TC4 - Calcul Intégral

Examen partiel - 07 mars 2013

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice,etc.) n'est autorisé. On accordera un soin tout particulier à la rédaction. Le sujet est long, mais le barême sera sur plus de 20 points. Il n'est pas nécessaire de traiter les questions dans l'ordre, mais veillez à bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx; \quad I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-t^2}{t^3-\sqrt{t}}\,dt; \quad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{5+x}\,dx; \quad I_4 = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Exercice 2. Montrer que l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_{-1}^{+\infty} \cos(t^2)\,dt.$$

(Indication : on pourra par exemple effectuer le changement de variables $x = t^2$)

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$I_n = \int_2^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx.$$

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale I_n est-elle convergente ?
2. Étudier la convergence de la suite (I_n).

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.
1. Montrer que l'intégrale $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de f'.
3. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
4. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 5. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt$.
1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

(indication : on pourra utiliser un changement de variables $x = 2t$)
3. Montrer que

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{t}\,dt \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{t}\,dt.$$

4. En déduire la valeur de I.

Corrigé

Exercice 1. • On a
$$\int_0^A x\,dx = \frac{A^2}{2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty,$$
donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\,dx$ est divergente, ce qui implique en particulier que l'intégrale I_1 est divergente.
• La fonction $t \mapsto \frac{1-t^2}{t^3-\sqrt{t}}$ est bien définie et continue sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$. Elle prend en outre des valeurs négatives. On a
$$-\frac{1-t^2}{t^3-\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
Or l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente (intégrale de Riemann), donc par comparaison pour des fonctions à valeurs positives, on obtient que l'intégrale $-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-t^2}{t^3-\sqrt{t}}\,dt$, et par suite I_2, convergent.
• La fonction $x \mapsto \frac{1+\ln(x)}{5+x}$ est bien définie et continue sur $[1,+\infty[$. En outre elle prend des valeurs positives. On a
$$\frac{1+\ln(x)}{5+x} \geqslant \frac{1}{5+x}$$
et
$$\frac{1}{5+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$
Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ est divergente (intégrale de Riemann), donc par comparaison pour des fonctions à valeurs positives on obtient que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{5+x}\,dx$ puis I_3 sont divergentes.
• La fonction $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ et définie, continue et à valeurs positives sur $[1,+\infty[$. En outre on a
$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$
Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est convergente (intégrale de Riemann), donc par comparaison pour des fonctions à valeurs positives on obtient que I_4 est convergente.

Exercice 2. La fonction $t \mapsto \cos(t^2)$ est bien définie et continue sur $[-1,+\infty[$. Ainsi l'intégrale $\int_{-1}^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$. En effectuant le changement de variable $x = t^2$ on obtient qu'elle est elle-même de même nature que $\int_{-1}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}}\,dx$ (l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,\infty[$ dans lui-même). La fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est de classe C^∞, décroissante, et tend vers 0 en $+\infty$. D'autre part la fonction cos est de classe C^∞ et pour tous $x, y \in [1,+\infty[$ on a
$$\left|\int_x^y \cos(t)\,dt\right| = |\sin(y)-\sin(x)| \leqslant 2.$$
D'après la règle d'Abel on obtient alors que l'intégrale $\int_{-1}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}}\,dx$ est convergente, et donc que $\int_{-1}^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ est convergente.

Exercice 3. **1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^n}$ est définie, continue et positive sur $[2,+\infty[$. Pour tout $x \geqslant 2$ on a
$$\frac{1}{1+x^0} = \frac{1}{2},$$
donc l'intégrale I_0 est grossièrement divergente. Pour $n \geqslant 1$ on a
$$\frac{1}{1+x^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n}.$$
Or l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx$ est convergente si et seulement si $n > 1$ (intégrale de Riemann), donc l'intégrale I_n est convergente si et seulement si $n \geqslant 2$.

2. Pour tout $x \geqslant 2$ on a

$$\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part pour tout $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 2$ on a

$$0 \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ est convergente, donc d'après le théorème de convergence dominée on obtient que

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_2^{+\infty} 0\, dt = 0.$$

Plus simplement on peut remarquer que pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$\forall x \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^n}$$

et donc

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 4. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.
2. L'application $(t,x) \mapsto e^{-tx}$ est de classe C^1 sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ comme composée de fonctions usuelles. Puis $(t,x) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 donc le dénominateur ne s'annule pas. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, on obtient que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = -\int_0^1 \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\, dt.$$

3. On a

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

et

$$f'(0) = -\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} = \left[-\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^1 = -\frac{\ln(2)}{2}.$$

4. Pour tout $x > 0$ on a

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^1 e^{-tx}\, dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}(1-e^{-x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 5. 1. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$, et prend des valeurs positives. On a

$$\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} = \frac{\left(1-t+\underset{t\to0}{O}(t^2)\right) - \left(1-2t+\underset{t\to0}{O}(t^2)\right)}{t} \xrightarrow[t\to0]{} 1.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\, dt$ est faussement généralisée, et donc convergente. D'autre part pour tout $t \geqslant 1$ on a

$$\left|\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\right| \leqslant 2e^{-t}.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} 2e^{-t}\, dt$ est convergente, donc par comparaison on obtient que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\, dt$ est absolument convergente. Finalement I est bien convergente.

2. Le même raisonnement montre que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt$ sont convergentes. En effectuant le changement de variables affine $s = 2t$ on voit que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s}\, ds.$$

Par la relation de Chasles (pour des intégrales convergentes) on obtient alors

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

3. Pour tout $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ on a

$$\frac{e^{-2\varepsilon}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-\varepsilon}}{t},$$

donc après intégration on obtient bien

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{t}\, dt \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{t}\, dt.$$

4. On a

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1}{t}\, dt = [\ln(t)]_{\varepsilon}^{2\varepsilon} = \ln(2),$$

donc

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{t}\, dt = e^{-2\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1}{t}\, dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ln(2)$$

et de même

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{t}\, dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ln(2).$$

Par le théorème des gendarmes on obtient que

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \ln(2).$$