l'inversion locale 6.2. Il suffit de regarder la preuve pour s'en convaincre.

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est de classe C^k au voisinage de tout point de \mathcal{V} . Soit $b \in \mathcal{V}$ et $a = f^{-1}(b)$. D'après le théorème de l'inversion locale appliqué en a , il existe des voisinages ouverts $\tilde{\mathcal{U}}$ de a dans \mathcal{U} et $\tilde{\mathcal{V}}$ de b dans \mathcal{V} tels que f réalise un difféomorphisme de classe C^k de $\tilde{\mathcal{U}}$ dans $\tilde{\mathcal{V}}$. En particulier la restriction de f^{-1} à $\tilde{\mathcal{V}}$ est de classe C^k . D'où le résultat. \square

6.2 Théorème des fonctions implicites

On revient maintenant sur les lignes de niveau d'une fonction. Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème des fonctions implicites, qui permet de les paramétrer. Au moins localement. Et sous certaines hypothèses.

Pourquoi accorder tant d'importance à ces lignes de niveau ? Tout simplement parce que bien souvent les ensembles qui nous intéressent sont définis par une équation de la forme $F(x) = 0$ pour une certaine fonction F . Par exemple le cercle de \mathbb{R}^2 de centre $(0,0)$ et de rayon 1 peut être vu comme l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

C'est une ligne de niveau.

Paramétrer ce cercle signifie qu'on aimerait le voir comme le graphe d'une fonction régulière, disons au moins de classe C^1 . Manifestement, le cercle n'est le graphe d'aucune fonction, ni d'une fonction $y = f(x)$, ni d'une fonction $x = f(y)$. Par contre le demi-cercle supérieur est le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1, 1[$, le demi-cercle inférieur est le graphe de la fonction $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1, 1[$, le demi-cercle de droite peut être vu comme le graphe de la fonction $y \mapsto x = \sqrt{1-y^2}$ pour $y \in]-1, 1[$, et de même pour le demi-cercle de gauche. Ainsi le cercle peut être vu comme le graphe d'une fonction au voisinage de n'importe lequel de ses points (voir figure 6.1). A condition tout de même de ne pas avoir peur de retourner le repère, car au voisinage du point $(1,0)$ on ne pourra jamais voir le cercle comme le graphe d'une fonction qui exprime y en fonction de x .

Au début du cours on a introduit les lignes de niveau d'une fonction pour mieux comprendre la fonction en question. Ici la démarche est inverse. On va regarder la fonction F pour mieux comprendre ses lignes de niveau.

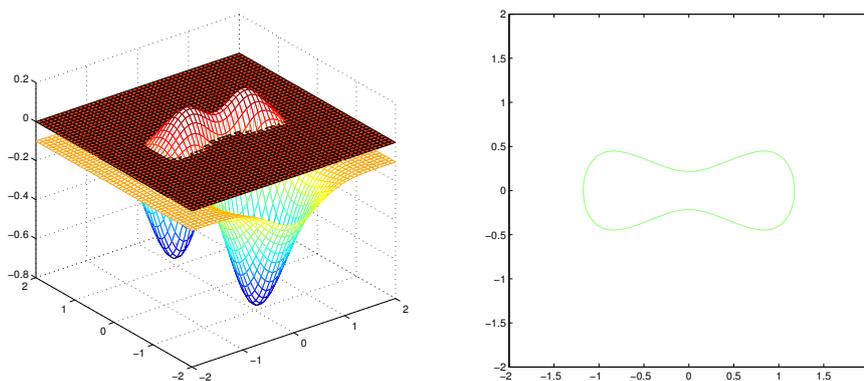


FIGURE 6.2 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto (0, 2 + x^2 - 2y^2)e^{-2x^2 - y^2} - 0, 1$, coupé par le plan d'équation $z = 0$, ainsi que la ligne de niveau correspondante.

Théorème 6.4 (Théorème des fonctions implicites). *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et $f : U \mapsto \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k avec $k \geq 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tel que $f(a, b) = 0$ et la différentielle partielle $D_y f(a, b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage \mathcal{V} de a dans \mathbb{R}^m ,*

un voisinage \mathcal{W} de b dans \mathbb{R}^p et une application $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ de classe C^k tels que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ et

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{W}, \quad f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

En outre on peut choisir \mathcal{V} et \mathcal{W} de sorte que la différentielle $D_y f(x, y)$ est inversible pour tout $(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ et

$$d\phi(x) = -D_y f(x, \phi(x))^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x)).$$

Ici $D_y f(a, b)$ est la différentielle de l'application $y \in \mathbb{R}^p \mapsto f(a, y) \in \mathbb{R}^p$ au point b . Au départ f est une fonction de $n + p$ variables à valeurs dans \mathbb{R}^p . Si on fixe n variables, on obtient une fonction de p variables à valeurs dans \mathbb{R}^p . La différentielle partielle $D_y f(a, b)$ est alors la différentielle de cette fonction au point b , les n premières variables étant fixées à $a = (a_1, \dots, a_n)$. Sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^p est

$$\text{Jac}_y f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+p}}(a, b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{m+1}}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{m+p}}(a, b) \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}).$$

Exercice 2. Ré-écrire cet énoncé proprement dans le cas où $m = p = 1$.

Heuristique. Si on oublie les restes d'ordre 2 on peut écrire

$$f(x, y) = \underbrace{f(a, b)}_{=0} + d_x f(a, b)(x - a) + d_y f(a, b)(y - b) + \dots$$

On a alors

$$f(x, y) = 0 \iff y = b - d_y f(a, b)^{-1} \circ d_x f(a, b)(x - a) + \dots$$

C'est bien une formule donnant y en fonction de x .

Reste à rendre cette observation un peu plus rigoureuse. Pour cela on utilise le théorème de l'inversion locale :

Démonstration. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$ on pose $g(x, y) = (x, f(x, y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Cela définit une fonction de classe C^k sur \mathcal{U} . En outre on a

$$\det \text{Jac } g(a, b) = \begin{vmatrix} I_m & 0_{m,p} \\ \text{Jac}_x f(a, b) & \text{Jac}_y f(a, b) \end{vmatrix} = \det \text{Jac}_y f(a, b) \neq 0,$$

où I_m est la matrice identité de taille $m \times m$ et $0_{m,p}$ la matrice à m lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale. Il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{U}}$ de (a, b) dans \mathcal{U} tel que g réalise un difféomorphisme de classe C^k de $\tilde{\mathcal{U}}$ sur son image. Soient $\tilde{\mathcal{V}}$ un voisinage ouvert de a dans \mathbb{R}^m et $\tilde{\mathcal{W}}$ un voisinage ouvert de b dans \mathbb{R}^p tels que $\tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{W}} \subset \tilde{\mathcal{U}}$. Comme $g(\tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{W}})$ est un ouvert de \mathbb{R}^{m+p} contenant $(a, 0)$, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$ de a dans \mathbb{R}^m tel que $\mathcal{V} \times \{0\} \subset g(\tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{W}})$. Étant donné $x \in \mathcal{V}$ il existe donc un unique $y \in \tilde{\mathcal{W}}$ (qu'on note $\phi(x)$) tel que $(x, 0) = g|_{\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{W}}}(x, \phi(x))$. Comme $(x, \phi(x)) = (g|_{\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{W}}})^{-1}(x, 0)$, ϕ est une fonction de classe C^k . Pour tout $x \in \mathcal{V}$ on a donc

$$f(x, \phi(x)) = 0$$

En différentiant on obtient

$$d_x f(x, \phi(x)) + d_y f(x, \phi(x))d\phi(x) = 0,$$

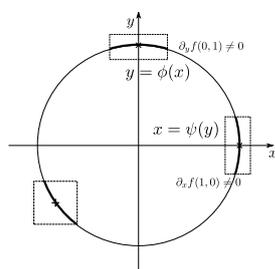
ce qui donne l'expression pour la différentielle de ϕ . □

Remarque 6.5. Il est fortement déconseillé de chercher à retenir la formule pour la différentielle de ϕ . Par contre il faut savoir qu'elle existe et comment la retrouver.

Exemple 6.6. On revient sur le cercle

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 = 0\}.$$

Alors on a $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$, où $f : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$ est de classe C^∞ . Les dérivées partielles sont $\partial_x f : (x, y) \mapsto -2x$ et $\partial_y f : (x, y) \mapsto -2y$. La dérivée par rapport à y est non nulle en tout point de \mathcal{C} sauf en $(1,0)$ et $(-1,0)$. Autour de tout point de \mathcal{C} exceptés $(1,0)$ et $(-1,0)$ on peut effectivement voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant y en fonction de x . La dérivée par rapport à x est non nulle en tout point de \mathcal{C} sauf en $(0,1)$ et $(0,-1)$. Et c'est effectivement autour de ces deux points qu'on ne peut pas voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant x en fonction de y .



C'est une bonne idée de bien avoir cet exemple du cercle en tête. Il peut par exemple arriver qu'on oublie quelle dérivée doit être non nulle pour pouvoir exprimer telle variable en fonction de telle autre. Il est bon de se remémorer le cercle et les quatre points pour lesquels on sait quelle dérivée est nulle et quelle variable peut être exprimée en fonction de l'autre.

Dans le cas où $m \neq p$, on peut aussi penser au fait que la différentielle partielle qui est supposée inversible est nécessairement une application entre espaces de mêmes dimensions.

FIGURE 6.3 – Théorème des fonctions implicites pour $f : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$.

6.3 Exercices

6.3.1 Inversion locale

Exercice 3. Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 .
2. Montrer que f définit une application surjective de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
 - a. Calculer la matrice jacobienne de f en (x_0, y_0) .
 - b. Montrer que f définit un C^1 -difféomorphisme local au voisinage de (x_0, y_0) .
4. L'application f réalise-t-elle un difféomorphisme de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Exercice 4. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est bien définie et réalise en tout point un difféomorphisme local de classe C^1 , mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 5. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \\ (x, y, z) & \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y) \end{cases} \mathbb{R}^3$$

Montrer que l'image de f est un ouvert strictement inclus dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 6. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a| + |b| < r$ le problème

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 & = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) & = b \end{cases}$$

admet une solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + a \cos(y), y + b \sin(x)) \end{cases}$$

1. A quelle condition sur (a, b) la fonction f est-elle un difféomorphisme local en tout point de \mathbb{R}^2 ? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.
2. Montrer que pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(t_1) - \sin(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$.
3. En déduire que f est un difféomorphisme global de \mathbb{R}^2 sur son image.

Exercice 8. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur \mathbb{R} .
2. Montrer que la différentielle de f en 0 est un isomorphisme de \mathbb{R} .
3. Montrer qu'il n'existe pas de voisinage de 0 sur lequel f est injective.
4. Quel est le but de cet exercice?

6.3.2 Fonctions implicites

Exercice 9. On considère l'équation

$$2xy - 2x + y - 2 = 0 \tag{*}$$

1. Montrer qu'il existe une fonction φ sur un domaine $D_\varphi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \iff x \in D_\varphi \text{ et } y = \varphi(x).$$

2. Montrer qu'il existe une fonction ψ sur un domaine $D_\psi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \iff y \in D_\psi \text{ et } x = \psi(y).$$

3. Quel lien peut-on faire entre les fonctions φ et ψ ?

Exercice 10. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Montrer que pour x suffisamment proche de 0 il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $f(x, y(x)) = 0$. Montrer, sans résolution explicite, que la fonction y ainsi définie au voisinage de 0 est dérivable et pour x proche de 0 :

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

Exercice 11. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrer qu'il existe un ouvert I de \mathbb{R} contenant x_0 et une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = (0, 0)$ pour tout $x \in I$.

Exercice 12. Décrire l'allure de l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 13. On considère la courbe \mathcal{C} d'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point $(1,1)$ et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 14. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} x^4 + y^3 + z^4 + t^2 = 0, \\ x^3 + y^2 + z^2 + t = 2, \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de $(0,-1,1,0)$ et une fonction $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ de classe C^1 au voisinage de 0 tels que $(x, y, z, t) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x, y, z) = \varphi(t)$.

2. Calculer la dérivée de φ en 0.

Exercice 15. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3,$$

puis la surface \mathcal{S} d'équation $f(x, y, z) = 0$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à \mathcal{S} au point $(1,1,1)$.

2. Vérifier qu'au voisinage du point $(1,1,1)$, la surface \mathcal{S} est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x, y)$ où ϕ est une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de $(1,1)$.

3. Écrire le développement limité de ϕ à l'ordre 2 au point $(1,1)$.

4. Donner la matrice Hessienne de ϕ au point $(1,1)$.

5. Quelle est la position de \mathcal{S} par rapport à son plan tangent au point $(1,1)$.

Exercice 16. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'équation $(x - a)(b - x) + \varepsilon x^3 = 0$ admet trois solutions distinctes (qu'on note $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ avec $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$). Donner un développement asymptotique de x_1 , x_2 et x_3 jusqu'à l'ordre $0(\varepsilon^2)$.

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ est $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres réelles distinctes. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est proche de A_0 , alors A possède également n valeurs propres réelles distinctes, et ces valeurs propres dépendent continuellement de A .

Chapitre 7

Intégrales multiples

On commence dans ce chapitre à parler d'intégration pour une fonction de plusieurs variables. Les intégrales multiples sont l'objet principal de ce chapitre. On évoquera également les intégrales à paramètre (que le sous-groupe des matheux verra plus en détail par ailleurs).

Considérons par exemple une fonction de deux variables, définie et continue sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$. Pour tout $x \in [c, d]$ l'application $t \mapsto f(t, x)$ est une fonction d'une seule variable, continue et donc intégrable sur le segment $[a, b]$. Pour tout $x \in [c, d]$ on peut donc considérer la quantité

$$\phi(x) = \int_a^b f(t, x) dt.$$

Dans cette intégrale, x est considéré comme une constante (vous êtes maintenant habitués à ce petit jeu). Mais vous n'êtes pas dupes, vous vous doutez bien qu'on a maintenant envie d'étudier la fonction $x \mapsto \phi(x)$. Est-elle continue? Ce n'est pas clair, mais on verra que c'est effectivement le cas. Les choses se compliquent un peu si on remplace le segment $[a, b]$ par un intervalle quelconque de \mathbb{R} . Bien sûr il n'est déjà plus si clair que l'intégrale définissant $\phi(x)$ a bien un sens pour tout x , et il est ensuite un peu plus subtile de s'assurer que la fonction ϕ obtenue est bien continue.

Une fois qu'on aura assuré la continuité de la fonction ϕ , on pourra se demander à quelle condition sur f l'intégrale ϕ est dérivable, de classe C^k , etc. Une idée?

On observe que comme la continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales, on n'aura pas trop de difficulté à remplacer le segment $[c, d]$ par un intervalle quelconque de \mathbb{R} . Pour toutes ces questions les deux variables t et x jouent vraiment des rôles très différents. t est une variable d'intégration, x est plutôt vu comme un paramètre.

Une autre question, pour laquelle t et x ont des rôles plus symétriques, est de chercher à intégrer ϕ . En effet, si ϕ est continue sur le segment $[c, d]$, elle est intégrable sur ce même segment. On peut donc considérer la quantité

$$I = \int_c^d \phi(x) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx.$$

Évidemment, on aurait pu commencer par intégrer la fonction $x \mapsto f(t, x)$ sur $[c, d]$ pour chaque $t \in [a, b]$ fixé, puis intégrer la quantité obtenue par rapport à t . Autrement dit on aurait pu considérer

$$\tilde{I} = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt.$$

Les intégrales I et \tilde{I} sont-elles égales? Que représentent-elles? Peut-on intégrer sur autre chose qu'un rectangle? Réponses (partielles) dans les quelques pages qui suivent. . .

7.1 Intégrales à paramètres

On donne (très) rapidement les résultats principaux concernant les intégrales à paramètre. On énonce également le théorème de convergence dominée pour une suite d'intégrales (plutôt que pour une intégrale dépendant d'un paramètre x continu).

Les hypothèses utilisées ici peuvent être affaiblies. En outre, on intègre ici par rapport à une variable réelle t et on obtient une fonction d'une variable réelle x . En partant d'une fonction f à $p+n$ variables on pourrait également (après avoir vu les intégrales multiples) intégrer par rapport à p variables t_1, \dots, t_n et obtenir une fonction de n variables x_1, \dots, x_n . Néanmoins il est complètement raisonnable, au moins dans un premier temps, de se contenter des énoncés présentés ici.

7.1.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 7.1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur I . On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement¹ vers une fonction f et qu'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq g(t).$$

Alors f est intégrable sur I et on a

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I f(t) dt.$$

\triangle Attention, le fait de pouvoir passer à la limite sous l'intégrale n'a rien d'évident, il n'est d'ailleurs pas difficile de trouver des contre-exemples dès qu'on retire l'hypothèse de domination.

7.1.2 Cas d'une intégrale sur un segment

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et J un intervalle non vide de \mathbb{R} . On considère une fonction f de $[a, b] \times J$ dans \mathbb{R} . On cherche à étudier l'application ϕ définie sur J par

$$\phi(x) = \int_a^b f(t, x) dt.$$

Proposition 7.2. On suppose que f est continue sur $[a, b] \times J$. Alors ϕ est définie et continue sur J .

Proposition 7.3. On suppose que J est un intervalle ouvert. On suppose que f est continue sur $[a, b] \times J$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, elle-même continue sur $[a, b] \times J$. Alors l'application ϕ précédente est bien définie sur J , elle est de classe C^1 et

$$\forall x \in J, \quad \phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Les démonstrations de ces deux propositions, ainsi que des deux théorèmes ci-dessous, sont dans [Liret-Martinais, Analyse 2^{ème} année].

7.1.3 Cas d'une intégrale généralisée

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty[\cup\{+\infty\}$, J un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction de $[a, b] \times J$ dans \mathbb{R} . On s'intéresse, lorsqu'elle est bien définie, à la fonction ϕ définie sur J par

$$\phi(x) = \int_a^b f(t, x) dt.$$

1. Cela signifie que $f_n(t)$ tend vers $f(t)$ quand n tend vers $+\infty$ pour tout $t \in I$.

Théorème 7.4 (Théorème de continuité sous l'intégrale). *On suppose que f est continue sur $[a, b[\times J$ et qu'il existe une fonction g continue de $[a, b[$ dans \mathbb{R} telle que*

(i) $\forall t \in [a, b[, \forall x \in J, |f(t, x)| \leq g(t).$

(ii) *L'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ est convergente.*

Alors l'application ϕ est bien définie et continue sur J .

Théorème 7.5 (Théorème de dérivation sous l'intégrale). *On suppose que l'intervalle J est ouvert. On suppose que f est continue sur $[a, b[\times J$ et que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente pour tout $x \in J$. On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur $[a, b[\times J$. Enfin on suppose qu'il existe une fonction g continue de $[a, b[$ dans \mathbb{R} telle que*

(i) $\forall t \in [a, b[, \forall x \in J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq g(t),$

(ii) *l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ est convergente.*

Alors pour tout $x \in J$ l'intégrale $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$ est absolument convergente. En outre la fonction ϕ est définie et de classe C^1 sur J , et

$$\forall x \in J, \quad \phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Exemple 7.6. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt.$$

Alors φ est bien définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} . En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \varphi(0).$$

Démonstration. • Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$ on note

$$f(t, x) = e^{-t^2} \cos(tx).$$

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(t, x)| \leq e^{-t^2} = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t}).$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente, donc $\int_0^{+\infty} f(t, x) dt$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi φ est bien définie sur \mathbb{R} .

• Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| = \left| -t \sin(tx) e^{-t^2} \right| \leq t e^{-t^2}.$$

Or l'application $t \mapsto t e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et pour tout $A \geq 0$ on a

$$\int_0^A t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^A = -\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ est convergente. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, φ est donc de classe C^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

Soit $A \geq 0$. En faisant une intégration par parties on a

$$\begin{aligned} \int_0^A -te^{-t^2} \sin(tx) dt &= \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(tx) \right]_0^A - \frac{1}{2} \int_0^A e^{-t^2} x \cos(tx) dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-A^2} \sin(Ax) - \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \cos(tx) dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -\frac{x}{2} \varphi(x). \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = -\frac{x}{2} \varphi(x)$$

et donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \varphi(0).$$

□

Remarque. Pour avoir la dérivabilité de ϕ sur J , il suffit de montrer la dérivabilité en tout point de J . En pratique il suffit donc de vérifier l'hypothèse de domination localement (en x) autour de chaque point $x_0 \in J$.

7.2 Construction de l'intégrale de Riemann sur \mathbb{R}^n

On s'intéresse maintenant à l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables. Il s'agira ici de l'intégrale de Riemann. On rappelle que l'intégrale de Riemann d'une fonction sur un segment de \mathbb{R} est définie de la façon suivante :

- l'intégrale de la fonction indicatrice d'un intervalle est définie de façon évidente,
- par linéarité, on définit l'intégrale d'une fonction en escalier (ou étagée),
- et enfin, lorsque c'est possible (dans un sens particulier, et dans ce cas on parle de fonction Riemann intégrable), on approche la fonction étudiée par des fonctions en escalier, puis on définit l'intégrale comme la limite des intégrales de ces fonctions en escalier,
- on montre ensuite qu'en particulier les fonctions continues, ou au moins continues par morceaux, sont toujours Riemann intégrables sur un segment.

L'intégrale de Riemann d'une fonction de plusieurs variables se construit de façon analogue, même s'il y a un certain nombre de subtilités supplémentaires. On ne donnera ici que les étapes de la construction, sans s'attarder sur les démonstrations (pour plus de détail, consulter par exemple le paragraphe IV.3 [Ramis-Warusefel, Tout-en-un pour la licence, niveau L2]. La raison est que vous verrez en L3 une autre façon de définir l'intégrale d'une fonction, à savoir l'intégrale de Lebesgue. Cet autre point de vue sera bien plus efficace pour obtenir les résultats d'intégration théoriques.

Par contre, tant qu'il s'agit de calculer les intégrales de fonctions simples sur des domaines simples (en des sens à préciser), cela revient au même de définir l'intégrale d'une façon ou d'une autre. Ainsi il est pertinent de s'entraîner à calculer concrètement des intégrales même avant de connaître l'intégrale de Lebesgue. C'est l'objectif de ce chapitre.

Ainsi je vous conseille de lire ce paragraphe, mais vous pouvez sans trop de scrupules le passer et vous concentrer sur les suivants, qui constituent le véritable objectif de ce chapitre.

Comme en dimension 1, on commence par définir l'intégrale dans le cas trivial. L'intégrale de la fonction constante égale à α sur le pavé

$$P(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n) = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

est définie comme étant égale à

$$\int_{P(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n)} \alpha = \alpha \text{Vol}(P) = \alpha \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

On définit ensuite par linéarité l'intégrale d'une fonction f définie sur un pavé P et telle qu'il existe un nombre fini de pavés P_1, \dots, P_k tels que P est égal à l'union de ces pavés, ils sont d'intérieurs disjoints (cela signifie que si on oublie les bords il n'y a pas d'intersection) et f est constante sur chacun de l'intérieur de ces pavés (on ne se préoccupe pas de la valeur sur les bords des pavés, de même qu'une intégrale en dimension 1 ne dépend pas de la valeur en un point donné).

On se donne maintenant une fonction f sur un pavé P . Si on se donne des sous-pavés P_1, \dots, P_k d'intérieurs disjoints et tels que $P = \bigcup_{j=1}^k P_j$, ainsi que des points $x_1 \in P_1, \dots, x_k \in P_k$. On sait alors donner un sens à l'intégrale de la fonction qui vaut $f(x_j)$ sur l'intérieur du pavé P_j pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$:

$$I(P_1, x_1, \dots, P_k, x_k) = \sum_{j=1}^k f(x_j) \text{Vol}(P_j).$$

On dit alors que f est intégrable sur P si cette quantité tend vers un réel I quand les longueurs des côtés des sous-pavés tendent toutes vers 0 (le nombre de sous-pavés tend lui vers $+\infty$), indépendamment du choix de ces sous-pavés. On dit alors que cette valeur I est l'intégrale de f sur le pavé P . On vérifie ensuite qu'en particulier les fonctions continues sur P sont intégrables.

Ce qui précède permet de définir l'intégrabilité et l'intégrale sur un pavé. Par linéarité on peut étendre sans difficulté la définition à une union finie de pavés. Mais on aimerait pouvoir intégrer des fonctions sur des domaines qui ne sont pas des unions de pavés, par exemple un simple disque de \mathbb{R}^2 . On se donne donc une fonction continue (on pourrait chercher à considérer des fonctions plus générales, mais cela ne nous intéressera pas ici) sur un domaine ouvert et borné \mathcal{U} de \mathbb{R}^n . On peut alors trouver une suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de pavés inclus dans \mathcal{U} , d'intérieurs deux à deux disjoints, et tel que tout $x \in \mathcal{U}$ appartient à P_j pour au moins un $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on note I_j l'intégrale de f sur le pavé P_j . On dit alors que f est intégrable sur \mathcal{U} si la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} I_j$$

est absolument convergente et dans ce cas on appelle intégrale de f sur \mathcal{U} la somme de cette série. Pour que cela ait un sens il faut que cette limite soit indépendante du choix de la suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$, ce qui est effectivement le cas.

De même qu'on utilise rarement les sommes de Riemann pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de \mathbb{R} , la construction qu'on vient d'esquisser ne permet pas de calculer concrètement des intégrales de fonctions sur des domaines de \mathbb{R}^n . C'est le théorème de Fubini 7.9, qui permet de ramener le calcul d'une intégrale de \mathbb{R}^n au calcul de n intégrales unidimensionnelles, que l'on utilisera en pratique.

S'il n'est pas primordial à ce stade de retenir en détail la construction de l'intégrale de Riemann sur \mathbb{R}^n , il sera par contre indispensable de bien savoir utiliser ce théorème pour savoir calculer concrètement des intégrales « simples ».

7.3 Intégrale d'une fonction continue sur un domaine simple

7.3.1 Intégration sur un domaine de \mathbb{R}^2

On arrive maintenant au cœur de ce chapitre, où on cherche à calculer des intégrales de fonctions « simples » sur des domaines « simples » de \mathbb{R}^2 . On commence par définir le type de domaines sur lesquels on va intégrer.

Définition 7.7. Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite élémentaire s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$, et des fonctions φ_1, φ_2 continues sur $[a, b]$ et ψ_1, ψ_2 continues sur $[c, d]$ telles que $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pour tout $y \in [c, d]$ et

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'intérieur de A est

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Exemples 7.8. • Le pavé $[a, b] \times [c, d]$ avec $a < b$ et $c < d$ est une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 .
• Le disque unité

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

peut s'écrire

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

ou encore

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Théorème 7.9 (Fubini). Soient A une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 et f une fonction continue sur A . Avec les notations de la définition précédente, on a

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Remarque 7.10. • Le théorème précédent peut être lu de deux façons différentes. Si vous avez bien compris la construction de l'intégrale d'une fonction continue sur un domaine A de \mathbb{R}^2 , le théorème dit que cette intégrale est en fait égale à ce qu'on obtient en intégrant d'abord par rapport à une variable puis par rapport à l'autre, comme présenté en introduction, et indépendamment de l'ordre d'intégration. Si vous avez esquivé le paragraphe précédent, le théorème dit que les deux dernières intégrales de l'égalité sont égales, et on prend leur valeur commune comme définition de l'intégrale de f sur A . Dans tous les cas ce théorème est admis.

• On écrit parfois $\iint_A f(x, y) dx dy$ pour insister sur le fait que c'est une intégrale qui porte sur deux variables. On peut faire de même pour les intégrales portant sur trois variables, mais en général on abandonne cette convention au-delà...

Exemples 7.11. On cherche à calculer l'intégrale de la fonction $(x, y) \mapsto xy^2$ sur le pavé $P = [0, 1] \times [1, 2]$. On a

$$\int_P xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{8x}{3} - \frac{x}{3} \right) dx = \int_0^1 \frac{7x}{3} dx = \frac{7}{6}$$

mais aussi

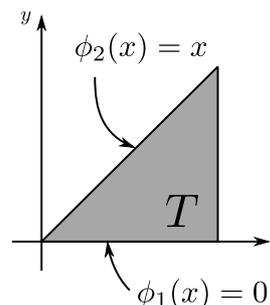
$$\int_P xy^2 dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 xy^2 dx \right) dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

Exemple 7.12. On note

$$T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y \leq x\}.$$

On a alors

$$\iint_T x^2 y^3 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y^3 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^6}{4} dx = \frac{1}{24}.$$



Définition 7.13. On appelle partie simple de \mathbb{R}^2 un ensemble S qui s'écrit comme union finie de parties élémentaires A_1, \dots, A_n d'intérieurs deux à deux disjoints :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i \neq j \implies \overset{\circ}{A}_i \cap \overset{\circ}{A}_j = \emptyset.$$

Si f est une fonction continue sur S , on définit alors

$$\int_S f = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f$$

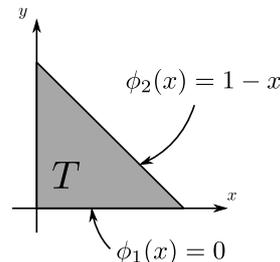
Exemple 7.14. La couronne $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$ est une partie simple de \mathbb{R}^2 .

Définition 7.15. Soit A une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 . Alors on appelle aire de A la quantité

$$\iint_A 1 dx dy.$$

Exemple 7.16. On considère le triangle $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \leq 1\}$. On a

$$\text{Aire}(T) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 1 dy \right) dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}.$$



Exemple 7.17. On considère le disque D de centre 0 et de rayon 1. Alors on a

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \int_{x=-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy \right) dx = 2 \int_{x=-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Définition 7.18. Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 . Alors on appelle centre de gravité de A le point de coordonnées

$$(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \left(\iint_D x dx dy, \iint_D y dx dy \right).$$

Exemple 7.19. Le centre de gravité du disque D de centre (x_0, y_0) et de rayon R et le point (x_0, y_0) . En effet on a

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_{a-R}^{a+R} \int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}} x dy dx = \int_{a-R}^{a+R} 2x \sqrt{R^2 - (x-a)^2} dx \\ &= \int_{-R}^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx + \int_{-R}^R 2a \sqrt{R^2 - x^2} dx = a \text{ Aire}(D). \end{aligned}$$

La deuxième coordonnées s'obtient de façon analogue.

7.3.2 Intégration en dimensions supérieures

On définit exactement comme dans \mathbb{R}^2 les domaines élémentaires et simples de \mathbb{R}^3 , puis l'intégrale

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_V f(x, y, z) dx dy dz$$

d'une fonction continue sur un tel domaine, en écrivant cette intégrale comme une intégrale en x d'une intégrale en y d'une intégrale en z . On dans un ordre différent.

Définition 7.20. Soit V une partie simple de \mathbb{R}^3 . Alors on appelle volume de V la quantité

$$\iiint_V 1 dx dy.$$

On définit le centre de gravité d'une partie simple de \mathbb{R}^3 de façon analogue à la dimension 2.

Exemple 7.21. On considère le simplexe $T_3 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x + y + z \leq 1\}$. On a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T_3) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 1 dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ici on aurait pu gagner une étape de calcul en observant que pour tout $x \in [0, 1]$ on sait calculer

$$\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 1 dz \right) dy$$

qui est l'aire du triangle $T_2(x) = \{(y, z) \in [0, 1-x]^2 \mid y + z \leq 1-x\}$ c'est-à-dire $\frac{(1-x)^2}{2}$. On a alors

$$\text{Vol}(T_3) = \int_0^1 \text{Aire}(T_2(x)) dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}.$$

Exemple 7.22. On considère la boule unité $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Pour tout $z \in [-1, 1]$ on considère le disque $D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}$. On a alors

$$\text{Vol}(B) = \int_{z=-1}^1 \text{Aire}(D(z)) dz = \int_{-1}^1 \pi(1-z^2) dz = \pi \left[1 - \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Bien sûr, toutes ces définitions se généralisent en fait à des domaines de \mathbb{R}^n . Le théorème de Fubini ramène le calcul d'une intégrale sur un domaine de \mathbb{R}^n au calcul de n intégrales successives sur des intervalles de \mathbb{R} . On parlera encore de volume en dimension $n \geq 4$.

7.4 Changement de variables

On énonce maintenant le théorème de changement de variables, qui sera également très utile pour calculer des intégrales multiples :

Théorème 7.23 (Théorème de changement de variables). *Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ouverts bornés de \mathbb{R}^n et $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un difféomorphisme de classe C^1 . Alors pour toute fonction $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^p$ continue et intégrable on a*

$$\int_{\phi(\mathcal{U})} f(y) dy = \int_{\mathcal{U}} f(\phi(x)) |\det \text{Jac } \phi(x)| dx.$$

À nouveau, on ne va pas donner de démonstration détaillée pour ce résultat. On commence par donner des exemples élémentaires, qui servent en fait à démontrer le théorème. On donnera ensuite les idées pour la démonstration (pour une démonstration complète, voir par exemple le paragraphe IV.3.4 de [Ramis-Warusfel, L2]), puis on introduira les changements de variables usuels (coordonnées polaires, cylindriques et sphériques).

Exemples 7.24 (Exemples de base). On considère un ouvert élémentaire A comme à la définition 7.7. On commence par tester la formule de changement de variable sur des cas simples où elle peut être obtenue « à la main ».

- Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$T_{(x_0, y_0)} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + x_0, y + y_0) \end{cases}$$

$T_{(x_0, y_0)}$ réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (sa réciproque est $T_{(-x_0, -y_0)}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\text{Jac } T_{(x_0, y_0)}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$|\det \text{Jac } T_{(x_0, y_0)}| = 1.$$

La formule de changement de variable donne alors

$$\int_A f(x + x_0, y + y_0) dx dy = \int_{T_{(x_0, y_0)}(A)} f(x, y) dx dy,$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{x=a}^b \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x + x_0, y + y_0) dy dx = \int_{x=a+x_0}^{b+x_0} \int_{y=\varphi_1(x-x_0)+y_0}^{\varphi_2(x-x_0)+y_0} f(x, y) dy dx.$$

Cette formule s'obtient en fait facilement en faisant deux changements de variables successifs dans des intégrales simples.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note

$$T_{1,2,\lambda} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + \lambda y, y) \end{cases}$$

$T_{1,2,\lambda}$ réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (sa réciproque est $T_{1,2,-\lambda}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\text{Jac } T_{1,2,\lambda}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$|\det \text{Jac } T_{1,2,\lambda}| = 1.$$

La formule de changement de variable donne dans ce cas :

$$\int_{y=c}^d \int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x + \lambda y, y) dx dy = \int_{y=c}^d \int_{x=\psi_1(y)+\lambda y}^{\psi_2(y)+\lambda y} f(x, y) dx dy.$$

À nouveau, il est facile de vérifier directement que cette formule est bien valable.

- On note maintenant

$$P_{1,2} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{cases}$$

$P_{1,2}$ réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (sa réciproque est $P_{1,2}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\text{Jac } P_{1,2}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$|\det \text{Jac } P_{1,2}| = 1.$$

Que donne la formule de changement de variable dans ce cas ?

- Pour $\alpha \neq 0$ on note finalement

$$D_{1,\alpha} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (\alpha x, y) \end{cases}$$

$D_{1,\alpha}$ réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (sa réciproque est $D_{1,\alpha^{-1}}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|\det D_{1,\alpha}| = |\alpha|.$$

La formule de changement de variable nous dit alors que si on dilate le problème par un coefficient $|\alpha|$ dans une direction, on multiplie les aires par α , ce qu'on aurait encore pu vérifier directement.

On rappelle que le déterminant permet de mesurer des volumes. Des aires en dimension 2. En effet pour u et v dans \mathbb{R}^2 la valeur absolue du déterminant $\det(u, v)$ est l'aire du parallélogramme engendré par u et v . Ainsi le facteur $|\det \text{Jac } \phi(x)|$ mesure le fait que le difféomorphisme ϕ a tendance à dilater ou contracter les aires au voisinage de x .

Idées de démonstration pour le théorème de changement de variables. • On commence par remarquer que si le résultat est vrai pour les difféomorphismes f et g , alors il est vrai pour $f \circ g$ (sous réserve que cette composition ait un sens).

- On a vu que le théorème est vrai si ϕ est une transvection, une permutation ou une dilatation. Or tout isomorphisme de \mathbb{R}^2 s'écrit comme composition finie de tels isomorphismes élémentaires (voir le cours d'algèbre linéaire, cela peut se montrer en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss). Ainsi on obtient le théorème dans le cas où ϕ est un isomorphisme.
- On découpe le domaine en un grand nombre de domaine de plus en plus petits. À la limite, pour chaque petit domaine D et pour n'importe quel $x_0 \in D$ on peut approcher f par $f(x_0)$ sur D et $\phi(D)$ par $\text{Jac } \phi(D - x_0) + \varphi(x_0)$, obtenu à partir de D en appliquant une translation, un isomorphisme, puis à nouveau une proposition. \square

Exemple 7.25. Soient $a, b > 0$. On considère l'ellipse

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}.$$

L'application φ définie par

$$\varphi(x, y) = (ax, by)$$

réalise un C^1 -difféomorphisme du disque unité ouvert D dans \mathcal{E} . On a alors

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \int_{\varphi(D)} 1 \, dx \, dy = \int_D 1 \times \underbrace{|\text{Jac } \varphi(X, Y)|}_{=ab} \, dX \, dY = ab\pi.$$

On peut dire qu'on a effectué le changement de variable $(x, y) = \varphi(X, Y)$, avec $dx \, dy = |\text{Jac } \varphi(X, Y)| \, dX \, dY = ab \, dX \, dY$.

7.5 Exemples importants de changements de variables

On introduit maintenant des changements de variables particulièrement utiles. En fonction des symétries du problème étudié, ces changements de variables peuvent permettre de considérablement simplifier l'expression des intégrales à calculer.

7.5.1 Coordonnées polaires

Proposition 7.26. *L'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \\ (r, \theta) & \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{cases}$$

est un C^1 -difféomorphisme. En outre pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ on a

$$\det \text{Jac } \Phi(r, \theta) = r.$$

Démonstration. On vérifie « facilement » que Φ est une bijection. D'après le théorème de l'inversion locale, il reste à vérifier que sa matrice jacobienne est partout inversible. Or pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ on a

$$\det \text{Jac } \Phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

□

Ce changement de variable est agréable quand la frontière du domaine d'intégration s'exprime plus facilement comme courbe paramétrée en polaire et/ou que la fonction à intégrer présente une symétrie radiale :

Proposition 7.27. *Soit A une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 tel qu'il existe une fonction $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue, 2π périodique, et vérifiant*

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin(\theta)), \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq \rho(\theta)\}$$

Alors pour toute fonction f continue sur A on a

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

Démonstration. Si on note

$$A_{] - \pi, \pi[} = \{(r \cos \theta, r \sin(\theta)), \theta \in] - \pi, \pi[, 0 \leq r < \rho(\theta)\}$$

alors on a ²

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_{A_{] - \pi, \pi[}} f(x, y) dx dy$$

Φ réalise alors un C^1 -difféomorphisme de $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi[\mid r \leq \rho(\theta)\}$, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de changement de variables. □

Exemple 7.28. L'aire du disque de rayon R peut être obtenue par le calcul suivant :

$$\text{Aire}(D_R) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R 1 r dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\theta = \pi R^2.$$

On pourra également utiliser une variante de cette dernière proposition où θ ne couvre qu'une partie de l'intervalle $] - \pi, \pi[$.

2. on ne détaille pas ce point, on peut par exemple décomposer A en $A_{[-\pi, 0]} \cup A_{[0, \pi]}$. $A_{[-\pi, 0]}$ et $A_{[0, \pi]}$ sont des domaines simples, et on utilise le fait qu'on ne change pas la valeur d'une intégrale en enlevant des parties du bord

7.5.2 Coordonnées cylindriques

Dans \mathbb{R}^3 , les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe.

Proposition 7.29. Soit V une partie simple de \mathbb{R}^3 tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et une fonction $\rho : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue, 2π périodique par rapport à la première variable, et vérifiant

$$V = \{(r \cos \theta, r \sin(\theta), z), \theta \in \mathbb{R}, z \in [a, b], 0 \leq r \leq \rho(\theta, z)\}$$

Alors pour toute fonction f continue sur V on a

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta, z)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dr d\theta dz$$

Démonstration. Pour $z \in [a, b]$ on note $T(z) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$. Alors on a

$$T(z) = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z), \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq \rho(\theta, z)\}.$$

Puisque

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{T(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz,$$

il suffit de passer en coordonnées polaires sur chaque tranche $T(z)$. □

7.5.3 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes qui présentent une symétrie autour du centre du repère.

Proposition 7.30. L'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r, \theta, \varphi) & \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un C^1 -difféomorphisme. En outre pour tout $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\det \text{Jac } \Phi(r, \theta) = r^2 \cos(\varphi).$$

Démonstration. On vérifie le calcul du jacobien. Pour $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\begin{aligned} \det \text{Jac } \Phi(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= r^2 (\sin(\varphi) \times \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \cos(\varphi) \times \cos^2(\varphi)) \\ &= r^2 \cos(\varphi) \neq 0. \end{aligned} \quad \square$$

Exemple 7.31. On retrouve facilement le volume de la boule de rayon R :

$$\text{Vol}(B_R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

7.6 Exercices

7.6.1 Intégrales à paramètre

Exercice 1. Montrer que l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2} dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2. On définit deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que g est dérivable.
2. Montrer que la fonction $h(x) = g(x) + f^2(x)$ est constante.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 3. Pour $x \geq 0$, on définit

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que ψ est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $\psi(0)$ et la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x)$.
4. Montrer que $\psi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds$.
5. Montrer que $\int_0^{+\infty} \psi'(x) dx = -2(\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds)^2$.
6. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.6.2 Intégrales multiples

Exercice 4. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ et $D = [-1, 1] \times [1, 2]$,
2. $f(x, y) = \sin(x+y)$ et $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,
3. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1+xy+x^2}}$ et $D = [3, 7] \times [-2, 2]$.

Exercice 5. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Calculer

$$I_1 = \iint_D 1 dx dy, \quad I_2 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad I_3 = \iint_D xy(x+y) dx dy.$$

Exercice 6. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x, y) = x+y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \geq x \geq 0, x^2 \leq y \leq x\}$,
2. $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^3}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 > x > 1, y > 2, x+y < 5\}$,
3. $f(x, y) = \cos(xy), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \geq x \geq 1, 0 \leq xy \leq 2\}$,
4. $f(x, y) = x, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x-y+1 \geq 0, x+2y-4 \leq 0\}$,
5. $f(x, y) = xy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy+x+y \leq 1\}$.

Exercice 7. Calculer les aires des domaines suivants :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4-x^3\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, -\sin x \leq y \leq \sin x\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x-y+1 \geq 0, y \leq -x^2+2x+1\}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1], x^2+y^2 \geq 1\}$. Calculer $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

Exercice 9. On considère le domaine

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Pour $z_o \in \mathbb{R}$, on définit le plan $P_{z_o} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_o\}$.

1. Pour quelles valeurs de z_o l'intersection $P_{z_o} \cap D$ est-elle non-vide?
2. Soit $z_o \in \mathbb{R}$ tel que $P_{z_o} \cap D$ est non-vide. Calculer $\iint_{P_{z_o} \cap D} x \, dx \, dy$.
3. Calculer $\iiint_D x \, dx \, dy \, dz$.

Exercice 10. En passant aux coordonnées polaires, calculer l'aire du domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 3 \text{ et } y > 0 \right\}$$

(et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu).

Exercice 11. Calculer $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ dans les cas suivants :

1. $f(x, y, z) = \cos x$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,
2. $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$.

Exercice 12. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

Exercice 13. On considère le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x < 0\}$. Calculer

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Calculer

$$\int_D (2x^3 - y) \, dx \, dy.$$

Exercice 15. Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x, y) \mapsto (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2)$ sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\}$, où $b > a > 0$. On pourra effectuer le changement de variables $u = xy, v = y^2 - x^2$.

Exercice 16. 1. Pour $R > 0$, calculer

$$I_R = \int_{B(0, R)} e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy,$$

où $B(0, R)$ désigne la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R . Montrer que I_R admet une limite que l'on explicitera quand R tend vers $+\infty$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx.$$

Exercice 17. Calculer $\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$, où D est l'ensemble des points de $[0, 1]^2$ qui ne sont pas dans le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 18. Soit $a > 0$ et B la boule euclidienne unité de \mathbb{R}^3 . Calculer

$$\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \, dx \, dy \, dz.$$

Chapitre 9

Sous-variétés de \mathbb{R}^n

Après avoir considéré des fonctions définies sur des intervalles de \mathbb{R} (autrement dit des morceaux de droites) puis sur des morceaux de plans ou d'espaces de dimensions quelconques, on souhaite maintenant s'intéresser à des fonctions définies par exemple sur des courbes ou des surfaces. Par exemple sur des cercles, des sphères...

Le but de ce chapitre est de commencer par définir et bien comprendre ce qu'on va considérer comme courbes ou surfaces. Plus généralement on va introduire les sous-variétés de dimension p dans \mathbb{R}^n (une courbe sera une sous-variété de dimension 1, une surface une sous-variété de dimension 2).

On va donner trois définitions d'une sous-variété, chacune ayant son intérêt propre. Mais dans tous les cas il s'agira d'une définition locale. Cela signifie qu'on ne se préoccupe pas de la forme globale de l'objet, mais seulement de ce à quoi il ressemble au voisinage de chaque point. Plus précisément, on dira qu'une partie de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension p si elle ressemble au voisinage de chacun de ses points à un sous-espace affine de dimension p . Le sous-espace en question (qui est en fait le sous-espace qui approche le mieux la sous-variété au point considéré) sera appelé plan tangent à la sous-variété en ce point.

Par exemple une sphère est une sous-variété de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 . La terre est (grosso modo) une sphère, mais à notre échelle où on n'en voit qu'une toute petite partie on a l'impression de marcher sur un plan (à tel point qu'on a longtemps pensé que la terre était effectivement plate...).

Ainsi une sous-variété de dimension 1 est une partie de \mathbb{R}^n telle que si on « zoome » sur n'importe lequel de ses points, on finit par avoir l'impression qu'il s'agit d'un morceau de droite. Avec cette idée en tête, pouvez-vous dire lesquels parmi ces ensembles du plan seront considérés comme des sous-variétés de dimension 1 ? Lorsque c'est le cas, pouvez-vous dessiner la droite tangente en chaque point ?

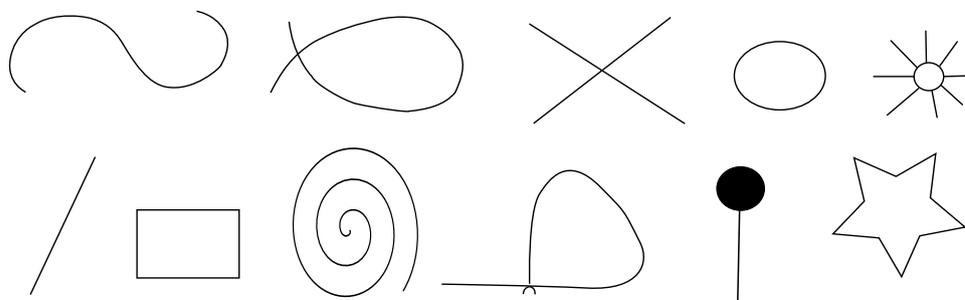


FIGURE 9.1 – Courbes ou pas courbes ?

Le but de ce chapitre est maintenant de donner des définitions rigoureuses pour donner un sens précis à l'idée intuitive que l'on peut se faire d'une courbe ou d'une surface.

9.1 Définitions et exemples

9.1.1 Définition par une équation

Bien souvent, les ensembles avec lesquels on travaille sont définis par des équations. Par exemple le cercle de \mathbb{R}^2 de centre 0 et de rayon 1 peut être vu comme l'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Dans \mathbb{R}^3 on obtient encore un cercle en considérant l'ensemble des points tels que $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $z = 0$, ce qui revient à dire que l'équation $(x^2 + y^2 - 1, z) = (0, 0)$ est satisfaite.

Définition 9.1. On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p si pour tout $a \in M$ il existe un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n contenant a et une application F de classe C^∞ de \mathcal{U} dans \mathbb{R}^{n-p} telle que $d_a F$ est de rang $n - p$ et

$$M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \mid F(x) = 0\}.$$

Remarque 9.2. On pourrait définir des sous-variétés de classe C^k avec $k \geq 1$ en demandant seulement que l'application F qui intervient dans la définition est de classe C^k . Cela ne change pas grand chose à tout ce qui suit, et on ne s'embêtera pas avec cette distinction ici.

Exemples 9.3. (i) Un ouvert \mathcal{V} de \mathbb{R}^n est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension n (considérer l'application $F : \mathcal{V} \rightarrow \{0\}$ constante égale à 0).

(ii) Un hyperplan affine de \mathbb{R}^n est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$ (il est donné par une équation de la forme $L(x) - b = 0$ où L est une forme linéaire non nulle et $b \in \mathbb{R}^n$. Plus généralement tout sous-espace affine de \mathbb{R}^n de dimension p est une sous-variété de dimension p . Par exemple une droite est une sous-variété de dimension 1.

(iii) Les cercles de \mathbb{R}^2 sont des sous-variétés de dimension 1. En effet le cercle \mathcal{C} de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$F(x, y) := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0.$$

Or pour $(x, y) \in \mathcal{C}$ on a $\nabla F(x, y) = (2(x - x_0), 2(y - y_0)) \neq 0$, donc $d_{(x,y)} F$ est nécessairement de rang 1. On vérifie de même que les sphères de \mathbb{R}^3 sont des sous-variétés de dimension 2.

(iv) Soit f une application lisse d'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^m . Alors le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$ est une sous-variété de dimension p dans \mathbb{R}^{p+m} . En effet on a

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \mid F(x, y) = 0\} \quad \text{où } F(x, y) = y - f(x).$$

F est bien lisse sur $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$ et sa différentielle est de rang constant égal à m , puisque pour $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$ et $\eta \in \mathbb{R}^m$ on a $\eta = d_{(x,y)} F(0, \eta) \in \text{Im}(d_{(x,y)} F)$.

Remarques 9.4. • Tous les exemples précédents sont globalement définis par une seule équation. Ce n'est pas nécessaire. La définition est locale et l'équation utilisée peut dépendre du point autour duquel on regarde.

• Il n'y a pas unicité de l'équation définissant un ensemble. En particulier une sous-variété peut être définie par l'équation $\tilde{F}(x) = 0$ avec \tilde{F} ne vérifiant pas les conditions de la définition. Considérer par exemple l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 = 0\}.$$

9.1.2 Définition par coordonnée rectifiante

On montre dans cette partie que la définition 9.1 est équivalente à une propriété plus proche de l'intuition qu'on a d'une sous-variété. Une partie M de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension p si on peut tordre (via un difféomorphisme) le voisinage de chacun de ses points de sorte que M soit envoyé sur un morceau d'un sous-espace de dimension p .

Proposition 9.5. $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p si et seulement si pour tout $a \in M$ il existe un C^∞ -difféomorphisme φ entre un voisinage \mathcal{U} de a dans \mathbb{R}^n et un voisinage \mathcal{V} de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(a) = 0$ et

$$\varphi(M \cap \mathcal{U}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{V} \mid y_{p+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

Dans ce cas φ est appelée une coordonnée rectifiant M en a .



FIGURE 9.2 – φ « redresse » M au voisinage de a .

Démonstration. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$. On suppose qu'un tel difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ existe, défini sur un voisinage \mathcal{U} de a . La définition d'une sous-variété est alors vérifiée avec $F = (\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$. En effet on a bien $M \cap \mathcal{U} = F^{-1}(\{0\})$, et $d_a F$ est surjective car $d_a \varphi$ l'est. Inversement supposons que M est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p et considérons $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$. Par définition il existe une fonction $F = (F_1, \dots, F_{n-p})$ de classe C^∞ d'un voisinage \mathcal{U} de a dans \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^{n-p} et telle que $d_a F$ est surjective. De la matrice $\text{Jac } F(a)$ on peut donc extraire une matrice carrée inversible de taille $n - p$. Autrement dit, il existe une permutation σ de $[[1, n]]$ telle que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{\sigma(p+1)}}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{\sigma(n)}}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-p}}{\partial x_{\sigma(p+1)}}(a) & \dots & \frac{\partial F_{n-p}}{\partial x_{\sigma(n)}}(a) \end{pmatrix}$$

est inversible. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage \mathcal{W} de a dans \mathbb{R}^n , un voisinage \mathcal{W}' de $(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(p)})$ dans \mathbb{R}^p et une fonction lisse $f : \mathcal{W}' \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ tels que

$$M \cap \mathcal{W} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{W}' \times \mathbb{R}^{n-p} \mid (x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})\}.$$

Pour x dans un petit voisinage \mathcal{U} de a on note alors

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= (x_{\sigma(1)} - a_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)} - a_{\sigma(p)}, \\ &\quad x_{\sigma(p+1)} - f_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}), \dots, x_{\sigma(n)} - f_{n-p}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}). \end{aligned}$$

Si \mathcal{U} est assez petit et $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ alors $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ convient. \square

Définition 9.6. Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p . On appelle paramétrage local de M en a une bijection lisse γ d'un voisinage \mathcal{V} de 0 dans \mathbb{R}^p vers $\mathcal{U} \cap M$ (où \mathcal{U} est un voisinage de a dans \mathbb{R}^n) telle que $\gamma(0) = a$ et $d_y \gamma$ est injective pour tout $y \in \mathcal{V}$.

La preuve de la proposition précédente montre qu'une sous-variété M admet un paramétrage local en tout point a de M . Dans le cas où $\sigma = \text{Id}$ il suffit de considérer

$$\gamma : (y_1, \dots, y_p) \mapsto (a_1 + y_1, \dots, a_p + y_p, f_1(a_1 + y_1, \dots, a_p + y_p), \dots, f_{n-p}(a_1 + y_1, \dots, a_p + y_p)).$$

A la lumière de ces définitions, on peut à nouveau se poser la question de savoir lesquels parmi les ensembles de la figure 9.1 sont des sous-variétés de dimension 1.

Définition 9.7. Soient M une sous-variété de dimension p de \mathbb{R}^n et N une sous-variété de dimension q dans \mathbb{R}^m . Soit f une fonction de M dans N . On dit que f est de classe C^k si pour tout $a \in M$, tout paramétrage local γ de M en a (défini sur un voisinage \mathcal{V} de 0 dans \mathbb{R}^p) et tout paramétrage local $\tilde{\gamma}$ de N en $f(a)$ (défini sur un voisinage \mathcal{W} de 0 dans \mathbb{R}^q) tels que $f(\gamma(\mathcal{V})) \subset \tilde{\gamma}(\mathcal{W})$ alors l'application

$$\tilde{\gamma}^{-1} \circ f \circ \gamma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

est de classe C^k .

Remarque 9.8. Pour chaque $a \in M$, il suffit en fait de vérifier la définition pour un paramétrage γ et un paramétrage $\tilde{\gamma}$.

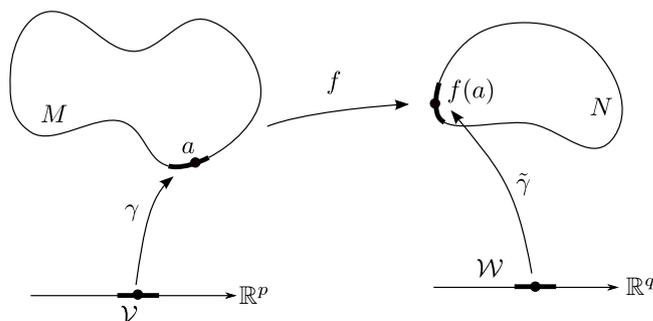


FIGURE 9.3 – Via les paramétrages, on ramène l'étude de la régularité à des fonctions définies sur des ouverts de \mathbb{R}^p .

9.2 Plan tangent

Proposition 9.9. Soient M une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p et $a \in M$. On suppose que sur un voisinage \mathcal{U} de a , M est définie par l'équation $F(x) = 0$ où $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est lisse et $d_a F$ est de rang $n - p$. On suppose d'autre part que $\gamma : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{U} \cap M \subset \mathbb{R}^n$ est un paramétrage local de M au voisinage de a , avec $\gamma(0) = a$. Alors on a

$$\ker d_a F = \text{Im } d_0 \gamma.$$

Démonstration. L'application $F \circ \gamma$ est nulle au voisinage de 0 dans \mathcal{V} , donc $d_a F \circ d_0 \gamma = 0$, ce qui implique que $\text{Im } d_0 \gamma \subset \ker d_a F$. Comme $d_0 \gamma$ est injective, son image est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension p . D'autre part la différentielle $d_a F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est de rang $n - p$ donc par le théorème du rang son noyau est de dimension p . Cela prouve qu'on a bien $\text{Im } d_0 \gamma = \ker d_a F$. \square

Définition 9.10. Soient M , a , F et φ comme précédemment. Alors on définit l'espace tangent à M au point a comme étant

$$T_a M = \ker d_a F = \text{Im } d_0 \gamma \subset \mathbb{R}^n.$$

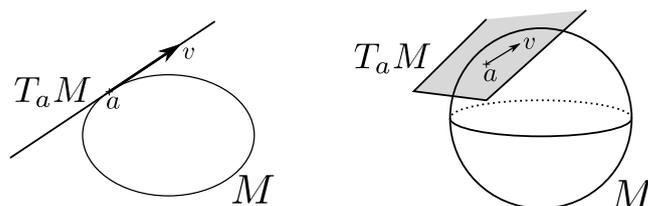


FIGURE 9.4 – Plan tangent.

Remarque 9.11. Soient $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse, $a \in \mathcal{U}$ et $M = \{x \in \mathcal{U} \mid F(x) = F(a)\}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$d_a F(h) = \langle \nabla F(a), h \rangle.$$

Ainsi M est une sous-variété de dimension $n-1$ au voisinage de a si et seulement si $\nabla F(a) \neq 0$, et dans ce cas le plan tangent $T_a M$ est l'orthogonal de $\nabla F(a)$ dans \mathbb{R}^n .

9.3 Champs de vecteurs

Définition 9.12. Soit M une sous variété de \mathbb{R}^n . On appelle champ de vecteur de classe C^k sur M une application $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k telle que $X(x) \in T_x M$ pour tout $x \in M$.

Exemple 9.13. Le vecteur gradient d'une fonction de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^n définit un champ de vecteur sur cet ouvert. D'un point de vue physique, une force ou la vitesse en chaque point d'un fluide en mouvement définissent des champs de vecteurs.

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n , $X : x \mapsto \sum X_j(x)e_j$ un champ de vecteur sur \mathcal{U} et f une fonction différentiable sur \mathcal{U} . Alors on note $X \cdot f$ la dérivée de f selon X donnée par

$$(X \cdot f)(a) = d_a f(X(a)) = \sum_{j=1}^n X_j(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Pour cette raison le champ de vecteur X est souvent noté

$$\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Définition 9.14. Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ouverts de \mathbb{R}^n et φ un difféomorphisme de classe C^k de \mathcal{U} dans \mathcal{V} . Soit X un champ de vecteurs sur \mathcal{U} . Alors on définit un champ de vecteurs $\varphi_* X$ sur \mathcal{V} (image de X par φ , ou « poussé en avant » de X par φ) par

$$\forall a \in \mathcal{V}, \quad (\varphi_* X)(a) = d_{\varphi^{-1}(a)} \varphi(X(\varphi^{-1}(a))).$$

9.4 Exercices

Exercice 1. Les sous-ensemble suivants sont-ils des sous-variétés de \mathbb{R}^2

- $\Gamma_1 = \{(t, t^2), t \in \mathbb{R}\}$,
- $\Gamma_2 = \{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}_+^*\}$,
- $\Gamma_3 = \{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}^*\}$,
- $\Gamma_4 = \{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}\}$,
- $\Gamma_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y \geq 0\}$.
- $\Gamma_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,

Exercice 2. Montrer que l'ensemble

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4xy + 2xz + 4y - z = xy + xz + 2x - z = 0\}$$

est une courbe au voisinage de l'origine et déterminer l'espace tangent à cette courbe à l'origine.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + xz + 2x + 2y - z = 0\}$$

est une surface au voisinage de l'origine et déterminer l'espace tangent à cette surface à l'origine.

Exercice 4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x, y) = x^2 - y^2$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble défini par l'équation $F(x, y) = \alpha$ est-il une sous-variété de \mathbb{R}^2 ?

Exercice 5. 1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble M_α d'équation $x^2 - y^3 = \alpha$ est-il une sous-variété lisse de \mathbb{R}^2 ?

2. Pour de telles valeurs de α , et pour $(x_0, y_0) \in M_\alpha$, donner une équation de l'espace tangent à M_α au point (x_0, y_0) .

Exercice 6. Soit M_1 une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p_1 et M_2 une sous-variété de \mathbb{R}^m de dimension p_2 . Montrer que

$$M_1 \times M_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid a_1 \in M_1, a_2 \in M_2\}$$

est une sous-variété de \mathbb{R}^{n+m} , et préciser sa dimension. On pourra le faire en utilisant chacune des trois caractérisations d'une sous-variété.

Exercice 7. Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n .

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\gamma :]a, b[\rightarrow M$ une courbe de classe C^1 . Montrer que pour tout $t \in]a, b[$ on a $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

2. Soient $a \in M$ et $h \in T_aM$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = h$.

Exercice 8 (Double puits). Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $V(x) = 4x^2(x^2 - 1)$. Pour $E \in \mathbb{R}$ on note

$$C_E = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2 + V(x) = E\}.$$

Pour quelles valeurs de E l'ensemble C_E est-il une sous-variété de \mathbb{R}^2 ? (indication : pour $E = 0$ on pourra par exemple utiliser le paramétrage $(x, \xi) = (\cos \theta, \sin(2\theta))$).

Exercice 9. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x, y) = (x^2 + 1 - 2y, x)$.

1. Montrer que φ est un C^∞ -difféomorphisme.

2. Déterminer φ_*X lorsque

$$X_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2(x, y) = y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1 - x + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Chapitre 10

Intégrales curvilignes

En mécanique, le travail infinitésimal d'une force \vec{F} sur une particule ponctuelle qui se déplace de x à $x + \vec{\delta x}$ (avec δx petit) est

$$\delta W_{\vec{F}} = \vec{F}(x) \cdot \vec{\delta x}.$$

Si la particule se déplace de A à B en suivant le chemin γ , l'énergie totale apportée par la force \vec{F} est donnée par

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \int_{\gamma} \vec{F}(x) \cdot \vec{dx}.$$

Selon si la force \vec{F} est *conservative* ou non, ce travail dépend effectivement du chemin γ emprunté ou bien seulement des points de départ et d'arrivée A et B .

Intuitivement, la signification de cette dernière formule a un sens relativement clair. On approche le chemin γ par une somme de petits déplacements, on calcule le travail correspondant à chacun de ces petits déplacements, et on somme le tout pour obtenir le travail total.

Rigoureusement, le « petit déplacement » $\vec{\delta x}$ n'a pas de sens précis. Et s'il est bon, voire indispensable, de garder en tête l'approche intuitive pour comprendre ce qu'il se passe, on a besoin de définitions rigoureuses pour pouvoir faire concrètement des calculs et des démonstrations. Évidemment, l'idée est de faire tendre le pas $\|\vec{\delta x}\|$ vers 0 comme pour une intégrale classique sur un segment de \mathbb{R} (pour laquelle on approche l'aire sous la courbe par une somme de rectangles dont les bases sont de plus en plus petites). En fait on va directement se ramener au calcul d'une intégrale sur un segment de \mathbb{R} en paramétrant le chemin γ .

10.1 Formes différentielles de degré 1 sur un ouvert de \mathbb{R}^n

On commence par introduire les formes différentielles sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , qui ne sont rien de plus qu'une application de \mathcal{U} dans l'espace des formes linéaires sur \mathbb{R}^n . Par exemple l'application « travail de \vec{F} au point x » qui au vecteur $\vec{\delta x}$ associe le réel $\vec{F}(x) \cdot \vec{\delta x}$ est une forme linéaire. Puisque la force dépend du point x , cette forme linéaire dépend elle-même du point x . On a donc défini une forme différentielle.

Définition 10.1. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note

$$dx_j : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto x_j \end{cases}$$

Remarque 10.2. (dx_1, \dots, dx_n) est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (c'est la base duale de la base canonique). Toute forme linéaire φ sur \mathbb{R}^n s'écrit de façon unique sous la forme

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi_j dx_j$$

avec $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$. Et pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ on a alors $\varphi(u) = \sum_{j=1}^n \varphi_j u_j$.

Remarque 10.3. Dans \mathbb{R}^2 on pourra noter (dx, dy) au lieu de (dx_1, dx_2) la base duale de la base canonique. De même dans \mathbb{R}^3 où on peut préférer noter les coordonnées (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2, x_3) .

Définition 10.4. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle forme différentielle de degré 1 (ou 1-forme différentielle, ou 1-forme) de classe C^k une application ω de classe C^k de \mathcal{U} dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur \mathbb{R}^n . Cela signifie qu'il existe des applications $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de classe C^k de \mathcal{U} dans \mathbb{R} telles que pour tout $x \in \mathcal{U}$ on a

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j.$$

Remarque 10.5. Pour $x \in \mathcal{U}$ on notera parfois ω_x au lieu de $\omega(x)$. Pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$\omega_x(u) = \omega(x; u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) u_j.$$

Remarque 10.6. En dimension 2 on note souvent, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

et pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on a alors

$$\omega_{(x,y)}(u, v) = P(x, y)u + Q(x, y)v.$$

Exemple 10.7. Soit f une fonction de classe C^k de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} , avec $k \geq 1$. Pour tout $x \in \mathcal{U}$ la différentielle de f au point x est donnée par

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad d_x f(h) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Autrement dit,

$$d_x f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j.$$

Puisque les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont de classe C^{k-1} , la différentielle de f définit une 1-forme de classe C^{k-1} sur \mathcal{U} :

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Dans cet exemple, la première égalité est une égalité entre réels (pour chaque x et h fixés), la deuxième est une égalité entre formes linéaires (pour chaque x fixé) tandis que la troisième est une égalité entre formes différentielles sur \mathcal{U} .

Définition 10.8. Une 1-forme ω sur \mathcal{U} est dite exacte s'il existe une fonction f de classe C^1 sur \mathcal{U} telle que $df = \omega$.

Exemples 10.9. • La 1-forme $x dx + y dy$ est la différentielle de la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sur n'importe quel ouvert de \mathbb{R}^2 .

- La 1-forme $\omega = y dx$ n'est exacte sur aucun ouvert de \mathbb{R}^2 . En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ et une fonction f de classe C^1 sur $\mathcal{V} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ tels que $df = \omega$ sur \mathcal{V} . Alors pour tout $(x, y) \in \mathcal{V}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Par la deuxième égalité on obtient qu'il existe une fonction g de classe C^1 sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ telle que $f(x, y) = g(x)$. Ainsi on devrait avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x)$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{V}$. Mais cela n'est pas compatible avec l'expression précédente.

10.2 Intégrale d'une 1-forme le long d'une courbe paramétrée

Ce qu'on avait noté $\delta W_{\vec{F}}$ en introduction peut donc être vu comme une forme différentielle et a maintenant un sens précis. Pour définir le travail total fourni quand la particule va de A à B en suivant γ , il nous faut maintenant introduire l'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 le long d'une courbe.

Définition 10.10. • Une courbe paramétrée de classe C^k est une application γ de classe C^k d'un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R}^n .

- On dit qu'une courbe paramétrée continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^1 par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_0 < \dots < a_m = b$ telle que la restriction de γ à $[a_{k-1}, a_k]$ est de classe C^1 pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$.
- On dit que γ est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$, et qu'elle est simple si sa restriction à $]a, b[$ est injective.
- Enfin on appelle support de γ l'ensemble $\text{supp}(\gamma) = \{\gamma(t), t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 10.11. • Soit ω une 1-forme différentielle continue sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n . Soient $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ une courbe paramétrée C^1 . Alors on définit l'intégrale de ω le long de γ par

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Si on note $\omega = \sum_{j=1}^n \alpha_j dx_j$ et $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, cela donne

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b \alpha_j(\gamma(t)) x'_j(t) dt.$$

- Si γ est C^1 par morceaux, on considère une subdivision $a = a_0 < \dots < a_m = b$ adaptée et on pose

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

La proposition suivante montre qu'une intégrale curviligne ne dépend pas du paramétrage mais seulement du sens de parcours :

Proposition 10.12. Soit $[c, d]$ un autre segment de \mathbb{R} , ϕ un C^1 -difféomorphisme de $[c, d]$ dans $[a, b]$ et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$. Alors on a

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

si ϕ est croissant, et

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

si ϕ est décroissant.

Démonstration. On effectue le changement de variable $t = \phi(s)$. Si ϕ est croissant on obtient

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_c^d \omega_{\gamma(\phi(s))}(\gamma'(\phi(s)))\phi'(s) ds.$$

Par linéarité de l'application $\omega_{\phi(s)}$ on obtient

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_c^d \omega_{\gamma(\phi(s))}(\gamma'(\phi(s)))\phi'(s) ds = \int_c^d \omega_{\tilde{\gamma}(s)}(\tilde{\gamma}'(s)) ds = \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

Si ϕ est décroissant on obtient de même

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_d^c \omega_{\gamma(\phi(s))}(\gamma'(\phi(s)))\phi'(s) ds = - \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

□

Définition 10.13. Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes paramétrées. On dit que γ_1 et γ_2 définissent la même courbe (géométrique) orientée s'il existe un C^1 -difféomorphisme croissant de $[c, d]$ dans $[a, b]$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$.

Exemple 10.14. On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx.$$

On note \mathcal{C} le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. On considère le paramétrage

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} (-\sin(\theta)) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Le paramétrage

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} [0, \pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(2\theta), \sin(2\theta)) \end{cases}$$

donne le même résultat :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos(2\theta)}{\cos(2\theta)^2 + \sin(2\theta)^2} 2 \cos(2\theta) - \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)^2 + \sin(2\theta)^2} (-2 \sin(2\theta)) \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2 d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Par contre

$$\gamma_- : \begin{cases} [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) \end{cases}$$

donne

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos(-\theta)}{\cos(-\theta)^2 + \sin(-\theta)^2} \cos(-\theta) - \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)^2 + \sin(-\theta)^2} (\sin(-\theta)) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-1) d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

Et si on fait k tours :

$$\gamma_k : \begin{cases} [0, 2k\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{cases}$$

donne

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} \omega &= \int_0^{2k\pi} \left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} (-\sin(\theta)) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2k\pi} 1 d\theta = 2k\pi. \end{aligned}$$

10.3 Intégrale d'une forme différentielle exacte

On rappelle le théorème fondamental de l'analyse, qui fait le lien entre intégration et dérivation :

Théorème 10.15. *Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Alors on a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Autrement dit, l'intégrale de la dérivée f sur un segment s'exprime simplement en fonction des valeurs de f sur les bords du segment. Le but principal de la fin de ce cours sera de généraliser cette propriété à des situations où le domaine d'intégration est plus compliqué qu'un simple segment de \mathbb{R} .

On commence par le cas d'une intégrale curviligne, relativement proche du cas modèle :

Proposition 10.16. *On suppose que ω est une forme exacte sur \mathcal{U} , et on considère une primitive f de ω (ie. f est C^1 sur \mathcal{U} et $df = \omega$). Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ est une courbe paramétrée C^1 par morceaux alors on a*

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Cette proposition simplifie grandement le calcul de l'intégrale curviligne, et explique l'intérêt de s'intéresser aux formes différentielles exactes. On observe en outre que l'intégrale dépend des points de départ et d'arrivée mais pas du chemin γ parcouru entre les deux.

Démonstration. On suppose d'abord que γ est de classe C^1 . Pour $t \in [a, b]$ on note $g(t) = f(\gamma(t))$. La fonction g est alors de classe C^1 sur $[a, b]$ et pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$g'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)).$$

D'après le théorème 10.15 on obtient

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a).$$

D'où le résultat si γ est C^1 . Si γ n'est que C^1 par morceaux, on considère une subdivision $a = a_0 < \dots < a_m = b$ adaptée. Pour chaque $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on applique le résultat précédent à la restriction de γ sur $[a_{k-1}, a_k]$, et on obtient

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{k=1}^m (f(\gamma(a_k)) - f(\gamma(a_{k-1}))) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

Corollaire 10.17. *Si ω est une forme différentielle exacte sur \mathcal{U} et γ est une courbe fermée de classe C^1 par morceaux, alors*

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

Exemple 10.18. La forme différentielle

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx.$$

n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

On revient sur la notion de travail associé à une force. Lorsqu'une force \vec{F} peut être vue comme le gradient (ou l'opposé du gradient) d'un potentiel V (c'est le cas par exemple pour la force de gravitation ou une force électrique), alors la forme différentielle

$$\vec{\delta x} \mapsto \vec{F}(x) \cdot \vec{\delta x} = -\vec{\nabla} V(x) \cdot \vec{\delta x} = -d_x V(\vec{\delta x})$$

est exacte (et $-V$ est une primitive), donc le travail fourni entre A et B ne dépend que de A et B :

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = V(A) - V(B).$$

En particulier si on revient au point de départ (*ie.* si on suit une courbe fermée), le travail fourni est nul.

Mais ce n'est pas toujours le cas, par exemple une force de frottement n'est pas conservative, et si même si on revient au point de départ le frottement nous a bel et bien coûté de l'énergie. Mathématiquement, cela signifie que la forme différentielle associée n'est pas exacte.

10.4 Exercices

Exercice 1. On considère sur \mathbb{R}^2 la 1-forme ω telle que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\omega_{(x,y)} = xy^2 dx + e^x dy$. On note $u = (1, 0)$ et $v = (2, 1)$. Calculer $\omega_{(3,2)}(u)$ et $\omega_{(0,1)}(v)$.

Exercice 2. Calculer les intégrales curvilignes $\int_{\Gamma} \omega$ dans les situations suivantes :

1. $\omega = xy dx + (x + y) dy$ et Γ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ pour x allant de -1 à 2.
2. $\omega = y \sin x dx + x \cos y dy$ et Γ est le segment de droite allant de $A = (0, 0)$ à $B = (1, 1)$.
3. $\omega = x^2 y dx + xy dy$ et Γ est le cercle unité centré en 0 et parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 3. On considère sur \mathbb{R}^2 la forme différentielle $\omega = x^2 dx - xy dy$.

1. Calculer l'intégrale de ω le long des courbes suivantes :
 - a. le segment de droite allant de $A = (0, 0)$ à $B = (1, 1)$,
 - b. l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ pour x allant de 0 à 1.
2. La 1-forme ω est-elle exacte ?

Exercice 4. On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

1. Soit $a > 0$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{C_a} \omega$ lorsque
 - a. C_a le cercle de rayon a centré en 0 et parcouru dans le sens trigonométrique,
 - b. C_a le carré orienté de sommets successifs $A = (a, a)$, $B = (-a, a)$, $C = (-a, -a)$ et $D = (a, -a)$.
2. La forme ω est-elle exacte ?

Exercice 5. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$ lorsque

1. Γ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 - ay = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$), orientée dans le sens trigonométrique.
2. Γ est la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$ (avec $a > 0$ et $b > 0$), orientée dans le sens trigonométrique.

Exercice 6. On considère

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}.$$

Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = y dx + 2x dy$ le long du contour de D parcouru une fois dans le sens direct.

Chapitre 11

Théorème de Poincaré - Formule de Green-Riemann

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du précédent. On a vu à la proposition 10.16 que les formes différentielles sont bien plus agréables à manipuler lorsqu'elles sont exactes. Le théorème de Poincaré va nous donner un critère relativement simple pour s'assurer qu'une forme est exacte.

Toujours à la proposition 10.16, on a commencé à généraliser le théorème fondamental de l'analyse en exprimant l'intégrale le long d'une courbe γ d'une forme différentielle ω en fonction des valeurs d'une primitive de ω sur le bord de γ . La formule de Green-Riemann est une généralisation en dimension 2 de ce résultat. Plus précisément, on va exprimer l'intégrale d'une fonction sur un ouvert simple Ω de \mathbb{R}^2 en fonction de l'intégrale d'une certaine forme différentielle ω (qui sera une primitive, en un sens à préciser) sur le bord de Ω (qui est une courbe).

11.1 Dérivée extérieure d'une 1-forme

On commence par introduire la dérivée d'une 1-forme sur un ouvert de \mathbb{R}^2 (on verra au chapitre suivant comment cela se généralise en dimension supérieure). Plus généralement, on définit dans ce paragraphe les 2-formes différentielles.

Définition 11.1. • On note $dx \wedge dy$ l'application

$$dx \wedge dy : \begin{cases} (\mathbb{R}^2)^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det(u, v) \end{cases}$$

où on a noté $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$.

- Plus généralement, si φ_1 et φ_2 sont deux formes linéaires sur \mathbb{R}^2 , on note $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ l'application qui au couple $(u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2$ associe le réel $\varphi_1(u)\varphi_2(v) - \varphi_2(u)\varphi_1(v)$.

Remarque 11.2. En particulier on a $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$ et $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$.

Définition 11.3. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 . On appelle 2-forme différentielle de classe C^k une application de la forme

$$\omega : (x, y) \mapsto f(x, y) dx \wedge dy,$$

où f est une application de classe C^k de \mathcal{U} dans \mathbb{R} . ω est en particulier une application de classe C^k de \mathcal{U} dans l'espace des formes bilinéaires sur \mathbb{R}^2 .

Définition 11.4. Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\omega = f(x, y) dx \wedge dy$ une 2-forme continue sur \mathcal{U} . Lorsque cela a un sens on note

$$\iint_{\mathcal{U}} \omega = \iint_{\mathcal{U}} f(x, y) dx dy.$$

Définition 11.5. Soit $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ une 1-forme sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 . On appelle dérivée extérieure de ω sur \mathcal{U} la 2-forme

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx \wedge dy.$$

Remarque 11.6. On a en fait

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy.$$

Exemple 11.7. Si $\omega = \cos(x + y) dx + x^2 y dy$ alors $d\omega = (2xy + \sin(x + y)) dx \wedge dy$.

Définition 11.8. On dit que la 1-forme différentielle ω est fermée sur \mathcal{U} si $d\omega = 0$ sur \mathcal{U} . Si on note $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ alors ω est fermée sur \mathcal{U} si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$ on a

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

11.2 Théorème de Poincaré

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 . On fait maintenant le lien entre les 1-formes exactes (utiles en pratique) et les 1-formes fermées (propriété facile à vérifier par un simple calcul de dérivée).

Proposition 11.9. Une 1-forme exacte de classe C^1 sur \mathcal{U} est fermée sur \mathcal{U} .

Démonstration. Soit $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ une 1-forme exacte sur \mathcal{U} . Il existe une fonction f différentiable telle que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Comme P et Q sont de classe C^1 sur \mathcal{U} , f est en fait une fonction de classe C^2 . Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$ on a alors par le théorème de Schwartz

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

Cela prouve que $d\omega = 0$. □

Bien sûr, il serait plus intéressant de montrer la contraposée, à savoir qu'une forme fermée est exacte. Ce n'est malheureusement pas vrai en général, mais le théorème de Poincaré nous assure que c'est vrai dès que l'ouvert \mathcal{U} est étoilé :

Définition 11.10. On dit de l'ouvert \mathcal{U} qu'il est étoilé s'il existe $a \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $w \in \mathcal{U}$ on a $[a, w] \subset \mathcal{U}$. On rappelle que $[a, w]$ est par définition l'ensemble

$$\{ta + (1 - t)w, t \in [0, 1]\}.$$

Exemples 11.11. • \mathbb{R}^2 est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 .

- Une partie convexe de \mathbb{R}^2 est étoilée.
- L'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ n'est pas étoilé.

Théorème 11.12 (Théorème de Poincaré). On suppose que \mathcal{U} est un ouvert étoilé. Alors toute 1-forme différentielle fermée de classe C^1 sur \mathcal{U} est exacte.

Démonstration. On suppose que l'ouvert \mathcal{U} est étoilé par rapport au point (a, b) et on considère une forme ω fermée sur \mathcal{U} . Pour $(x, y) \in \mathcal{U}$ on considère la courbe paramétrée

$$\gamma_{x,y} : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \mathcal{U} \\ t & \mapsto & (a + t(x - a), b + t(y - b)) \end{cases}$$

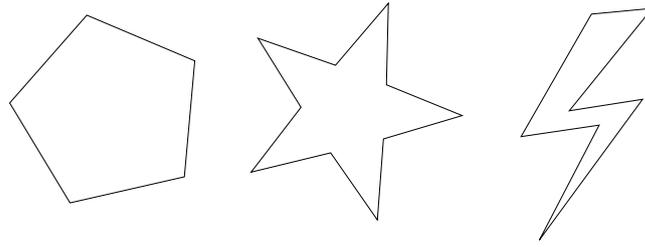


FIGURE 11.1 – Domaines convexe et donc étoilé, étoilé mais pas convexe et non étoilé.

puis on pose

$$f(x, y) = \int_{\gamma_{x,y}} \omega.$$

Notant $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ cela donne

$$f(x, y) = \int_0^1 (P(\gamma_{x,y}(t))(x - a) + Q(\gamma_{x,y}(t))(y - b)) dt.$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Il existe un voisinage \mathcal{V} de x_0 dans \mathbb{R} tel que (x, y_0) appartient à \mathcal{V} pour tout $x \in \mathcal{V}$, et donc $\gamma_{x,y_0}(t) \in \mathcal{U}$ pour tous $x \in \mathcal{V}$ et $t \in [0, 1]$. L'application

$$(t, x) \mapsto (P(\gamma_{x,y_0}(t))(x - a) + Q(\gamma_{x,y_0}(t))(y_0 - b))$$

est de classe C^1 sur $[0, 1] \times \mathcal{V}$ et sa dérivée partielle par rapport à x est donnée par

$$P(\gamma_{x,y_0}(t)) + t \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma_{x,y_0}(t))(x - a) + \frac{\partial Q}{\partial x}(\gamma_{x,y_0}(t))(y_0 - b) \right).$$

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on obtient que f est dérivable par rapport à x et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \int_0^1 P(\gamma_{x_0,y_0}(t)) dt + \int_0^1 t \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma_{x_0,y_0}(t))(x_0 - a) + \frac{\partial Q}{\partial x}(\gamma_{x_0,y_0}(t))(y_0 - b) \right) dt.$$

Soit $(x, y) \in \mathcal{U}$. Pour $t \in [0, 1]$ on note $g(t) = P(\gamma_{x,y}(t))$. g est de classe C^1 et pour $t \in [0, 1]$ on a

$$g'(t) = \frac{\partial P}{\partial x}(\gamma_{x,y}(t))(x - a) + \frac{\partial P}{\partial y}(\gamma_{x,y}(t))(y - b).$$

Comme ω est fermée, on a également

$$g'(t) = \frac{\partial P}{\partial x}(\gamma_{x,y}(t))(x - a) + \frac{\partial Q}{\partial x}(\gamma_{x,y}(t))(y - b).$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 (g(t) + tg'(t)) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tg(t)) dt = g(1) = P(x, y).$$

De la même façon on montre que f est dérivable par rapport à y sur \mathcal{U} et pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Cela prouve que

$$df = P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \omega.$$

En particulier ω est une forme exacte. □

Remarque 11.13. On note qu'on obtient en outre une expression explicite pour une primitive.

Exemple 11.14. Attention, la forme différentielle

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx.$$

est fermée mais n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

11.3 Formule de Green-Riemann

On dira qu'un ouvert bornée Ω de \mathbb{R}^2 a un bord C^1 par morceaux si sa frontière $\partial\Omega$ est union finie de supports de courbes γ_i pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ (avec $N \in \mathbb{N}$) fermées, simples, et C^1 par morceaux.

On dira que $\partial\Omega$ est orienté de sorte que Ω soit à sa gauche si pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et lorsque t croît, le point $\gamma_i(t)$ « se déplace en laissant Ω à sa gauche ». Cela signifie qu'en tout point $\gamma_i(t)$, la base $(\nu, \gamma'_i(t))$ est directe, où ν est un vecteur normal sortant au point $\gamma_i(t)$.

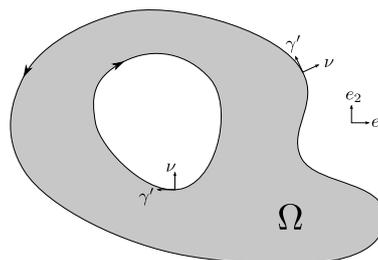


FIGURE 11.2 – Orientation du bord d'un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Si \mathcal{U} est un ouvert contenant l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω et ω est une 1-forme continue sur \mathcal{U} , on note alors

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \omega.$$

On considère maintenant un ouvert élémentaire Ω de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}, \end{aligned}$$

avec $a < b$, $c < d$, φ_1 et φ_2 sont C^1 par morceaux sur $[a, b]$, ψ_1 et ψ_2 sont C^1 par morceaux sur $[c, d]$, et on a $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et $\psi_1 \leq \psi_2$.

Lemme 11.15. Soit $P(x, y) dx$ et $Q(x, y) dy$ deux 1-formes continues sur un ouvert \mathcal{U} contenant $\overline{\Omega}$. Alors on a

$$\int_{\partial\Omega} P(x, y) dx = \int_a^b (P(t, \varphi_1(t)) - P(t, \varphi_2(t))) dt$$

et

$$\int_{\partial\Omega} Q(x, y) dy = \int_c^d (-Q(t, \psi_1(t)) + Q(t, \psi_2(t))) dt.$$

Démonstration. On montre la première égalité. La deuxième se montre de façon analogue. On paramètre le bord de Ω à l'aide des quatre courbes suivantes :

- γ_1 définie sur $[a, b]$ par $\gamma_1(t) = (t, \varphi_1(t))$,
- γ_2 définie sur $[\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$ par $\gamma_2(t) = (b, t)$,
- γ_3 définie sur $[a, b]$ par $\gamma_3(t) = (t, \varphi_2(t))$,
- γ_4 définie sur $[\varphi_1(a), \varphi_2(a)]$ par $\gamma_4(t) = (a, t)$.

Pour toute 1-forme continue sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$ on a

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega - \int_{\gamma_4} \omega.$$

En particulier

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) \times 1 dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b, t) \times 0 dt \\ &\quad - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) \times 1 dt + \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} P(a, t) \times 0 dt \\ &= \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt. \end{aligned}$$

□

On montre maintenant la formule de Green-Riemann :

Théorème 11.16. [Formule de Green-Riemann] Soit Ω un ouvert élémentaire de \mathbb{R}^2 et ω une 1-forme de classe C^1 sur un ouvert contenant $\bar{\Omega}$. Alors on a

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

On rappelle que si on note $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ on a

$$\int_{\Omega} d\omega = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

Démonstration. D'après le théorème de Fubini et le lemme précédent on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy \\ &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy - \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} Q(x, y) dy + \int_{\partial\Omega} P(x, y) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \omega. \end{aligned}$$

□

Remarque 11.17. • Ce résultat peut être étendu à des ouverts plus généraux, par exemple des ouverts simples. Les intégrales sur les frontières communes aux différentes parties élémentaires se compensent.

- La formule de Green-Riemann est utile dans les deux sens. Selon le problème considéré, on peut vouloir ramener un calcul d'intégrale double au calcul d'une intégrale curviligne ou l'inverse.

Exemple 11.18. La formule de Green-Riemann peut par exemple servir à calculer l'aire d'un ouvert de \mathbb{R}^2 via l'une des égalités suivantes :

$$\text{Aire}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x dy = - \int_{\partial\Omega} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x dy - y dx.$$

11.4 Exercices

Exercice 1. On considère sur le demi-plan $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Montrer que ω est exacte et déterminer ses primitives.

Exercice 2. On considère sur le demi-plan $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy.$$

1. Montrer que ω est exacte et déterminer ses primitives.

2. Soit Γ une courbe C^1 par morceaux allant de $A = (1, 2)$ à $B = (3, 8)$. Calculer $\int_{\Gamma} \omega$.

Exercice 3. On considère la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$.

1. Montrer que ω est exacte sur \mathbb{R}^2 .

2. Calculer l'intégrale de ω sur le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, allant de $A = (1, 2)$ vers $B = (3, 4)$.

3. On considère maintenant la courbe paramétrée $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (1 + 3t - t^2, 2 + 4t - 2t^2)$. Calculer l'intégrale de ω le long de γ .

Exercice 4. 1. Déterminer l'ensemble des fonctions φ de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que $\varphi = 0$ et la forme différentielle ω définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\omega = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} dx + \varphi(x) dy,$$

est exacte.

2. Déterminer alors une primitive de ω .

3. On considère la courbe Γ d'équation $3x^2 = -7y^2 + 21$ orientée dans le sens direct. Quelle est la nature de cette courbe? Calculer l'intégrale de ω sur Γ .

Exercice 5. On considère l'anneau $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Retrouver l'aire de A en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 6. On note ∂D le contour du domaine D défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = xy^2 dx + 2xy dy$ le long de ∂D parcouru dans le sens direct

1. en utilisant un paramétrage de ∂D ,

2. en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 7. Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer les intégrales curvilignes suivantes (les courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique)

1. $\int_{C_R} -x^2 y dx + xy dy$ où C_R est le cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$,

2. $\int_{C_R} (x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy$ où C_R est comme précédemment,

3. $\int_{\partial T} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$ où ∂T est le contour du triangle de sommets $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$ et $C = (1, 3)$, parcouru dans le sens direct.

Exercice 8. Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer l'aire du domaine délimité par la courbe paramétrée par $\theta \mapsto (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$ pour θ allant de 0 à 2π .

Exercice 9. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

1. Montrer que cette intégrale est convergente.
2. On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} \left((x \sin(x) - y \cos(x)) dx + (x \cos(x) + y \sin(x)) dy \right).$$

Montrer que ω est fermée.

3. Soit $R > 1$. On considère le domaine

$$D_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, \frac{1}{R^2} < x^2 + y^2 < R^2 \right\},$$

et on note Γ_R son contour, orienté de sorte à laisser D_R sur sa gauche. Déterminer la valeur de $\int_{\Gamma_R} \omega$.

4. Pour $r > 0$ on note γ_r le demi-cercle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x^2 + y^2 = r^2\}$, orienté dans le sens trigonométrique, puis $I_r = \int_{\gamma_r} \omega$.
 - a. Étudier la limite de I_r lorsque r tend vers 0.
 - b. Montrer que I_r tend vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$.
5. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Chapitre 12

Idées pour la dimension supérieure - Théorème de Stokes

Le but de ce chapitre est de voir comment les résultats des deux chapitres précédents peuvent être généralisés à des problèmes en dimension supérieure. En particulier on aura à intégrer sur des sous-variétés de \mathbb{R}^n de dimension p , typiquement des courbes ou des surfaces de \mathbb{R}^3 .

On a vu au chapitre précédent la formule de Green-Riemann, qui est un analogue du théorème fondamental de l'analyse pour la dimension 2. On rappelle que dans tous les cas il s'agit d'exprimer une intégrale sur un domaine en fonction d'une intégrale sur le bord de ce domaine. La version générale est le théorème de Stokes, qu'on énonce dès maintenant :

Théorème 12.1 (Théorème de Stokes). *Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n à bord, compacte, orientée, de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ (et de classe C^2). On munit le bord ∂M de l'orientation induite par l'orientation de M . Soit ω une forme différentielle de degré $p - 1$ et de classe C^1 dans un voisinage de M . Alors on a*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

L'objectif principal de ce chapitre est de comprendre l'énoncé de ce théorème. Ce théorème est utilisé assez tôt dans les cours de physique, alors qu'il utilise des outils mathématiques sophistiqués. Faute de temps, on n'entrera pas ici dans les détails, et en particulier on ne donnera pas de démonstration. Le but est pour le moment de se convaincre que ce théorème a un sens, qu'il est crédible, et d'avoir une petite idée d'où il vient. Les plus curieux pourront par exemple trouver une présentation détaillée dans [Ramis-Warusefel-Moulin, Cours de mathématiques pures et appliquées, Volume 1 : algèbre et géométrie, p.892-942].

12.1 Formes p -linéaires alternées

On a vu au chapitre 10 que sur une courbe on n'intègre non pas une fonction mais une forme différentielle de degré 1, une forme différentielle de degré 1 étant une application qui à chaque point associe une forme linéaire. De même on a vu que l'intégrale usuelle sur un domaine de \mathbb{R}^2 , peut-être vu comme l'intégrale d'une 2-forme différentielle, c'est-à-dire d'une application qui à chaque point du domaine associe une forme bilinéaire bien particulière.

De façon générale, sur une sous-variété de dimension p on pourra intégrer une p -forme différentielle, et une p -forme différentielle sera une application qui à chaque point associe une forme p -linéaire alternée, qu'on introduit maintenant.

Définition 12.2. On appelle forme p -linéaire alternée une application $\varphi : (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- Pour tous $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$ l'application

$$u_k \mapsto \varphi(u_1, \dots, u_k, \dots, u_p)$$

est linéaire.

- Pour tous $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$ et $j < k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on a

$$\varphi(u_1, \dots, u_{j-1}, u_k, u_{j+1}, \dots, u_{k-1}, u_j, u_{k+1}, \dots, u_p) = -\varphi(u_1, \dots, u_p).$$

On note $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes p -linéaires alternées.

Autrement dit une forme p -linéaire alternée sur \mathbb{R}^n est une application à p variables dans \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R} , linéaire en chacune de ces variables (forme p -linéaire...) et telle qu'on change le signe de l'image si on permute deux variables (...alternée). Cette dernière propriété a quelques conséquences immédiates, qu'on l'on pourra démontrer en guise d'exercice :

Proposition 12.3. Soit φ une forme p -linéaire alternée et $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$.

- S'il existe $j \neq k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $u_j = u_k$ alors $\varphi(u_1, \dots, u_p) = 0$.
- Si la famille u_1, \dots, u_p est liée, alors $\varphi(u_1, \dots, u_p) = 0$.
- Si $p > n$, alors la seule forme p -linéaire alternée sur \mathbb{R}^n est l'application nulle de $(\mathbb{R}^n)^p$ dans \mathbb{R} .

Exemples 12.4. • L'espace des formes 0-linéaires alternées peut-être identifié à \mathbb{R} .

- Les formes 1-linéaires alternées sont les formes linéaires sur \mathbb{R}^n .
- Le déterminant est une forme n -linéaire alternée sur \mathbb{R}^n .
- Pour $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'application

$$dx_j \wedge dx_k : (u, v) \mapsto dx_j(u)dx_k(v) - dx_k(u)dx_j(v) = u_j v_k - u_k v_j = \begin{vmatrix} u_j & v_j \\ u_k & v_k \end{vmatrix}$$

est une forme 2-linéaire alternée sur \mathbb{R}^n .

- Pour $j_1, \dots, j_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'application

$$dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} : (u^1, \dots, u^p) \mapsto \begin{vmatrix} u_{j_1}^1 & \dots & u_{j_1}^p \\ \vdots & & \vdots \\ u_{j_p}^1 & \dots & u_{j_p}^p \end{vmatrix} \quad (12.1)$$

est une forme p -linéaire alternée sur \mathbb{R}^n . En particulier le déterminant usuel n'est autre que $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

- On rappelle que si φ et ψ sont deux formes linéaires alors

$$\varphi \wedge \psi : (u, v) \mapsto \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u)$$

définit une forme 2-linéaire alternée sur \mathbb{R}^n .

On peut préciser les propriétés des formes p -linéaires alternées du type (12.1) :

Proposition 12.5. Soient $j_1, \dots, j_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Si les j_1, \dots, j_p ne sont pas deux à deux distincts alors la forme p -linéaire alternée $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$ est nulle.
- Pour $k < l \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on a

$$dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}} \wedge dx_{j_l} \wedge dx_{j_{k+1}} \dots \wedge dx_{j_{l-1}} \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{j_{l+1}} \dots \wedge dx_{j_p} = -dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}.$$

Les formes (12.1) sont très importantes puisqu'elles forment une base de l'espaces $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$. En particulier lorsqu'on veut montrer une propriété sur les formes p -linéaires alternées on le montre sur ces formes particulières et, lorsque c'est possible, on conclut simplement par linéarité.

Proposition 12.6. *Toute forme p -linéaire alternée φ sur \mathbb{R}^n est de la forme*

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} a_{j_1, \dots, j_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p},$$

où les coefficients a_{j_1, \dots, j_p} sont réels. Plus précisément on a

$$a_{j_1, \dots, j_p} = \varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}).$$

Exercice 1. Soient $u = (0, 1, 3, -1)$, $v = (2, 2, 2, -1)$ et $w = (1, 0, 1, -1)$ des vecteurs de \mathbb{R}^4 .

1. Calculer $\varphi(u, v)$ pour $\varphi_1 = dx_2 \wedge dx_4$, $\varphi_2 = dx_4 \wedge dx_2$ et $\varphi_3 = 2 dx_2 \wedge dx_4 - dx_1 \wedge dx_2 + 4 dx_3 \wedge dx_2 + dx_4 \wedge dx_4$.

2. Calculer $\varphi(u, v, w)$ pour $\varphi = dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1$.

12.2 Formes différentielles

On peut maintenant introduire les formes différentielles :

Définition 12.7. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle p -forme différentielle de classe C^k sur \mathcal{U} une application de classe C^k de \mathcal{U} dans $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$.

Une p -forme différentielle de classe C^k s'écrit

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} a_{k_1, \dots, k_p}(x) dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_p},$$

où les fonctions $a_{k_1, \dots, k_p} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^k .

Exemples 12.8. • Les 0-formes différentielles de classe C^k sont les fonctions de classe C^k .

• Les 1-formes différentielles correspondent bien aux formes différentielles vues au chapitre 10. En particulier si \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n et $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ est un champ de vecteur de classe C^k sur \mathcal{U} on note pour $x \in \mathcal{U}$

$$W_\xi(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j(x) dx_j : v \mapsto \langle \xi(x), v \rangle$$

Ainsi W_ξ est une 1-forme différentielle de classe C^k sur \mathcal{U} . C'est le **travail** du champ de vecteur ξ . Inversement toute 1-forme différentielle ω sur \mathcal{U} est de cette forme. En effet si ω s'écrit $\omega = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j$, alors on a $\omega = W_\xi$ avec $\xi(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$.

• Pour $x \in \mathcal{U}$ et $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ on note maintenant

$$\Phi_\xi(x; v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(\xi(x), v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Cela définit une $(n-1)$ -forme différentielle de classe C^k sur \mathcal{U} . Pour $n=3$, $\Phi_\xi(x; u_1, u_2)$ est le **flux** de $\xi(x)$ à travers le parallélogramme orienté basé sur u_1 et u_2 . Inversement toute $(n-1)$ -forme différentielle sur \mathbb{R}^n s'écrit de cette façon (le vérifier. . .).

• Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k . Alors l'application $M_f = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = f \det$ est une n -forme différentielle de classe C^k sur \mathcal{U} . f peut alors être vue comme une **densité**. En outre toutes les n -formes différentielles sur \mathcal{U} sont de cette forme.

Définition 12.9. Soit ω une p -forme différentielle sur un ouvert \mathcal{V} de \mathbb{R}^m , et $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ une application de classe C^{k+1} , où \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^n . Alors la p -forme différentielle $\varphi^* \omega$ (tiré en arrière de ω par φ) est définie sur \mathcal{U} par

$$\varphi^* \omega(x; u_1, \dots, u_p) := \omega(\varphi(x); d_x \varphi(u_1), \dots, d_x \varphi(u_p)).$$

12.3 Intégration d'une forme différentielle sur une p -courbe

De même qu'on a pu intégrer des 1-formes sur des courbes, on va maintenant définir l'intégrale d'une 2-forme sur une surface, et plus généralement d'une p -forme sur une p -courbe.

Pour les intégrales curvilignes l'idée était d'utiliser un paramétrage du chemin considéré pour se ramener à une intégrale sur un intervalle de \mathbb{R} . Pour une surface on va se ramener de la même façon à une intégrale sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , et l'intégrale d'une p -courbe sera obtenue en calculant une intégrale sur un ouvert de \mathbb{R}^p .

Définition 12.10. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle p -courbe de \mathcal{U} une application injective $\gamma : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$ telle que $d_y \gamma$ est de rang p pour tout $y \in \mathcal{W}$. L'image $\gamma(\mathcal{W})$ d'une p -courbe est appelé support de cette courbe.

Une 0-courbe de \mathbb{R}^n s'identifie à un point de \mathbb{R}^n , une 1-courbe est une courbe paramétrée, une 2-courbe est une nappe paramétrée.

Définition 12.11. Soit

$$\omega(x) = \alpha(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

une forme différentielle continue sur un ouvert \mathcal{W} de \mathbb{R}^p . Alors on note

$$\int_{\mathcal{W}} \omega = \int_{\mathcal{W}} \alpha(x) dx_1 \dots dx_p.$$

Ainsi l'intégrale d'une p -forme sur un ouvert de \mathbb{R}^p n'est rien de plus que l'intégrale au sens usuel. On peut maintenant se ramener à ce cas pour intégrer sur une surface de dimension p en utilisant un paramétrage et le tiré en arrière correspondant de notre p -forme sur un ouvert de \mathbb{R}^p :

Définition 12.12. Soient $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts, $\gamma : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ une p -courbe et ω une p -forme différentielle continue sur \mathcal{U} . Alors on pose

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\mathcal{W}} \gamma^* \omega.$$

Remarque 12.13. Si ω est une 1-forme sur \mathcal{U} et $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathcal{U}$ est une courbe paramétrée, on retrouve bien la définition

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t); \gamma'(t)) dt.$$

Dans ce paragraphe comme dans tout ce qui suit on passe sous silence les problèmes d'intégrabilité liés au fait qu'on peut se retrouver avec des intégrales généralisées.

Malheureusement les choses ne sont pas si « simples », puisque toutes les sous-variétés sur lesquelles on voudra intégrer se peuvent pas forcément être vues comme le support d'une p -courbe. Par exemple on ne va pas pouvoir intégrer sur une sphère avec cette définition. Par contre on va pouvoir intégrer sur des « morceaux » de sphère, par exemple sur des demi-sphères. L'idée va alors être plus ou moins d'intégrer sur des morceaux et de sommer les résultats. Mais pour faire ça il y a encore un certain nombre de subtilités.

12.4 Sous-variétés orientées

On a vu pour les intégrales curvilignes que l'intégrale d'une 1-forme le long d'un chemin ne dépend pas de la façon de parcourir ce chemin. Par contre on change le signe de l'intégrale si on change le sens de parcours. C'était déjà le cas pour une intégrale sur un segment de \mathbb{R} . L'intégrale de b à a est l'opposée de l'intégrale de a à b . Comme on peut s'y attendre, on aura le même genre de problème en intégrant sur une p -courbe, mais le « sens de parcours »

n'a plus vraiment de sens.

Revenons sur le cas d'une intégrale curviligne, et plus précisément sur la proposition 10.12, dont on reprend les notations. Pour déterminer si les intégrales le long de γ et de $\tilde{\gamma}$ ont même signe, on regarde si le difféomorphisme ϕ qui permet de passer de l'un à l'autre est croissant ou décroissant. Cela n'est pas transposable en dimension supérieure.

Supposons maintenant que les dérivées γ' et $\tilde{\gamma}'$ ne s'annule jamais (on n'a pas fait cette hypothèse pour le chapitre 10 mais on la fait à la définition 12.10). On considère x sur le support commun à γ et $\tilde{\gamma}$, puis $t \in [a, b]$ et $s \in [c, d]$ tels que $\gamma(t) = x = \tilde{\gamma}(s)$ (en fait on a $t = \phi(s)$). Alors les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\tilde{\gamma}'(s)$ sont des vecteurs colinéaires dans \mathbb{R}^n (ce sont des vecteurs directeurs de la tangente au support, on le voit également en écrivant $\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(t)\phi'(s)$). Si γ et $\tilde{\gamma}$ sont parcourus dans le même sens, les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\tilde{\gamma}'(s)$ sont positivement colinéaires (cela correspond au cas $\phi'(s) > 0$) tandis que si γ et $\tilde{\gamma}$ sont parcourus dans le sens contraire, les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\tilde{\gamma}'(s)$ sont négativement colinéaires (cela correspond au cas $\phi'(s) < 0$). Autrement dit le signe de la quantité

$$\langle \gamma'(t), \tilde{\gamma}'(s) \rangle$$

nous indique si les intégrales le long de γ et $\tilde{\gamma}$ ont même signe ou des signes contraires. On remarque que ce signe ne dépend pas du point x choisi sur le support puisque c'est une fonction continue qui ne s'annule pas.

En dimension supérieure l'idée est la même. On considère $\gamma : \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\gamma} : \tilde{\mathcal{W}} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux p -courbes qui ont même support Γ , puis $x \in \Gamma$, et enfin $a \in \mathcal{W}$ et $b \in \tilde{\mathcal{W}}$ tels que $\gamma(a) = x = \tilde{\gamma}(b)$. Alors si on note (e_1, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{R}^p les familles

$$\mathcal{B}(x) = (d_a\gamma(e_1), \dots, d_a\gamma(e_p)) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{B}}(x) = (d_b\tilde{\gamma}(e_1), \dots, d_b\tilde{\gamma}(e_p))$$

sont deux bases du plan tangent à Γ au point x . Comment généraliser l'idée que ces deux bases « sont dans le même sens » ? La quantité que l'on va regarder est le déterminant d'une base par rapport à l'autre base

$$\det_{\mathcal{B}(x)}(\tilde{\mathcal{B}}(x)).$$

Cette quantité est de signe constant car elle est continue et ne s'annule pas (sur un connexe...). Et les intégrales le long de γ et $\tilde{\gamma}$ auront même signe si ce déterminant est positif, et seront opposées s'il est négatif.

Ce n'est pas fini...

Plutôt que de comparer les orientations de deux p -courbes qui ont même support Γ , on peut fixer à l'avance une orientation sur Γ , et comparer l'orientation de chaque p -courbe de support Γ à cette orientation. Cela revient à se donner d'avance une famille de bases $\mathcal{B}(x)$ et de comparer la base $\tilde{\mathcal{B}}(x)$ obtenue comme précédemment à cette base de référence. Si on fixe à l'avance un sens de parcours positif sur une courbe Γ de dimension 1, pour chaque courbe paramétrée de support Γ on pourra dire qu'elle va dans le sens positif ou dans le sens négatif. Si on regarde le flux, d'un liquide par exemple, à travers une surface, on pourra choisir de compter positivement le flux dans un sens et donc négativement dans l'autre sens. C'est un choix arbitraire.

Pourquoi doit-on faire ça ? On a dit que pour intégrer sur une sous-variété M , on allait sommer les intégrales sur des p -courbes dont les supports sont des morceaux de M . On aura besoin que les orientations de ces p -courbes soient compatibles, et pour s'en assurer on va les comparer à une orientation définie globalement sur M tout entier. Le problème est qu'il n'est pas possible de définir globalement une orientation sur n'importe quelle sous-variété de \mathbb{R}^n . Lorsque c'est le cas, on dira que M est orientable :

Définition 12.14. On appelle orientation d'un espace vectoriel de dimension finie E une application ν de l'ensemble des bases de E vers $\{-1, +1\}$ telle que $\nu(\mathcal{B}) = \nu(\tilde{\mathcal{B}})$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{B}}) > 0$.

Définition 12.15. Une sous-variété M de \mathbb{R}^n est dite orientable s'il existe une application ν qui à tout $a \in M$ associe une orientation $\nu(a)$ de l'espace tangent $T_a M$ de sorte que $\nu(a)$ dépende continuellement de a . Cela signifie que pour tout paramétrage local $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ avec $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$ et $a \in \mathcal{U} \subset M$ le signe de

$$\nu(a; d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(e_1), \dots, d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(e_p))$$

ne dépend pas de a .

Si M est de dimension 1, choisir une orientation revient à choisir pour tout $a \in M$ un vecteur $\tau(a) \in T_a M \setminus \{0\}$ qui dépend continuellement de a . En termes vulgaires, le vecteur $\tau(a)$ montre le sens de parcours positifs.

Si M est de dimension $n - 1$, choisir une orientation revient à choisir pour tout $a \in M$ un vecteur $N(a) \in T_a \mathbb{R}^n \setminus T_a M$ qui dépend continuellement de a . Toujours en termes vulgaires, le vecteur $N(a)$ montre le sens du flux qui sera considéré comme positif.

Un exemple célèbre de surface non-orientable dans \mathbb{R}^3 est le ruban de Möbius. Il n'est pas possible de donner un sens au flux traversant sa surface...

12.5 Sous-variétés à bords

On introduit maintenant les sous-variétés à bords. C'est comme les sous-variétés, mais on autorise un bord :

Définition 12.16. Un ensemble M de \mathbb{R}^n est une sous-variété à bord de dimension p si pour tout $a \in M$ il existe un C^∞ -difféomorphisme φ entre un voisinage \mathcal{U} de a et un voisinage \mathcal{V} de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(a) = 0$ et

- soit $\varphi(M \cap \mathcal{U}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{V} \mid y_{p+1} = \dots = y_n = 0\}$,
- soit $\varphi(M \cap \mathcal{U}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{V} \mid y_1 \leq 0 \text{ et } y_{p+1} = \dots = y_n = 0\}$.

Un tel difféomorphisme est une coordonnée rectifiant M en a . Le bord de M , noté ∂M est l'ensemble des points a de M vérifiant la deuxième condition.

On a dit qu'une sous-variété de dimension p est une partie de \mathbb{R}^n telle que si on zoome sur un de ses points on a de plus en plus l'impression qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension p . C'est encore le cas pour certains points d'une sous-variétés à bord. Pour d'autres points on a l'impression en zoomant d'être à la frontière d'un « demi-sous-espace » de dimension p . Ce sont les points du bord.

Remarque 12.17. Une sous-variété peut-être vue comme une sous-variété à bord de bord vide. Si M est une sous-variété à bord, alors $M \setminus \partial M$ est une sous-variété.

Proposition 12.18. *Le bord d'une sous-variété à bord de dimension p est une sous-variété de dimension $p - 1$.*

Proposition 12.19. *Si M est une sous-variété à bord de \mathbb{R}^n orientable (même définition que pour une sous-variété sans bord), alors ∂M est une sous-variété orientable de \mathbb{R}^n .*

Définition 12.20. Si M est orientée par ν , $a \in \partial M$ et φ est une coordonnée rectifiant M en a , alors l'orientation ν_{∂} de ∂M est définie par

$$\nu_{\partial}(a; (d_a\varphi)^{-1}(e_2), \dots, (d_a\varphi)^{-1}(e_p)) = \nu(a; \underbrace{(d_a\varphi)^{-1}(e_1)}_{\nu_{ext}}, \dots, (d_a\varphi)^{-1}(e_p)).$$

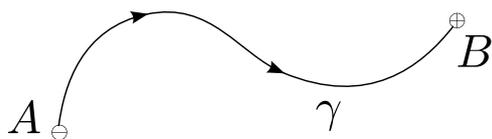


FIGURE 12.1 – Orientation du bord d’une sous-variété orientée.

Ainsi le bord d’une sous-variété orientée M à bord de dimension p est une sous-variété orientée de dimension $p - 1$. Cela nous autorise à intégrer des $(p - 1)$ -formes différentielles, et donne du sens au terme de gauche dans le théorème de Stokes.

Dans le cas d’une courbe γ comme à la figure 11.2, le support de γ est une sous-variété à bord de dimension 1, et son bord est un ensemble discret de points, soit une sous-variété de dimension 0. Orientée. Positivement pour le point d’arrivée et négativement pour le point de départ. L’intégrale d’une fonction sur un ensemble de point est simplement la somme des valeurs de f en ces points, comptées positivement pour les points orientés positivement et négativement pour les points orientés négativement. Cela permet de voir le théorème de Stokes comme une généralisation de la proposition 10.16.

12.6 Dérivée extérieure

Pour comprendre maintenant le terme de droite on va maintenant définir la dérivée d’une forme différentielle. La définition suivante ne nous sera pas utile mais elle permet de voir que la notion de dérivée extérieure généralise bien la définition de la dérivée d’une fonction

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h),$$

où on reconnaît bien que le membre de gauche est l’intégrale de f sur le bord (orienté) du segment $[a, a + h] \dots$

Définition 12.21. On dit qu’une p -forme différentielle ω est dérivable sur \mathcal{U} s’il existe une $(p + 1)$ -forme différentielle notée $d\omega$ sur \mathcal{U} telle que pour tout $a \in \mathcal{U}$ on a

$$\int_{\partial P_a^+(u_1, \dots, u_{p+1})} \omega = d\omega(a; u_1, \dots, u_{p+1}) + \underset{(u_1, \dots, u_{p+1}) \rightarrow (0, \dots, 0)}{o}(\|u_1\|, \dots, \|u_{p+1}\|),$$

où $P_a^+(u_1, \dots, u_{p+1})$ est la « p -courbe » $(t_1, \dots, t_p) \in [0, 1]^p \rightarrow a + \sum_{j=1}^p t_j u_j \in \mathbb{R}^n$, munie de l’orientation ν_+ telle que $\nu_+(u_1, \dots, u_p) = 1$.

Voir [RWM] pour une définition plus rigoureuse. En réalité on ne travaillera qu’en utilisant les propriétés suivantes (en générale prises directement comme définition de la dérivée extérieure) :

Proposition 12.22. • si ω est une forme différentielle de classe C^1 sur \mathcal{U} alors ω est dérivable sur \mathcal{U} .

- Si f est une fonction de classe C^1 sur \mathcal{U} (ie. une 0-forme différentielle), alors

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

- Si f est une fonction de classe C^1 sur \mathcal{U} et si ω_0 est une forme différentielle constante sur \mathcal{U} , alors

$$d(f \wedge \omega_0) = (df) \wedge \omega_0.$$

- Si ω_1 et ω_2 sont deux formes différentielles dérivables de degré p alors $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

Exemple 12.23. Au chapitre 11 on avait donné directement une expression pour $d\omega$ dans le cas où ω est une 1-forme sur un ouvert de \mathbb{R}^2 . On vérifie que cela correspond bien à la dérivée extérieure de ω . Soient donc P et Q deux fonctions de classe C^1 sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ et

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Alors ω est dérivable et

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

On peut alors généraliser les notions de formes fermées, exactes, et le théorème de Poincaré vues aux chapitres 10 et 11.

Définition 12.24. Une p -forme différentielle ω est dite fermée si $d\omega = 0$, et exacte s'il existe une $(p-1)$ -forme différentielle η telle que $d\eta = \omega$.

Remarque 12.25. Une forme différentielle exacte est fermée. Autrement dit, pour toute forme différentielle η on a $d^2\eta = d(d\eta) = 0$.

Théorème 12.26 (Poincaré). *Si \mathcal{U} est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^n , alors toute forme différentielle fermée de classe C^1 est exacte.*

12.7 Gradient, divergence et rotationnel

En guise d'exemples pour le paragraphe précédent, et en vue des cas particuliers du théorème de Stokes qu'on donnera au paragraphe suivant, on (re)définit maintenant dans \mathbb{R}^3 le gradient, la divergence et le rotationnel, opérateurs différentiels qui apparaissent naturellement dans bon nombre d'applications. Les deux premiers se généralisent directement à des dimensions différentes de 3.

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^3 , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteur de classe C^1 .

Définition 12.27. Le gradient de f , la divergence de ξ et le rotationnel de ξ sont définis sur \mathcal{U} par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right), \\ \text{div } \xi &= \nabla \cdot \xi = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}, \\ \overrightarrow{\text{rot}} \xi &= \nabla \times \xi = \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

∇f et $\nabla \times \xi$ définissent des champs de vecteurs sur \mathcal{U} , tandis que $\text{div } \xi$ est une fonction sur \mathcal{U} .

La divergence d'un champ de vecteur mesure la variation du volume sous l'action du champ de ce flot. Par exemple imaginons un fluide telle qu'à l'instant t la particule qui se trouve au point x se déplace à une vitesse $\xi(x)$. Alors les particules auront tendance à s'éloigner les unes des autres (et donc à occuper chacune plus de volume) là où $\text{div}_\xi > 0$, et

elles auront tendance à se rapprocher les unes des autres (et donc à occuper chacune moins de volume) là où $\operatorname{div} \xi < 0$. La divergence est d'autant plus grande que les particules s'éloignent.

Le rotationnel d'un champ de vecteur indique en chaque point l'axe autour duquel le champ de vecteur a tendance à tourner. La norme du vecteur rotationnel correspond à la vitesse de rotation, son sens indique le sens de la rotation.

Exercice 2. Dessiner les champs de vecteurs suivants, puis calculer leurs divergences et rotationnels :

$$\xi : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0), \quad \delta : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0), \quad \tilde{\delta} : (x, y, z) \mapsto (x, -y, 0), \quad \rho : (x, y, z) \mapsto (-y, x, 0).$$

Proposition 12.28. En reprenant les notations données aux exemples 12.8 pour le travail, le flux et la densité, on a

$$df = W_{\nabla f}, \quad dW_\xi = \Phi_{\operatorname{rot} \xi}, \quad \text{et} \quad d\Phi_\xi = M_{\operatorname{div} \xi}.$$

Exercice 3. Démontrer la proposition 12.28

12.8 Théorème de Stokes : idée de démonstration

On ne donnera pas une démonstration complète du théorème de Stokes. On peut tout de même le prouver pour le cas particulier du pavé, sur lequel repose la démonstration du cas général :

Lemme. Soit ω une $(p-1)$ -forme différentielle de classe C^1 dans un voisinage de $P = [0, 1]^p$. Alors on a

$$\int_{\partial P} \omega = \int_P d\omega,$$

où P est muni de l'orientation définie par $\nu(e_1, \dots, e_p) = +1$ et les faces de ∂P sont munies de l'orientation induite.

Remarque 12.29. Pour $p \geq 2$, P n'est pas une sous-variété à bord.

Démonstration. Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour une $(p-1)$ -forme différentielle de la forme

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_p,$$

où f est de classe C^1 au voisinage de P et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Dans ce cas ω est nulle sur toutes les faces de P sauf celles dirigées par $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_p)$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} \omega &= (-1)^{j-1} \left(\int_{[0,1]^{p-1}} f(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_j, \dots, t_{p-1}) dt_1 \dots dt_{p-1} \right. \\ &\quad \left. - \int_{[0,1]^{p-1}} f(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{p-1}) dt_1 \dots dt_{p-1} \right) \\ &= (-1)^{j-1} \int_{[0,1]^{p-1}} (f(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_j, \dots, t_{p-1}) \\ &\quad - f(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{p-1})) dt_1 \dots dt_{p-1} \\ &= (-1)^{j-1} \int_{[0,1]^{p-1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_j, \dots, t_{p-1}) dt \right) dt_1 \dots dt_{p-1}. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_p = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$$

donc

$$\int_P d\omega = (-1)^{j-1} \int_P \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p.$$

On conclut alors avec le théorème de Fubini. \square

Pour montrer le cas général, l'idée est de découper M en petits morceaux qui peuvent être vus comme les supports de p -courbes. Si ω est nulle en dehors d'un de ces petits morceaux, on peut donc se ramener au cas d'un pavé de \mathbb{R}^p vu précédemment. Et dans le cas général il faut sommer les contributions de ce qu'il se passe sur chacun des petits morceaux. Pour une démonstration un peu plus précise et rigoureuse, voir [Ramis-Warusefel-Moulin].

12.9 Cas particuliers importants pour le théorème de Stokes

On a dit que le théorème de Stokes était une généralisation du théorème fondamental de l'analyse 10.15. Une première généralisation avait été la proposition 10.16. On avait ensuite vu la formule de Green-Riemann (voir le théorème 11.16). Tous ces résultats peuvent maintenant être vus comme des cas particuliers du théorème de Stokes.

Mais le théorème de Stokes inclut d'autres formules que vous avez utilisées (ou utiliserez) en physique. On énonce d'abord le théorème du rotationnel, qui ressemble à la formule de Green-Riemann, sauf que la surface considérée n'est plus simplement un ouvert de \mathbb{R}^2 mais vraiment une surface de \mathbb{R}^3 . Après avoir exprimé l'intégrale sur une courbe en fonction d'une « intégrale sur les points limites », puis l'intégrale sur une surface en fonction d'une intégrale sur la courbe qui entoure cette surface, on passe ensuite à la dimension supérieure, en exprimant une intégrale de volume en fonction d'une intégrale sur la surface qui l'entoure. C'est le théorème de flux-divergence, ou formule d'Ostrogradski.

Théorème 12.30 (Théorème du rotationnel). *Soit S une surface orientée à bord de \mathbb{R}^3 . Soit $\vec{\xi}$ un champ de vecteur de classe C^1 défini au voisinage de $S \cup \partial S$. Alors on a*

$$\iint_S \text{rot}(\vec{\xi}) \cdot \vec{\nu} dA = \oint_{\partial S} \vec{\xi} \cdot \vec{\tau} ds,$$

où $\vec{\nu}$ est la normale à la surface S , $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent à ∂S et \oint désigne une intégrale curviligne.

Heuristique. Considérons un petit carré de \mathbb{R}^3 comme à la figure 12.2. La normale à ce carré est le vecteur e_x , donc l'intégrale de gauche dans le théorème du rotationnel est

$$\iint_S \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) - \frac{\partial \xi_y}{\partial z}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) \right) d\tilde{y} d\tilde{z} = \delta y \delta z \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial \xi_y}{\partial z}(x, y, z) \right) + \text{terme négligeable.}$$

Et l'intégrale curviligne de droite vaut

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{\xi} \cdot \vec{\tau} ds &= \delta y \xi_y(x, y, z) + \delta z \xi_z(x, y + \delta y, z) - \delta y \xi_y(x, y, z + \delta z) - \delta z \xi_z(x, y, z) + \text{terme négligeable} \\ &= -\delta y \frac{\partial \xi_y}{\partial z}(x, y, z) \delta z + \delta z \frac{\partial \xi_z}{\partial y}(x, y, z) \delta y + \text{terme négligeable.} \end{aligned}$$

Théorème 12.31 (Formule d'Ostrogradski - Théorème de flux-divergence). *Soit ξ un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 . Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface lisse fermée délimitant un ouvert Ω et orientée par le champ de vecteur \vec{N} normal à S et pointant vers l'extérieur de S . Alors*

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{\xi}) dV = \iint_S \vec{\xi} \cdot \vec{\nu} dA.$$

Exercice 4. Écrire une heuristique pour la formule d'Ostrogradski en considérant un petit cube de \mathbb{R}^3 de dimensions δx , δy et δz .

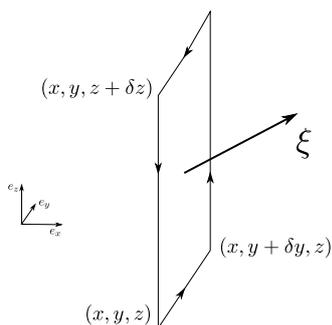


FIGURE 12.2 – Théorème du rotationnel sur un petit carré.

12.10 Exercices

Exercice 5. On considère sur \mathbb{R}^n une forme bilinéaire alternée ω et une forme linéaire α . Pour $(u, v, w) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$(\omega \wedge \alpha)(u, v, w) = \omega(u, v)\alpha(w) - \omega(u, w)\alpha(v) + \omega(v, w)\alpha(u).$$

Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est une forme trilinéaire alternée sur \mathbb{R}^n .

Exercice 6. Montrer que $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et préciser sa dimension.

Exercice 7. 1. Calculer la dérivée extérieure des formes différentielles suivantes :

$$\omega_1(x, y) = \cos(xy) dx, \quad \omega_2(x, y) = e^x dx - \sin(y) dy, \quad \omega_3(x, y, z) = xyz dx \wedge dy.$$

2. Calculer les dérivées extérieures $d^2\omega_1$, $d^2\omega_2$ et $d^2\omega_3$ des formes $d\omega_1$, $d\omega_2$ et $d\omega_3$.

Exercice 8. Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^3 , f une fonction lisse sur \mathcal{U} , X et Y deux champs de vecteurs lisses sur \mathcal{U} . Montrer que

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\nabla f) = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}X) = 0,$$

$$\text{div}(fX) = f \text{div}(X) + X \cdot f,$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(fX) = f\overrightarrow{\text{rot}}(X) + (\nabla f) \times X,$$

$$\text{div}(X \times Y) = Y \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(X) - X \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(Y).$$

Exercice 9. Soit \mathcal{U} un ouvert étoilé de \mathbb{R}^3 et $\overrightarrow{\xi}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur \mathcal{U} .

1. Montrer que si $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\xi} = 0$ alors il existe une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\overrightarrow{\xi} = \nabla f$.

2. Montrer que si $\text{div}\overrightarrow{\xi} = 0$ alors il existe un champ de vecteur $\overrightarrow{\eta}$ de classe C^2 sur \mathcal{U} tel que $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\eta}$.