TD n° 4 :
Intégrales multiples

Pour tous ces exercices on commencera par faire un dessin du domaine considéré.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ et $D = [-1,1] \times [1,2]$,
2. $f(x,y) = \sin(x+y)$ et $D = [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]$,
3. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+xy+x^2}}$ et $D = [3,7] \times [-2,2]$.

Exercice 2. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$. Calculer

$$I_1 = \iint_D 1\,dx\,dy, \quad I_2 = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad I_3 = \iint_D xy(x+y)\,dx\,dy.$$

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x+y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \geqslant x \geqslant 0,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$,
2. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 > x > 1,\ y > 2,\ x+y < 5\}$,
3. $f(x,y) = \cos(xy)$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \geqslant x \geqslant 1,\ 0 \leqslant xy \leqslant 2\}$,
4. $f(x,y) = x$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ x+2y-4 \leqslant 0\}$,
5. $f(x,y) = xy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy+x+y \leqslant 1\}$.

Exercice 4. Calculer les aires des domaines suivants :
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4-x^3\}$,
$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ -\sin x \leqslant y \leqslant \sin x\}$,
$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ y \leqslant -x^2+2x+1\}$.

Exercice 5. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x^2+y^2 \geqslant 1\}$.
Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Exercice 6. On considère le domaine

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}.$$

Pour $z_o \in \mathbb{R}$, on définit le plan $P_{z_o} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_o\}$.
1. Pour quelles valeurs de z_o l'intersection $P_{z_o} \cap D$ est-elle non-vide ?
2. Soit $z_o \in \mathbb{R}$ tel que $P_{z_o} \cap D$ est non-vide. Calculer $\iint_{P_{z_o} \cap D} x\,dx\,dy$.
3. Calculer $\iiint_D x\,dx\,dy$.

Exercice 7. Calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = \cos x, \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$,
2. $f(x,y) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$.

Exercice 8. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y, 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Calculer $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Exercice 9. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leqslant 0\}$.
1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Exercice 10. Calculer $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :
1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2y\}$.
3. $f(x,y) = xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \leqslant 1\}$. *On pourra faire le changement de variables* $(x,y) = (r\cos^3\theta, r\sin^3\theta)$.
4. $f(x,y) = (y^2-x^2)^{xy}(y^2+x^2)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y,\ y^2-x^2 < 1\}$. *On pourra faire le changement de variables* $(u,v) = (xy, y^2-x^2)$.

Exercice 11. (Centre de gravité)
Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que le *centre de gravité* de D est le point $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$ défini par

$$(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Aire}(D)}\left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right).$$

1. Déterminer le centre de gravité du disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le trapèze $D_k \subset \mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,k)$. Déterminer le centre de gravité de D_k.
3. Considérons l'application affine $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, défini par

$$\varphi(x,y) = (x+3y, x-y) + (2,3).$$

Soit (x'_G, y'_G) le centre de gravité du domaine $\varphi(D)$. Montrer que $(x'_G, y'_G) = \varphi(x_o, y_o)$.
4. Plus généralement, montrer que pour toute application affine (inversible) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, le centre de gravité de $\varphi(D)$ est $\varphi(x_G, y_G)$.
5. Déduire de la question précédente que si D est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées alors son centre de gravité est l'origine.

Exercice 12. Soient des nombres réels positifs a et b. On définit le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leqslant 1\}$.
1. Calculer $\iint_D (2x^3 - y)dxdy$.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité de D.

Exercice 13. Soient $a > 1$ et $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la boule unité. Calculer

$$\iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} dxdydz.$$

Exercice 14. Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Calculer le volume de l'ellipsoide

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \right\}.$$

Exercice 15. Soit $a \in]0,1[$ et $S = \{(u\cos t, u\sin t, \sin t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leqslant u \leqslant 1,\, 0 \leqslant t \leqslant \pi\}$.

1. Trouver un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ tels que

$$S = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D\}.$$

2. Calculer le volume du solide

$$T = \{(x,y,rf(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D,\, 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Exercice 16. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Calculer l'aire du domaine inclus dans le quadrant $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x > 0, y > 0\}$ et délimité par les droites d'équation $y = ax$, $y = \frac{1}{a}x$ et les hyperboles d'équation $y = \frac{b}{x}$ et $y = \frac{1}{bx}$.

Exercice 17. Posons $H = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$.

1. Utiliser un changement de variables pour montrer que $H = \frac{\pi}{4}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 18.

1. Tracer l'ensemble C des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^2+y^2 = (z+1)^2$ pour $z \geqslant -1$. Déterminer l'intersection de C avec la sphère $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

2. Tracer le solide K défini par

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \sqrt{x^2+y^2} - 1 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}\,\}.$$

3. Calculer le volume de K (Indication : pour $z_o \in [0,1]$ et $P_{z_o} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, z = z_o\}$ calculer l'aire de $P_{z_o} \cap K$ comme fonction de z_o.)

Exercice 19. (Solide de révolution)

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et deux nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que le volume du solide $S \subset \mathbb{R}^3$ délimité par les plans $z = a$ et $z = b$ et la courbe $x^2 + y^2 \leqslant g(z)$ est $\pi \int_a^b g^2(z) dz$.

2. Considérer D, le domaine (borné) de $\mathbb{R}^2$, délimité par les courbes $z = x^2$ et $x = z^2$. Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant pivoter D autour de l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.

1. Soient $R > 0$ et $h > 0$. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le cône C dont la base est le disque de centre 0 et de rayon R inclus dans le plan $(0xy)$ et dont le sommet est $S = (0, 0, h)$. Calculer le volume de C.

2. Calculer le volume de C lorsque $S = (x_0, 0, h)$, avec $x_0 > 0$.

3. Soit A un domaine simple du plan $(0xy)$ d'aire $\mathcal{A}$. Calculer le volume du cône C de base A et de sommet $(0, 0, h)$.