TD n° 2 :
Changement de variables

Exercice 2.1. En passant aux coordonnées polaires, calculer l'aire du domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 3 \text{ et } y > 0 \right\}$$

(et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu).

Exercice 2.2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

Exercice 2.3. On considère le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2x < 0\}$. Calculer

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Exercice 2.4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Calculer

$$\int_D (2x^3 - y)\, dx\, dy.$$

Exercice 2.5. Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x, y) \mapsto (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$ sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\}$, où $b > a > 0$. On pourra effectuer le changement de variables $u = xy$, $v = y^2 - x^2$.

Exercice 2.6. **1.** Pour $R > 0$, calculer

$$I_R = \int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

où $B(0, R)$ désigne la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R. Montrer que I_R admet une limite que l'on explicitera quand R tend vers $+\infty$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

Exercice 2.7. Calculer $\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$, où D est l'ensemble des points de $[0, 1]^2$ qui ne sont pas dans le disque de centre (0,0) et de rayon 1.

Exercice 2.8. Soit $a > 0$ et B la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^3$. Calculer

$$\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}\, dx\, dy\, dz.$$