Calcul Différentiel et Intégral

Examen partiel - Jeudi 07 novembre 2013

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin tout particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter les questions dans l'ordre, mais veillez à bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. On rappelle que pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
1. Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ où l'application $N : x \mapsto \|x\|_2$ est différentiable.
2. Calculer le gradient de N en chacun de ces points.

Exercice 2. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles que l'on explicitera.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
4. Montrer que les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

existent.
5. La fonction f est-elle de classe C^2 ?

Exercice 3. Déterminer les extréma locaux et globaux des fonctions suivantes :
1. $f : (x,y) \mapsto e^x - xy$.
2. $g : (x,y) \mapsto x^3 + y^2 e^x$.

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et φ l'application qui à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associe $(f(x,y), g(x,y))$. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} f(x,y) = u, \\ g(x,y) = v. \end{cases} \tag{S}$$

1. On suppose pour cette question qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = ax + by \quad \text{et} \quad g(x,y) = cx + dy.$$

On note

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Discuter selon le rang de la matrice A l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (S).

2. On revient au cas général pour toute la suite de l'exercice. On suppose dans cette question que la matrice jacobienne de φ est inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si le système (S) admet une solution, alors elle est localement unique (en un sens à préciser).

3. On suppose maintenant que la matrice jacobienne de φ est nulle en tout point de $\mathbb{R}^2$. Montrer que φ est constante sur $\mathbb{R}^2$. Discuter l'existence et l'unicité d'une solution pour le système (S).

4. Enfin on suppose que la matrice jacobienne de φ est de rang 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$. On suppose par exemple que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est non nulle sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que l'application $\psi : (x, y) \mapsto (f(x, y), y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Soient $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ et $(X_0, Y_0) = \psi(x_0, y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage $\mathcal{W}_X$ de X_0 dans $\mathbb{R}$ et un voisinage $\mathcal{W}_Y$ de Y_0 dans $\mathbb{R}$ tels que si on note $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X \times \mathcal{W}_Y$ alors ψ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}_X \times \mathcal{W}_Y$ (qu'on notera $\tilde{\psi}$).

c. On note $\Phi = \varphi \circ \tilde{\psi}^{-1}$ et $G = g \circ \tilde{\psi}^{-1}$. Justifier que Φ et Γ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathcal{W}$.

d. Soient $(x, y) \in \mathcal{V}$ et $(X, Y) = \psi(x, y) \in \mathcal{W}$. Montrer que (x, y) est solution de (S) si et seulement si

$$\begin{cases} X = u, \\ G(X, Y) = v. \end{cases} \tag{S'}$$

e. Montrer que la fonction G ne dépend pas de Y *(on pourra commencer par s'intéresser au rang de la jacobienne de Φ en tout point de $\mathcal{W}$).*

f. Discuter l'existence et l'unicité d'une solution pour le système (S').

Corrigé

Exercice 1. 4,5 pts (3+1,5)
1. L'application N est différentiable sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ comme composée de l'application $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1^2+\cdots+x_n^2$ polynomiale donc différentiable et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction racine carrée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $e_1=(1,0,\dots,0)$. Pour $t\in\mathbb{R}$ on a $N(te_1)=|t|$. La fonction $t\mapsto N(te_1)$ n'est pas dérivable en 0, donc N n'est pas dérivable en 0 dans la direction e_1, et donc pas différentiable en 0.
2. Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Alors on a

$$\nabla N(x)=\left(\frac{2x_1}{2N(x)},\dots,\frac{2x_n}{2N(x)}\right)=\frac{x}{N(x)}.$$

Exercice 2. 9,5 pts (1,5 + 3 + 2 +2 + 1)
1. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$. Alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'autre part pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $f(x,0)=0$, donc la dérivée partielle par rapport à x existe en (0,0) et vaut 0. De même la dérivée partielle par rapport à y existe en (0,0) et vaut également 0 car $f(0,y)=0$ pour tout $y\in\mathbb{R}$.
3. Pour $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\right|\leqslant\frac{r^3\left|\cos(\theta)^2-\sin(\theta)^2\right|}{r^2}+\frac{4r^5\left|\cos(\theta)\right|^2\left|\sin(\theta)\right|^2}{r^4}\leqslant 6r\xrightarrow[r\to0]{}0.$$

Cela prouve que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

et donc que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en (0,0). On montre de même que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en (0,0). Comme on sait déjà que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$, on obtient en particulier que f est de classe C^1 et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$$

donc la dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0. De même pour tout $y\in\mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y$$

donc la dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et vaut -1.
5. Si f était de classe C^2 alors d'après le théorème de Schwartz les deux dérivées croisées de la question précédente seraient égales. Par contraposée, f n'est pas de classe C^2.

Exercice 3. 6 pts (3 + 3)

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme d'une fonction exponentielle et d'une fonction polynomiale. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\nabla f(x,y) = (e^x - y, -x).$$

Le seul point critique de f est donc le point $(0,1)$. D'autre part

$$\det \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{vmatrix} e^x & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Cela implique que f admet un point selle au point (0,1). Ainsi g n'admet aucun extremum local, et donc en particulier aucun extremum global.
2. La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de produits de fonctions exponentielles et polynomiales. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\nabla g(x,y) = (3x^2 + y^2 e^x, 2ye^x).$$

Ainsi le seul point critique de g est le point (0,0). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f(t,0) = t^3 > 0 = f(0,0)$ et $f(-t,0) < 0$, donc le point $(0,0)$ n'est pas un extremum local pour g. Ainsi g n'admet aucun extremum local, et donc en particulier aucun extremum global.

Exercice 4. 10 pts (1+1,5+2+0,5+1,5+0,5+1+1+1)
1. Dans cette question on étudie un simple système linéaire de deux équations à deux inconnues. Si la matrice A est de rang 2, elle est inversible. Le système (S) admet donc une unique solution, donnée par $(x,y) = A^{-1}(u,v)$. Si A est de rang 0 elle est nulle. Le système (S) n'admet alors aucune solution, sauf si $(u,v) = (0,0)$, auquel cas tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est solution. Supposons maintenant que A est de rang 1. Alors les lignes de A sont liées, donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\lambda(a,b) + \mu(c,d) = 0$. Si $\lambda u + \mu v = 0$, alors le système admet une infinité de solutions (plus précisément l'ensemble des solutions est une droite de $\mathbb{R}^2$. Si $\lambda u + \mu v \neq 0$ alors le système (S) n'admet aucune solution.
2. On suppose que $z = (x,y)$ est tel que $\varphi(z) = w = (u,v)$. Par hypothèse l'application linéaire $d_z\varphi$ est inversible, donc d'après le théorème de l'inversion locale il existe un voisinage $\mathcal{Z}$ de z dans $\mathbb{R}^2$ et un voisinage $\mathcal{W}$ de w dans $\mathbb{R}^2$ tels que φ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{W}$. En particulier il n'y a pas d'autre solution que z au système (S) dans le voisinage $\mathcal{Z}$.
3. L'hypothèse implique en particulier que la différentielle de φ est nulle en tout point de $\mathbb{R}^2$. Soient a et b dans $\mathbb{R}^2$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $\sigma(t) = a + t(b-a)$. L'application $\varphi \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 et on a

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(\sigma(1)) - \varphi(\sigma(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(\varphi(\sigma(t))\big)\,dt = \int_0^1 d_{\sigma(t)}\varphi(\sigma'(t))\,dt = 0.$$

Cela prouve que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Ceci étant valable pour tous point a et b de $\mathbb{R}^2$, on a montré que φ est constante sur $\mathbb{R}^2$. Notons $(\tilde{u},\tilde{v})$ cette constante. Si $(u,v) = (\tilde{u},\tilde{v})$ alors tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est solution de (S), sinon (S) n'admet pas de solution.
4. a. La fonction ψ est de classe C^1 car chaque coordonnée l'est.
b. On a

$$\det \operatorname{Jac} \psi(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0.$$

D'après le théorème de l'inversion locale, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (x_0,y_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage $\mathcal{W}$ de (X_0,Y_0) dans $\mathbb{R}^2$ tels que ψ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$. Quitte à réduire $\mathcal{W}$, on peut supposer qu'il est de la forme $\mathcal{W}_X \times \mathcal{W}_Y$ où $\mathcal{W}_X$ et $\mathcal{W}_Y$ sont respectivement des voisinages de X_0 et Y_0 dans $\mathbb{R}$.
c. Φ et G sont de classe C^1 sur $\mathcal{W}$ comme composées de fonctions de classe C^1.

d. Par définition on a $X = f(x,y)$ et $G(X,Y) = g(x,y)$, donc (X,Y) est effectivement solution de (S') si et seulement si (x,y) est solution de (S).

e. Pour tout $(X,Y) \in \mathcal{W}$ on a $\Phi(X,Y) = (X, G(X,Y))$ donc

$$\operatorname{Jac}\Phi(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial G}{\partial X}(X,Y) & \frac{\partial G}{\partial Y}(X,Y) \end{pmatrix}.$$

D'autre part on a

$$\operatorname{Jac}\Phi(X,Y) = \operatorname{Jac}\varphi(\tilde{\psi}^{-1}(X,Y)) \circ \operatorname{Jac}\tilde{\psi}^{-1}(X,Y).$$

Puisque $\operatorname{Jac}\psi^{-1}(X,Y)$ est inversible (c'est la matrice jacobienne d'un C^1-difféomorphisme), on obtient que

$$\operatorname{rang}\operatorname{Jac}\Phi(X,Y) = \operatorname{rang}\operatorname{Jac}\varphi(\tilde{\psi}^{-1}(X,Y)) = 1.$$

Cela implique que la dérivée de G par rapport à Y est nulle. Ceci étant vrai pour tout $(X,Y) \in \mathcal{W}$, on obtient que G ne dépend pas de Y.

5. Le système (S') se ré-écrit

$$\begin{cases} X = u, \\ G(X) = v. \end{cases}$$

Si $v \neq G(u)$ alors ce système n'admet pas de solution. Si $v = G(u)$ alors pour tout $Y \in \mathcal{W}_Y$ le couple (u,Y) est solution. Il y a donc une infinité de solutions.

Commentaires

- On ne calcule pas la dérivée d'une fonction avant d'avoir justifié qu'elle est dérivable. Et surtout on ne calcule pas la dérivée d'une fonction pour dire que l'expression obtenue a bien un sens et donc la fonction était dérivable.
- Il faut introduire les variables que vous utilisez, dire où sont valables les calculs que vous faites (surtout quand ils ne sont pas valable partout...)
- Il faut revoir les définitions d'une fonction continue, d'une fonction qui admet des dérivées partielles, qui est différentiable, de classe C^1. Et bien savoir quelle propriété implique quelle autre.
- L'argument « f est de classe C^1 comme composée de fonctions usuelles » n'est valable que quand f est la composée de fonctions usuelles.
- Pour la question 2.2, il était tellement simple de calculer les dérivées partielles en (0,0) en revenant simplement à la définition...
- Pour la question 2.4, on ne demandait le calcul des dérivées secondes croisées qu'en (0,0). Beaucoup d'entre vous ont calculé ces dérivées en tout point de $\mathbb{R}^2$, avec un calcul qui en fait n'est justement pas valable en (0,0). Et qui était bien plus compliqué que ce qui était demandé.
- L'égalité des dérivées croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ n'est pas automatique. Cela résulte d'un théorème bien précis (qu'il faut mentionner quand on l'utilise), qui repose sur des hypothèses bien précises (qu'il faut donc vérifier pour utiliser le théorème).
- Le théorème des gendarmes repose sur un encadrement et pas seulement sur une majoration. En particulier pour la proposition 2.8 on majore la VALEUR ABSOLUE de la différence.
- Il faut savoir calculer le déterminant d'une matrice 2×2, même quand on n'est pas en examen d'algèbre linéaire.
- Le fait que f est constante si sa différentielle est partout nulle n'est pas évident. D'ailleurs ce n'est pas forcément vrai.