Calcul Différentiel et Intégral

Examen final - lundi 13 janvier 2014

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter le sujet dans l'ordre, mais veillez à toujours bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & \big(xye^z, \cos(yz)\big) \end{array} \right.$$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la différentielle de f au point (1,2,3).

Exercice 2. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle $\omega = xy\,dx + y\,dy$. On considère les points $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$, et Γ le triangle ABC orienté dans le sens trigonométrique.
1. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma \omega$
   a. directement,
   b. puis en utilisant la formule de Green-Riemann.
2. La forme ω est-elle exacte ? Si oui, en donner une primitive.

Exercice 3. Déterminer les extréma locaux des fonctions suivantes :
1. $f : (x,y) \mapsto 2x + y - x^4 - y^4$,
2. $g : (x,y) \mapsto \exp\Big(\big(2x + y - x^4 - y^4\big)^3\Big)$,
3. $h : (x,y) \mapsto 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble E d'équation

$$\big((x^2-1)^2 + y^2\big)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

1. L'ensemble E est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Si oui, le démontrer et préciser la dimension. Si non, on ne demande pas de justification.
2. Même question pour $E \cap P$, où P est le plan d'équation $z = 0$.

Exercice 5. Soient a et f deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles (équation de Burgers)

$$a(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{B}$$

avec condition initiale

$$u(x,0) = f(x). \tag{C.I.}$$

L'inconnue est la fonction $u : (x,t) \mapsto u(x,t)$.

1. Montrer que l'équation

$$u = f(x - ta(u))$$

définit localement (autour de $(x_0, 0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$) une fonction u des variables (x,t) qui est solution du problème (B)-(C.I.).

2. Donner une solution (sur un domaine à préciser) du problème

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(x,0) = 1 - x. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1. **1.** L'application $(x,y,z) \mapsto xye^z$ est de classe C^∞ comme produit de fonctions usuelles C^∞. De même $(x,y,z) \mapsto yz$ est C^∞ et donc $(x,y,z) \mapsto \cos(yz)$ est C^∞ comme composée de fonctions C^∞. Cela prouve que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (ye^z, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (xe^z, -z\sin(yz)), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (xye^z, -y\sin(yz)).$$

En particulier, la differentielle de f au point (1,2,3) est l'application linéaire

$$(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \big(2e^3u + e^3v + 2e^3w, 3\sin(6)v, 2\sin(6)w\big) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2. **1.** a. On utilise les paramétrages suivants :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: t \in [-1,1] \mapsto (t,0),\\
\gamma_2 &: t \in [0,1] \mapsto (1-t,t),\\
\gamma_3 &: t \in [0,1] \mapsto (-t,1-t).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega\\
&= 0 + \int_0^1 \big(-t(1-t) + t\big)\, dt + \int_0^1 \big(t(1-t) - (1-t)\big)\, dt\\
&= 0.
\end{aligned}$$

b. On a $d\omega = -x\, dx \wedge dy$ Si on note T le triangle ABC on a d'après la formule de Green-Riemann

$$\int_\Gamma \omega = \int_{\partial T} \omega = -\iint_T x\, dx\, dy = -\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=-1+y}^{1-y} x\, dx\right) dy = 0.$$

2. On a vu à la question précédente que $d\omega \neq 0$, ce qui signifie que la forme ω n'est pas fermée. Elle ne peut donc pas être exacte car une forme exacte (de classe C^1) est toujours fermée.

Exercice 3. **1.** La fonction f est polynômiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2 - 4x^3 = 0 \\ 1 - 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2^{-\frac{1}{3}} \\ y = 4^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Ainsi f admet un unique point critique, au point $\big(2^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}}\big)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a d'autre part

$$\det \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{vmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2.$$

En particulier

$$\det \operatorname{Hess} f\big(2^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}}\big) > 0.$$

Cela prouve que f admet un extremum local en $\big(2^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}}\big)$. Puisque

$$\operatorname{Tr} \operatorname{Hess} f\big(2^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}}\big) < 0,$$

f admet un maximum local en ce point (et c'est le seul extremum local de f).
2. On a $g = \varphi \circ f$ où

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \exp(t^3) \end{array} \right.$$

La fonction φ est strictement croissante (comme composée de deux fonctions strictement croissantes), donc g admet des extrema locaux aux mêmes points que f, et ils sont de même nature. Ainsi g admet un unique extremum local, il s'agit d'un maximum au point $\left(2^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}}\right)$.
3. La fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme composée de la fonction polynômiale

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

et la fonction racine qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a

$$\nabla h(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \neq (0,0).$$

Cela prouve que h n'admet pas de point critique et donc pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

D'autre part, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a

$$h(x,y) < 1 = h(0,0).$$

Cela prouve que h admet un maximum global strict (en particulier c'est un maximum local) en (0,0).

Exercice 4. **1.** Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on note

$$F(x,y,z) = \left((x^2-1)^2 + y^2\right)^2 + z^2 - \frac{1}{4} \in \mathbb{R}.$$

F est polynômiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$(x,y,z) \in E \iff F(x,y,z) = 0.$$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\nabla F(x,y,z) = \left(8x(x^2-1)\left((x^2-1)^2+y^2\right), 4y\left((x^2-1)^2+y^2\right), 2z\right)$$

Ce gradient ne s'annule qu'aux points (0,0,0), (1,0,0) et (-1,0,0), qui ne sont pas des points de E car $F(1,0,0) = F(-1,0,0) = -1/4$ et $F(0,0,0) = 3/4$. Ainsi, en tout point de E la différentielle de F est de rang maximal 1, ce qui prouve que E est une sous-variété de dimension 3-1 = 2 dans $\mathbb{R}^3$.
2. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on note

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} \left((x^2-1)^2+y^2\right)^2 + z^2 - \frac{1}{4} \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

G est polynômiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$(x,y,z) \in E \cap P \iff G(x,y,z) = 0.$$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\operatorname{Jac} G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8x(x^2-1)\left((x^2-1)^2+y^2\right) & 4y\left((x^2-1)^2+y^2\right) & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce jacobien est de rang 2 partout sauf aux points de la forme $(0,0,z)$, $(1,0,z)$ et $(-1,0,z)$ pour $z \in \mathbb{R}$. Aucun de ces points n'appartient à $E \cap P$ (c'est clair si $z \neq 0$, et si $z = 0$

on retrouve les trois points de la question précédente), donc $E \cap P$ est une sous-variété de dimension 3-2 = 1 dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. **1.** Pour $(x, t, v) \in \mathbb{R}^3$ on note

$$F(x, t, v) = f(x - ta(v)) - v.$$

F ainsi définie est de classe C^1 et pour tout $(x, t, v) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\nabla F(x, t, v) = \big(f'(x - ta(v)), -a(v)f'(x - ta(v)), -ta'(v)f'(x - ta(v)) - 1\big).$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a en particulier $F(x_0, 0, f(x_0)) = 0$ et

$$\nabla F(x_0, 0, f(x_0)) = \big(f'(x), -a(f(x_0))f'(x), -1\big) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe des voisinages Ω_x de x_0, Ω_t de 0 et $\mathcal{V}$ de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}$, ainsi qu'une fonction u de classe C^1 de $\Omega_x \times \Omega_t$ dans $\mathcal{V}$ tels que pour tous $(x, t, v) \in \Omega_x \times \Omega_t \times \mathcal{V}$ on a

$$F(x, t, v) = 0 \quad \iff \quad v = u(x, t).$$

Montrons que la fonction u ainsi définie est solution sur $\Omega_x \times \Omega_t$ du problème (B)-(C.I.). Pour tout $(x, t) \in \Omega_x \times \Omega_t$ on a

$$F(x, t, u(x, t)) = 0$$

donc en dérivant par rapport à x et t on obtient

$$\partial_x F(x, t, u(x, t)) + \partial_v F(x, t, u(x, t))\partial_x u(x, t) = 0$$

et

$$\partial_t F(x, t, u(x, t)) + \partial_v F(x, t, u(x, t))\partial_t u(x, t) = 0.$$

On sait que $\partial_z F(x_0, 0, u(x_0, 0)) \neq 0$ donc par continuité, quitte à réduire Ω_x et Ω_t, on peut supposer que c'est encore le cas pour tout $(x, t) \in \Omega_x \times \Omega_t$. Pour tout $(x, t) \in \Omega_x \times \Omega_t$ on a alors

$$\begin{aligned}
&a(u(x,t))\partial_x u(x,t) + \partial_t u(x,t) \\
&\quad = -\frac{1}{\partial_v F(x,t,u(x,t))}\big(a(u(x,t))\partial_x F(x,t,u(x,t)) + \partial_t F(x,t,u(x,t))\big) \\
&\quad = -\frac{1}{\partial_v F(x,t,u(x,t))}\big(a(u(x,t))f'(x - ta(u(x,t)) - a(u(x,t))f'(x - ta(u(x,t)))\big) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Cela prouve que u vérifie (B) sur $\Omega_x \times \Omega_t$. En outre il est clair que pour tout $x \in \Omega_x$ on a bien

$$u(x, 0) = f(x - 0 \times a(u(x, 0))) = f(x),$$

donc (C.I.) est également vérifiée.

2. Dans ce cas particulier, l'équation $F(x, t, u) = 0$, s'écrit

$$1 - (1 - tu) - u = 0,$$

dont on tire

$$u = \frac{1 - x}{1 - t}.$$

Il est facile de vérifier que la fonction $(x, t) \mapsto u(x, t) = \frac{1-x}{1-t}$ est bien solution du problème (B)-(C.I.) sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{1\})$.