Chapitre 7

Intégrales multiples

On commence dans ce chapitre à parler d'intégration pour une fonction de plusieurs variables. Les intégrales multiples sont l'objet principal de ce chapitre. On évoquera également les intégrales à paramètre (que le sous-groupe des matheux verra plus en détail par ailleurs).

Considérons par exemple une fonction de deux variables, définie et continue sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$. Pour tout $x \in [c, d]$ l'application $t \mapsto f(t, x)$ est une fonction d'une seule variable, continue et donc intégrable sur le segment $[a, b]$. Pour tout $x \in [c, d]$ on peut donc considérer la quantité

$$\phi(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt.$$

Dans cette intégrale, x est considéré comme une constante (vous êtes maintenant habitués à ce petit jeu). Mais vous n'êtes pas dupes, vous vous doutez bien qu'on a maintenant envie d'étudier la fonction $x \mapsto \phi(x)$. Est-elle continue ? Ce n'est pas clair, mais on verra que c'est effectivement le cas. Les choses se compliquent un peu si on remplace le segment $[a, b]$ par un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Bien sûr il n'est déjà plus si clair que l'intégrale définissant $\phi(x)$ a bien un sens pour tout x, et il est ensuite un peu plus subtile de s'assurer que la fonction ϕ obtenue est bien continue.

Une fois qu'on aura assuré la continuité de la fonction ϕ, on pourra se demander à quelle condition sur f l'intégrale ϕ est dérivable, de classe C^k, etc. Une idée ?

On observe que comme la continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales, on n'aura pas trop de difficulté à remplacer le segment $[c, d]$ par un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Pour toutes ces questions les deux variables t et x jouent vraiment des rôles très différents. t est une variable d'intégration, x est plutôt vu comme un paramètre.

Une autre question, pour laquelle t et x ont des rôles plus symétriques, est de chercher à intégrer ϕ. En effet, si ϕ est continue sur le segment $[c, d]$, elle est intégrable sur ce même segment. On peut donc considérer la quantité

$$I = \int_c^d \phi(x)\, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, x)\, dt \right) dx.$$

Évidemment, on aurait pu commencer par intégrer la fonction $x \mapsto f(t, x)$ sur $[c, d]$ pour chaque $t \in [a, b]$ fixé, puis intégrer la quantité obtenue par rapport à t. Autrement dit on aurait pu considérer

$$\tilde{I} = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x)\, dx \right) dt.$$

Les intégrales I et $\tilde{I}$ sont-elles égales ? Que représentent-elles ? Peut-on intégrer sur autre chose qu'un rectangle ? Réponses (partielles) dans les quelques pages qui suivent...

7.1 Intégrales à paramètres

On donne (très) rapidement les résultats principaux concernant les intégrales à paramètre. On énonce également le théorème de convergence dominée pour une suite d'intégrales (plutôt que pour une intégrale dépendant d'un paramètre x continu).

Les hypothèses utilisées ici peuvent être affaiblies. En outre, on intègre ici par rapport à une variable réelle t et on obtient une fonction d'une variable réelle x. En partant d'une fonction f à $p+n$ variables on pourrait également (après avoir vu les intégrales multiples) intégrer par rapport à p variables $t_1, \dots, t_n$ et obtenir une fonction de n variables $x_1, \dots, x_n$. Néanmoins il est complètement raisonnable, au moins dans un premier temps, de se contenter des énoncés présentés ici.

7.1.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 7.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur I. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement*[1] *vers une fonction f et qu'il existe une fonction g intégrable sur I telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant g(t).$$

Alors f est intégrable sur I et on a

$$\int_I f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f(t)\,dt.$$

⚠Attention, le fait de pouvoir passer à la limite sous l'intégrale n'a rien d'évident, il n'est d'ailleurs pas difficile de trouver des contre-exemples dès qu'on retire l'hypothèse de domination.

7.1.2 Cas d'une intégrale sur un segment

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et J un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f de $[a,b] \times J$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à étudier l'application ϕ définie sur J par

$$\phi(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt.$$

Proposition 7.2. *On suppose que f est continue sur $[a,b] \times J$. Alors ϕ est définie et continue sur J.*

Proposition 7.3. *On suppose que J est un intervalle ouvert. On suppose que f est continue sur $[a,b] \times J$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, elle-même continue sur $[a,b] \times J$. Alors l'application ϕ précédente est bien définie sur J, elle est de classe C^1 et*

$$\forall x \in J, \quad \phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt.$$

Les démonstrations de ces deux propositions, ainsi que des deux théorèmes ci-dessous, sont dans [Liret-Martinais, Analyse 2ème année].

7.1.3 Cas d'une intégrale généralisée

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $[a, b[\times J$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse, lorsqu'elle est bien définie, à la fonction ϕ définie sur J par

$$\phi(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt.$$

1. Cela signifie que $f_n(t)$ tend vers $f(t)$ quand n tend vers $+\infty$ pour tout $t \in I$.

Théorème 7.4 (Théorème de continuité sous l'intégrale)**.** *On suppose que f est continue sur $[a,b[\times J$ et qu'il existe une fonction g continue de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

(i) $\forall t \in [a,b[, \forall x \in J, \ |f(t,x)| \leqslant g(t)$.

(ii) L'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ *est convergente.*

Alors l'application ϕ est bien définie et continue sur J.

Théorème 7.5 (Théorème de dérivation sous l'intégrale)**.** *On suppose que l'intervalle J est ouvert. On suppose que f est continue sur $[a,b[\times J$ et que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente pour tout $x \in J$. On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur $[a,b[\times J$. Enfin on suppose qu'il existe une fonction g continue de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

(i) $\forall t \in [a,b[, \forall x \in J, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant g(t)$,

(ii) l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\,dt$ *est convergente.*

Alors pour tout $x \in J$ l'intégrale $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ est absolument convergente. En outre la fonction ϕ est définie et de classe C^1 sur J, et

$$\forall x \in J, \quad \phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt.$$

Exemple 7.6. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\,dt.$$

Alors φ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \varphi(0).$$

Démonstration. • Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$ on note

$$f(t,x) = e^{-t^2} \cos(tx).$$

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(t,x)| \leqslant e^{-t^2} = \underset{t \to +\infty}{O}(e^{-t}).$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente, donc $\int_0^{+\infty} f(t,x)\,dt$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

• Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = \left|-t\sin(tx)e^{-t^2}\right| \leqslant te^{-t^2}.$$

Or l'application $t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $A \geqslant 0$ on a

$$\int_0^A te^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^A = -\frac{1}{2}e^{-A^2} + \frac{1}{2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ est convergente. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, φ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(tx)\,dt.$$

Soit $A \geqslant 0$. En faisant une intégration par parties on a

$$\begin{aligned}
\int_0^A -te^{-t^2}\sin(tx)\,dt &= \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(tx)\right]_0^A - \frac{1}{2}\int_0^A e^{-t^2}x\cos(tx)\,dt \\
&= \frac{1}{2}e^{-A^2}\sin(Ax) - \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\cos(tx)\,dt \xrightarrow[A\to+\infty]{} -\frac{x}{2}\varphi(x).
\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = -\frac{x}{2}\varphi(x)$$

et donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}\varphi(0).$$

□

Remarque. Pour avoir la dérivabilité de ϕ sur J, il suffit de montrer la dérivabilité en tout point de J. En pratique il suffit donc de vérifier l'hypothèse de domination localement (en x) autour de chaque point $x_0 \in J$.

7.2 Construction de l'intégrale de Riemann sur $\mathbb{R}^n$

On s'intéresse maintenant à l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables. Il s'agira ici de l'intégrale de Riemann. On rappelle que l'intégrale de Riemann d'une fonction sur un segment de $\mathbb{R}$ est définie de la façon suivante :

- l'intégrale de la fonction indicatrice d'un intervalle est définie de façon évidente,
- par linéarité, on définit l'intégrale d'une fonction en escalier (ou étagée),
- et enfin, lorsque c'est possible (dans un sens particulier, et dans ce cas on parle de fonction Riemann intégrable), on approche la fonction étudiée par des fonctions en escalier, puis on définit l'intégrale comme la limite des intégrales de ces fonctions en escalier,
- on montre ensuite qu'en particulier les fonctions continues, ou au moins continues par morceaux, sont toujours Riemann intégrables sur un segment.

L'intégrale de Riemann d'une fonction de plusieurs variables se construit de façon analogue, même s'il y a un certain nombre de subtilités supplémentaires. On ne donnera ici que les étapes de la construction, sans s'attarder sur les démonstrations (pour plus de détail, consulter par exemple le paragraphe IV.3 [Ramis-Warusfel, Tout-en-un pour la licence, niveau L2]. La raison est que vous verrez en L3 une autre façon de définir l'intégrale d'une fonction, à savoir l'intégrale de Lebesgue. Cet autre point de vue sera bien plus efficace pour obtenir les résultats d'intégration théoriques.

Par contre, tant qu'il s'agit de calculer les intégrales de fonctions simples sur des domaines simples (en des sens à préciser), cela revient au même de définir l'intégrale d'une façon ou d'une autre. Ainsi il est pertinant de s'entraîner à calculer concrètement des intégrales même avant de connaître l'intégrale de Lebesgue. C'est l'objectif de ce chapitre.

Ainsi je vous conseille de lire ce paragraphe, mais vous pouvez sans trop de scrupules le passer et vous concentrer sur les suivants, qui constituent le véritable objectif de ce chapitre.

Comme en dimension 1, on commence par définir l'intégrale dans le cas trivial. L'intégrale de la fonction constante égale à α sur le pavé

$$P(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n) = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

est définie comme étant égale à

$$\int_{P(a_1,b_1;\dots;a_n,b_n)} \alpha = \alpha \operatorname{Vol}(P) = \alpha \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

On définit ensuite par linéarité l'intégrale d'une fonction f définie sur un pavé P et telle qu'il existe un nombre fini de pavés $P_1, \dots, P_k$ tels que P est égal à l'union de ces pavés, ils sont d'intérieurs disjoints (cela signifie que si on oublie les bords il n'y a pas d'intersection) et f est constante sur chacun de l'intérieur de ces pavés (on ne se préoccupe pas de la valeur sur les bords des pavés, de même qu'une intégrale en dimension 1 ne dépend pas de la valeur en un point donné).

On se donne maintenant une fonction f sur un pavé P. Si on se donne des sous-pavés $P_1, \dots, P_k$ d'intérieurs disjoints et tels que $P = \bigcup_{j=1}^k P_k$, ainsi que des points $x_1 \in P_1$, ..., $x_k \in P_k$. On sait alors donner un sens à l'intégrale de la fonction qui vaut $f(x_j)$ sur l'intérieur du pavé P_j pour tout $j \in [\![1, k]\!]$:

$$I(P_1, x_1, \dots, P_k, x_k) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \operatorname{Vol}(P_j).$$

On dit alors que f est intégrable sur P si cette quantité tend vers un réel I quand les longeurs des côtés des sous-pavés tendent toutes vers 0 (le nombre de sous-pavés tend lui vers $+\infty$), indépendamment du choix de ces sous-pavés. On dit alors que cette valeur I est l'intégrale de f sur le pavé P. On vérifie ensuite qu'en particulier les fonctions continues sur P sont intégrables.

Ce qui précède permet de définir l'intégrabilité et l'intégrale sur un pavé. Par linéarité on peut étendre sans difficulté la définition à une union finie de pavés. Mais on aimerait pouvoir intégrer des fonctions sur des domaines qui ne sont pas des unions de pavés, par exemple un simple disque de $\mathbb{R}^2$. On se donne donc une fonction continue (on pourrait chercher à considérer des fonctions plus générales, mais cela ne nous intéressera pas ici) sur un domaine ouvert et borné $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. On peut alors trouver une suite $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de pavés inclus dans $\mathcal{U}$, d'intérieurs deux à deux disjoints, et tel que tout $x \in \mathcal{U}$ appartient à P_j pour au moins un $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on note I_j l'intégrale de f sur le pavé P_j. On dit alors que f est intégrable sur $\mathcal{U}$ si la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} I_j$$

est absolument convergente et dans ce cas on appelle intégrale de f sur $\mathcal{U}$ la somme de cette série. Pour que cela ait un sens il faut que cette limite soit indépendante du choix de la suite $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ce qui est effectivement le cas.

De même qu'on utilise rarement les sommes de Riemann pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$, la construction qu'on vient d'esquisser ne permet pas de calculer concrètement des intégrales de fonctions sur des domaines de $\mathbb{R}^n$. C'est le théorème de Fubini 7.9, qui permet de ramener le calcul d'une intégrale de $\mathbb{R}^n$ au calcul de n intégrales unidimensionnelles, que l'on utilisera en pratique.

S'il n'est pas primordial à ce stade de retenir en détail la construction de l'intégrale de Riemann sur $\mathbb{R}^n$, il sera par contre indispensable de bien savoir utiliser ce théorème pour savoir calculer concrètement des intégrales « simples ».

7.3 Intégrale d'une fonction continue sur un domaine simple

7.3.1 Intégration sur un domaine de $\mathbb{R}^2$

On arrive maintenant au cœur de ce chapitre, où on cherche à calculer des intégrales de fonctions « simples » sur des domaines « simples » de $\mathbb{R}^2$. On commence par définir le type de domaines sur lesquels on va intégrer.

Définition 7.7. Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$, et des fonctions φ_1, φ_2 continues sur $[a, b]$ et ψ_1, ψ_2 continues sur $[c, d]$ telles que $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ pour tout $y \in [c, d]$ et

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \leqslant y \leqslant d, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\right\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'intérieur de A est

$$\begin{aligned} \mathring{A} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\right\}. \end{aligned}$$

Exemples 7.8. • Le pavé $[a, b] \times [c, d]$ avec $a < b$ et $c < d$ est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$.
• Le disque unité

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

peut s'écrire

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leqslant x \leqslant 1, -\sqrt{1 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2}\right\}$$

ou encore

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leqslant y \leqslant 1, -\sqrt{1 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1 - y^2}\right\}.$$

Théorème 7.9 (Fubini)**.** *Soient A une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur A. Avec les notations de la définition précédente, on a*

$$\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\right) dy.$$

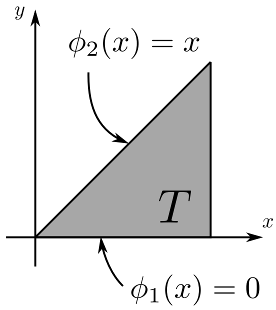
Remarque 7.10. • Le théorème précédent peut être lu de deux façons différentes. Si vous avez bien compris la construction de l'intégrale d'une fonction continue sur un domaine A de $\mathbb{R}^2$, le théorème dit que cette intégrale est en fait égale à ce qu'on obtient en intégrant d'abord par rapport à une variable puis par rapport à l'autre, comme présenté en introduction, et indépendamment de l'ordre d'intégration. Si vous avez esquivé le paragraphe précédent, le théorème dit que les deux dernières intégrales de l'égalité sont égales, et on prend leur valeur commune comme définition de l'intégrale de f sur A. Dans tous les cas ce théorème est admis.
• On écrit parfois $\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$ pour insister sur le fait que c'est une intégrale qui porte sur deux variables. On peut faire de même pour les intégrales portant sur trois variables, mais en général on abandonne cette convention au-delà...

Exemples 7.11. On cherche à calculer l'intégrale de la fonction $(x, y) \mapsto xy^2$ sur le pavé $P = [0, 1] \times [1, 2]$. On a

$$\int_P xy^2\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 xy^2\, dy\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{8x}{3} - \frac{x}{3}\right) dx = \int_0^1 \frac{7x}{3}\, dx = \frac{7}{6}$$

mais aussi

$$\int_P xy^2\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 xy^2\, dx\right) dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2}\, dy = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$



Exemple 7.12. On note

$$T = \left\{(x, y) \in [0,1]^2 \mid y \leqslant x\right\}.$$

On a alors

$$\iint_T x^2y^3\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2y^3\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \frac{x^6}{4}\,dx = \frac{1}{24}.$$

Définition 7.13. On appelle partie simple de $\mathbb{R}^2$ un ensemble S qui s'écrit comme union finie de parties élémentaires $A_1, \ldots, A_n$ d'intérieurs deux à deux disjoints :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies \mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset.$$

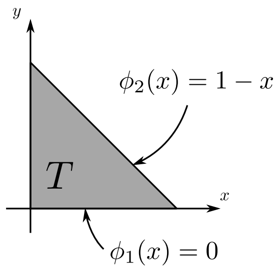
Si f est une fonction continue sur S, on définit alors

$$\int_S f = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f$$

Exemple 7.14. La couronne $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2\right\}$ est une partie simple de $\mathbb{R}^2$.

Définition 7.15. Soit A une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$. Alors on appelle aire de A la quantité

$$\iint_A 1\,dx\,dy.$$



Exemple 7.16. On considère le triangle $T = \left\{(x, y) \in [0,1]^2 \mid x + y \leqslant 1\right\}$. On a

$$\text{Aire}(T) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 1\,dy\right)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Exemple 7.17. On considère le disque D de centre 0 et de rayon 1. Alors on a

$$\begin{aligned}\text{Aire}(D) &= \int_{x=-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\right)\,dx = 2\int_{x=-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}\cos(\theta)\,d\theta \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1+\cos(2\theta)\big)\,d\theta = \pi.\end{aligned}$$

Définition 7.18. Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$. Alors on appelle centre de gravité de A le point de coordonnées

$$(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Aire}(D)}\left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right).$$

Exemple 7.19. Le centre de gravité du disque D de centre (x_0, y_0) et de rayon R et le point (x_0, y_0). En effet on a

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dx\,dy &= \int_{a-R}^{a+R} \int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}} x\,dy\,dx = \int_{a-R}^{a+R} 2x\sqrt{R^2-(x-a)^2}\,dx \\ &= \int_{-R}^{R} 2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx + \int_{-R}^{R} 2a\sqrt{R^2-x^2}\,dx = a\,\text{Aire}(D).\end{aligned}$$

La deuxième coordonnées s'obtient de façon analogue.

7.3.2 Intégration en dimensions supérieures

On définit exactement comme dans $\mathbb{R}^2$ les domaines élémentaires et simples de $\mathbb{R}^3$, puis l'intégrale

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

d'une fonction continue sur un tel domaine, en écrivant cette intégrale comme une intégrale en x d'une intégrale en y d'une intégrale en z. On dans un ordre différent.

Définition 7.20. Soit V une partie simple de $\mathbb{R}^3$. Alors on appelle volume de V la quantité

$$\iiint_V 1\,dx\,dy.$$

On définit le centre de gravité d'une partie simple de $\mathbb{R}^3$ de façon analogue à la dimension 2.

Exemple 7.21. On considère le simplexe $T_3 = \left\{(x,y,z) \in [0,1]^3 \,|\, x+y+z \leqslant 1\right\}$. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}(T_3) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} 1\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)dy\right)dx\\ &= \int_0^1 \left((1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right)dx = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ici on aurait pu gagner une étape de calcul en observant que pour tout $x \in [0,1]$ on sait calculer

$$\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} 1\,dz\right)dy$$

qui est l'aire du triangle $T_2(x) = \left\{(y,z) \in [0,1-x]^2 \,|\, y+z \leqslant 1-x\right\}$ c'est-à-dire $\frac{(1-x)^2}{2}$. On a alors

$$\operatorname{Vol}(T_3) = \int_0^1 \operatorname{Aire}(T_2(x))\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{6}.$$

Exemple 7.22. On considère la boule unité $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\right\}$. Pour tout $z \in [-1,1]$ on considère le disque $D(z) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 1-z^2\right\}$. On a alors

$$\operatorname{Vol}(B) = \int_{z=-1}^1 \operatorname{Aire}(D(z))\,dz = \int_{-1}^1 \pi(1-z^2)\,dz = \pi\left[1 - \frac{z^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Bien sûr, toutes ces définitions se généralisent en fait à des domaines de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de Fubini ramène le calcul d'une intégrale sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ au calcul de n intégrales successives sur des intervalles de $\mathbb{R}$. On parlera encore de volume en dimension $n \geqslant 4$.

7.4 Changement de variables

On énonce maintenant le théorème de changement de variables, qui sera également très utile pour calculer des intégrales multiples :

Théorème 7.23 (Théorème de changement de variables)**.** *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un difféomorphisme de classe C^1. Alors pour toute fonction $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ continue et intégrable on a*

$$\int_{\phi(\mathcal{U})} f(y)\,dy = \int_{\mathcal{U}} f(\phi(x))\left|\det \operatorname{Jac}\phi(x)\right|\,dx.$$

À nouveau, on ne va pas donner de démonstration détaillée pour ce résultat. On commence par donner des exemples élémentaires, qui servent en fait à démontrer le théorème. On donnera ensuite les idées pour la démonstration (pour une démonstration complète, voir par exemple le paragraphe IV.3.4 de [Ramis-Warusfel, L2]), puis on introduira les changements de variables usuels (coordonnées polaires, cylindriques et sphériques).

Exemples 7.24 (Exemples de base). On considère un ouvert élémentaire A comme à la définition 7.7. On commence par tester la formule de changement de variable sur des cas simples où elle peut être obtenue « à la main ».

- Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$T_{(x_0,y_0)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+x_0, y+y_0) \end{array} \right.$$

$T_{(x_0,y_0)}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $T_{(-x_0,-y_0)}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Jac} T_{(x_0,y_0)}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\left|\det \operatorname{Jac} T_{(x_0,y_0)}\right| = 1.$$

La formule de changement de variable donne alors

$$\int_A f(x+x_0, y+y_0)\, dx\, dy = \int_{T_{(x_0,y_0)}(A)} f(x,y)\, dx\, dy,$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x+x_0, y+y_0)\, dy\, dx = \int_{x=a+x_0}^{b+x_0} \int_{y=\varphi_1(x-x_0)+y_0}^{\varphi_2(x-x_0)+y_0} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Cette formule s'obtient en fait facilement en faisant deux changements de variables successifs dans des intégrales simples.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note

$$T_{1,2,\lambda} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+\lambda y, y) \end{array} \right.$$

$T_{1,2,\lambda}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $T_{1,2,-\lambda}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Jac} T_{1,2,\lambda}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\left|\det \operatorname{Jac} T_{1,2,\lambda}\right| = 1.$$

La formule de changement de variable donne dans ce cas :

$$\int_{y=c}^{d} \int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x+\lambda y, y)\, dx\, dy = \int_{y=c}^{d} \int_{x=\psi_1(y)+\lambda y}^{\psi_2(y)+\lambda y} f(x,y)\, dx\, dy.$$

À nouveau, il est facile de vérifier directement que cette formule est bien valable.

- On note maintenant

$$P_{1,2} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array} \right.$$

$P_{1,2}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $P_{1,2}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Jac} P_{1,2}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$|\det \operatorname{Jac} P_{1,2}| = 1.$$

Que donne la formule de changement de variable dans ce cas ?

• Pour $\alpha \neq 0$ on note finalement

$$D_{1,\alpha} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\alpha x, y) \end{array} \right.$$

$D_{1,\alpha}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $D_{1,\alpha^{-1}}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|\det D_{1,\alpha}| = |\alpha|.$$

La formule de changement de variable nous dit alors que si on dilate le problème par un coefficient $|\alpha|$ dans une direction, on muliplie les aires par α, ce qu'on aurait encore pu vérifier directement.

On rappelle que le déterminant permet de mesurer des volumes. Des aires en dimension 2. En effet pour u et v dans $\mathbb{R}^2$ la valeur absolue du déterminant $\det(u,v)$ est l'aire du parallèlogramme engendré par u et v. Ainsi le facteur $|\det \operatorname{Jac} \phi(x)|$ mesure le fait que le difféomorphisme ϕ a tendance à dilater ou contracter les aires au voisinage de x.

Idées de démonstration pour le théorème de changement de variables. • On commence par remarquer que si le résultat est vrai pour les difféomorphismes f et g, alors il est vrai pour $f \circ g$ (sous réserve que cette composition ait un sens).

• On a vu que le théorème est vrai si ϕ est une transvection, une permutation ou une dilatation. Or tout isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme composition finie de tels isomorphismes élémentaires (voir le cours d'algèbre linéaire, cela peut se montrer en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss). Ainsi on obtient le théorème dans le cas où ϕ est un isomorphisme.

• On découpe le domaine en un grand nombre de domaine de plus en plus petits. À la limite, pour chaque petit domaine D et pour n'importe quel $x_0 \in D$ on peut approcher f par $f(x_0)$ sur D et $\phi(D)$ par $\operatorname{Jac} \phi(D - x_0) + \varphi(x_0)$, obtenu à partir de D en appliquant une transition, un isomorphisme, puis à nouveau une proposition. □

Exemple 7.25. Soient $a, b > 0$. On considère l'ellipse

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}.$$

L'application φ définie par

$$\varphi(x,y) = (ax, by)$$

réalise un C^1-difféomorphisme du disque unité ouvert D dans $\mathcal{E}$. On a alors

$$\operatorname{Aire}(\mathcal{E}) = \int_{\varphi(D)} 1\,dx\,dy = \int_D 1 \times \underbrace{|\operatorname{Jac} \varphi(X,Y)|}_{=ab}\,dX\,dY = ab\pi.$$

On peut dire qu'on a effectué le changement de variable $(x,y) = \varphi(X,Y)$, avec $dx\,dy = |\operatorname{Jac} \varphi(X,Y)|\,dX\,dY = ab\,dX\,dY$.

7.5 Exemples importants de changements de variables

On introduit maintenant des changements de variables particulièrement utiles. En fonction des symétries du problème étudié, ces changements de variables peuvent permettre de considérablement simplifier l'expression des intégrales à calculer.

7.5.1 Coordonnées polaires

Proposition 7.26. *L'application*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est un C^1-difféomorphisme. En outre pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ on a

$$\det \operatorname{Jac} \Phi(r,\theta) = r.$$

Démonstration. On vérifie « facilement » que Φ est une bijection. D'après le théorème de l'inversion locale, il reste à vérifier que sa matrice jacobienne est partout inversible. Or pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ on a

$$\det \operatorname{Jac} \Phi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

□

Ce changement de variable est agréable quand la frontière du domaine d'intégration s'exprime plus facilement comme courbe paramétrée en polaire et/ou que la fonction à intégrer présente une symétrie radiale :

Proposition 7.27. *Soit A une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$ tel qu'il existe une fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ continue, 2π périodique, et vérifiant*

$$A = \{(r\cos\theta, r\sin(\theta)), \theta \in \mathbb{R}, 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\}$$

Alors pour toute fonction f continue sur A on a

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,r\,dr\,d\theta$$

Démonstration. Si on note

$$A_{]-\pi,\pi[} = \{(r\cos\theta, r\sin(\theta)), \theta \in]-\pi,\pi[, 0 \leqslant r < \rho(\theta)\}$$

alors on a [2]

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{A_{]-\pi,\pi[}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Φ réalise alors un C^1-difféomorphisme de $\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi,\pi[\,|\, r \leqslant \rho(\theta)\}$, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de changement de variables. □

Exemple 7.28. L'aire du disque de rayon R peut être obtenue par le calcul suivant :

$$\text{Aire}(D_R) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R 1\,r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\theta = \pi R^2.$$

On pourra également utiliser une variante de cette dernière proposition où θ ne couvre qu'une partie de l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

2. on ne détaille pas ce point, on peut par exemple décomposer A en $A_{[-\pi,0]} \cup A_{[0,\pi]}$. $A_{[-\pi,0]}$ et $A_{[0,\pi]}$ sont des domaines simples, et on utilise le fait qu'on ne change pas la valeur d'une intégrale en enlevant des parties du bord

7.5.2 Coordonnées cylindriques

Dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe.

Proposition 7.29. *Soit V une partie simple de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et une fonction $\rho : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue, 2π périodique par rapport à la première variable, et vérifiant*

$$V = \{(r\cos\theta, r\sin(\theta), z), \theta \in \mathbb{R}, z \in [a, b], 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta, z)\}$$

Alors pour toute fonction f continue sur V on a

$$\int_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\theta,z)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

Démonstration. Pour $z \in [a, b]$ on note $T(z) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$. Alors on a

$$T(z) = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z), \theta \in \mathbb{R}, 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta, z)\}.$$

Puisque

$$\int_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{T(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz,$$

il suffit de passer en coordonnées polaires sur chaque tranche $T(z)$. □

7.5.3 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes qui présentent une symétrie autour du centre du repère.

Proposition 7.30. *L'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r, \theta, \varphi) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un C^1-difféomorphisme. En outre pour tout $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\det \operatorname{Jac} \Phi(r, \theta) = r^2 \cos(\varphi).$$

Démonstration. On vérifie le calcul du jacobien. Pour $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\begin{aligned} \det \operatorname{Jac} \Phi(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= r^2 \big(\sin(\varphi) \times \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi) \times \cos^2(\varphi) \big) \\ &= r^2 \cos(\varphi) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Exemple 7.31. On retrouve facilement le volume de la boule de rayon R :

$$\operatorname{Vol}(B_R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r^2 \cos(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

7.6 Exercices

7.6.1 Intégrales à paramètre

***Exercice* 1.** Montrer que l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2} dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

***Exercice* 2.** On définit deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que g est dérivable.
2. Montrer que la fonction $h(x) = g(x) + f^2(x)$ est constante.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

***Exercice* 3.** Pour $x \geqslant 0$, on définit

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que ψ est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $\psi(0)$ et la limite $\lim_{x\to+\infty} \psi(x)$.
4. Montrer que $\psi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds$.
5. Montrer que $\int_0^{+\infty} \psi'(x) dx = -2(\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds)^2$.
6. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.6.2 Intégrales multiples

***Exercice* 4.** Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ et $D = [-1,1] \times [1,2]$,
2. $f(x,y) = \sin(x+y)$ et $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,
3. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+xy+x^2}}$ et $D = [3,7] \times [-2,2]$.

***Exercice* 5.** On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$. Calculer

$$I_1 = \iint_D 1\, dx\, dy, \quad I_2 = \iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy, \quad I_3 = \iint_D xy(x+y)\, dx\, dy.$$

***Exercice* 6.** Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x+y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \geqslant x \geqslant 0,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$,
2. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3 > x > 1,\ y > 2,\ x+y < 5\}$,
3. $f(x,y) = \cos(xy)$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2 \geqslant x \geqslant 1,\ 0 \leqslant xy \leqslant 2\}$,
4. $f(x,y) = x$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ x+2y-4 \leqslant 0\}$,
5. $f(x,y) = xy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy+x+y \leqslant 1\}$.

***Exercice* 7.** Calculer les aires des domaines suivants :
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4-x^3\}$,
$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ -\sin x \leqslant y \leqslant \sin x\}$,
$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ y \leqslant -x^2+2x+1\}$.

***Exercice* 8.** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,1], y \in [0,1], x^2+y^2 \geqslant 1\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$.

***Exercice* 9.** On considère le domaine

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}.$$

Pour $z_o \in \mathbb{R}$, on définit le plan $P_{z_o} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_o\}$.
1. Pour quelles valeurs de z_o l'intersection $P_{z_o} \cap D$ est-elle non-vide ?
2. Soit $z_o \in \mathbb{R}$ tel que $P_{z_o} \cap D$ est non-vide. Calculer $\iint_{P_{z_o} \cap D} x\, dx\, dy$.
3. Calculer $\iiint_D x\, dx\, dy\, dz$.

***Exercice* 10.** En passant aux coordonnées polaires, calculer l'aire du domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 3 \text{ et } y > 0\right\}$$

(et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu).

***Exercice* 11.** Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ dans les cas suivants :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1.} & f(x,y,z) = \cos x, & D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}, \\ \mathbf{2.} & f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, & D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}. \end{array}$$

***Exercice* 12.** Soient $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

***Exercice* 13.** On considère le domaine $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x < 0\big\}$. Calculer

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

***Exercice* 14.** Soient $a,b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$

Calculer

$$\int_D (2x^3 - y)\, dx\, dy.$$

***Exercice* 15.** Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x,y) \mapsto (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)$ sur le domaine $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\big\}$, où $b > a > 0$. On pourra effectuer le changement de variables $u = xy$, $v = y^2 - x^2$.

***Exercice* 16.** **1.** Pour $R > 0$, calculer

$$I_R = \int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

où $B(0,R)$ désigne la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R. Montrer que I_R admet une limite que l'on explicitera quand R tend vers $+\infty$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

***Exercice* 17.** Calculer $\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$, où D est l'ensemble des points de $[0,1]^2$ qui ne sont pas dans le disque de centre (0,0) et de rayon 1.

***Exercice* 18.** Soit $a > 0$ et B la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^3$. Calculer

$$\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\, dx\, dy\, dz.$$