Contrôle Continu - 08 novembre 2012

Durée : 1h

Exercice 1. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(2xy - \cos(z), e^{2y} - xz^2\right) \end{array} \right.$$

1. La fonction f est-elle continue au point $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right)$? Est-elle différentiable en ce point ?
2. Si oui, expliciter cette différentielle.

Exercice 2. Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. On note $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et on considère $\Phi : D \to D$ définie par $\Phi(x,y) = \left(xy, \frac{x}{y}\right)$. On considère une fonction F de classe C^2 de D dans $\mathbb{R}$ et $f = F \circ \Phi$.
1. Montrer que Φ est un C^2-difféomorphisme de D dans D.
2. Montrer que f est de classe C^2 de D dans $\mathbb{R}$.
3. Exprimer ∇f en fonction des dérivées partielles de F.
4. Montrer que l'application $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est solution de l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (*)$$

si et seulement si l'application $(u,v) \mapsto F(u,v)$ est solution de

$$2u \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

5. Question supplémentaire, à faire quand vous avez terminé tout le reste : Déterminer l'ensemble des solutions de $(*)$.

Exercice 4. Soient $\mathcal{U}$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et X une application de classe C^1 de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $X(0) = (X_1(0), \ldots, X_n(0)) \neq 0$. Sans perte de généralité on peut supposer que $X_1(0) \neq 0$. Pour $x \in \mathcal{U}$ on note ϕ_x la solution du problème

$$\frac{d\phi_x(t)}{dt} = X(\phi_x(t)), \quad \phi_x(0) = x.$$

Pour chaque $x \in \mathcal{U}$, ϕ_x est définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{U}$. On admet en outre que l'application $(t,x) \mapsto \phi_x(t)$ est de classe C^1 sur un voisinage de $(t,x) = (0,0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de « redresser » le champs de vecteur X au voisinage de 0. Il s'agit de trouver $X_0 \in \mathbb{R}^n$, un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1-difféomorphisme f de $\mathcal{V}$ dans $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$ tels que pour $y \in \mathcal{V}$ et $\psi_y : t \mapsto f^{-1}(\phi_{f(y)}(t))$ (bien définie pour t assez petit) on a

$$\frac{d\psi_y(t)}{dt} = X_0, \quad \psi_y(0) = y.$$

Montrer que l'application

$$f : (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \phi_{(0,y_2,\ldots,y_n)}(y_1).$$

permet de répondre au problème.

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1. 1. [3 pts] Les applications $(x, y, z) \mapsto 2xy - \cos(z)$ et $(x, y) \mapsto e^{2y} - xz^2$ sont de classe C^1 comme sommes de fonctions usuelles. Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. En particulier elle est continue et différentiable au point $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. [3 pts] La différentielle de f au point $X = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right)$ est l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned}\forall (h_x, h_y, h_z) \in \mathbb{R}^3, \quad d_X f(h_x, h_y, h_z) &= h_x \frac{\partial f}{\partial x}(X) + h_y \frac{\partial f}{\partial y}(X) + h_z \frac{\partial f}{\partial z}(X) \\ &= \left(h_y + h_z, -\frac{\pi^2}{4} h_x + 2h_y - \frac{\pi}{2} h_z\right).\end{aligned}$$

Exercice 2. [6 pts] La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On suppose par l'absurde que f est continue en $(0,0)$ et on considère l'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui à t associe (t, t). L'application $f \circ \gamma$ est continue sur $\mathbb{R}$ commme composée de fonctions continues, donc $(f \circ \gamma)(t)$ tend vers $(f \circ \gamma)(0) = 0$ quand t tend vers 0. Mais pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on a $(f \circ \gamma)(0) = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Ainsi on a montré par l'absurde que f n'est pas continue en (0,0).

Exercice 3. 1. [2 pts] Soit $(u, v) \in D$. Alors pour $(x, y) \in D$ on a

$$(u, v) = \Phi(x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} xy = u \\ \frac{x}{y} = v \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{uv} \\ y = \sqrt{\frac{u}{v}} \end{cases}$$

Cela prouve que Φ est une bijection de D de réciproque $\Phi^{-1} : (u, v) \mapsto \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$. En outre Φ et Φ^{-1} sont de classe C^2 comme fractions rationnelles et racines de fracions rationnelles ne s'annulant pas.
2. [1 pt] f est de classe C^2 comme composée de fonctions de classe C^2.
3. [2 pts] Pour tout $(x, y) \in D$ on a

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) \\ &= \left(y \frac{\partial F}{\partial u}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right), x \frac{\partial F}{\partial u}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2} \frac{\partial F}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right)\right).\end{aligned}$$

4. [2 pts] Pour tout $(x, y) \in D$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{2x^2}{y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial F}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right),$$

donc

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y} \frac{\partial F}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right).$$

En remplaçant (x, y) par $\Phi^{-1}(u, v)$ on obtient que le terme de droite est nul si et seulement si

$$4uv \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u, v) - 2v \frac{\partial F}{\partial v}(u, v).$$

Exercice 4. [6 pts] Puisque $(t, x) \mapsto \phi_x(t)$ est de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$, l'application f est définie et de classe C^1 sur un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}$ de 0 (dans $\mathbb{R}^n$). En outre pour $y \in \tilde{\mathcal{V}}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(y) = X(f(y))$$

et pour $j \in [\![2, n]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(0) = e_j,$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi on a

$$\det \operatorname{Jac} f(0) = X_1(0) \neq 0.$$

D'après le théorème de l'inversion locale, f réalise un difféomorphisme de classe C^1 d'un voisinage $\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur son image (qui est également un voisinage de 0). Pour $y \in \mathcal{V}$ et $t \in \mathbb{R}$ assez petit on note

$$\psi_y(t) = f^{-1}(\phi_{f(y)}(t)).$$

On a alors

$$\frac{d\psi_y(t)}{dt} = d_{\phi_{f(y)}(t)} f^{-1}(X(\phi_{f(t)}(t))) = \left(d_{f^{-1}(\phi_{f(y)}(t))} f\right)^{-1}(X(\phi_{f(t)}(t))) = e_1$$

car on a vu que

$$d_{f^{-1}(\phi_{f(y)}(t))} f(e_1) = X(\phi_{f(t)}(t)).$$

Ainsi on a bien la propriété demandée avec $X_0 = e_1$.