DM n^{o} 1

Exercice 1.
Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$1.\quad \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx\,;\quad 2.\quad \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x}\,dx\,;\quad 3.\quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt.$$

Exercice 2.
Soit f une fonction de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0)=0$ et $f(x)>0$ pour tout $x\in]0,1]$. Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

est convergente si et seulement si $f'(0)\neq 0$.

Exercice 3.
Pour $x\in]0,1[$ on note

$$\varphi(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt.$$

1. Montrer que φ est bien définie et de classe C^1 sur $]0,1[$.
2. Étudier la limite de φ en 0.
3. Montrer que pour $x\in]0,1[$ on a

$$\forall t\in[x^2,x],\quad -\frac{x^2}{t\ln t}\leqslant -\frac{1}{\ln t}\leqslant -\frac{x}{t\ln t}.$$

4. Étudier la limite de φ en 1.
5. Calculer la dérivée de φ. En déduire la nature et éventuellement la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt.$$

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1.

• La fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$. Soit $A \geqslant 0$. En effectuant le changement de variable $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ (l'application $t \mapsto t^2$ est de classe C^1 de $[0, \sqrt{A}]$ dans $[0, A]$) puis une intégration par parties, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^{\sqrt{A}} 2te^{-t}\,dt = \left[-2te^{-t}\right]_0^{\sqrt{A}} + 2\int_0^{\sqrt{A}} e^{-t}\,dt \\ &= -2\sqrt{A}e^{-\sqrt{A}} - 2e^{-\sqrt{A}} + 2 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 2.\end{aligned}$$

Cela prouve que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ est convergente et vaut 2.

• L'application $x \mapsto \frac{1}{\sin x}\,dx$ est définie et continue sur $]0, \pi[$, et ne prend que des valeurs positives. On a

$$\frac{1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx$ diverge (intégrale de Riemann), donc par comparaison de fonctions à valeurs positives on obtient que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx$ diverge. Cela implique que l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x}\,dx$ diverge.

• La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$. On a

$$e^{-t} - e^{-2t} = 1 - t - (1-2t) + \underset{t\to 0}{O}(t^2) = t + \underset{t\to 0}{O}(t^2),$$

donc

$$\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt$ est faussement généralisée. Pour tout $t \geqslant 1$ on a

$$\left|\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\right| \leqslant e^{-t} + e^{-2t},$$

et l'intégrale $\int_1^{\infty}(e^{-t}+e^{-2t})\,dt$ converge (on peut par exemple refaire le calcul précédent), donc par comparaison de fonctions à valeurs positives on obtient que l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt$ converge. Finalement l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt$ est convergente.

Exercice 2.

• La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ est bien définie et continue sur $]0, 1]$. L'intégrale est généralisée en 0.

Puisque f est de classe C^2 sur le segment [0,1], la fonction f'' est bornée sur $[0, 1]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, et sachant que $f(0) = 0$, il existe donc $M > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - xf'(x)| \leqslant Mx^2.$$

• Supposons que $f'(x) \neq 0$. Puisque $f(x) > f(0)$ pour tout $x \in]0,1]$, on a nécessairement $f'(0) > 0$. D'après l'inégalité précédente on a

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x f'(x)$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{f'(0)}\sqrt{x}}.$$

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f'(0)}\sqrt{x}}\, dx$ converge (intégrale de Riemann), donc par comparaison de fonctions à valeurs positives, on obtient que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\, dx$ converge.

• On suppose maintenant que $f'(0) = 0$. On a alors

$$\forall x \in]0,1], \qquad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{Mx^2}} = \frac{1}{x\sqrt{M}}.$$

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{M}}\, dx$ diverge (intégrale de Riemann), donc par comparaison de fonctions à valeurs positives, on obtient que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\, dx$ diverge.

Exercice 3.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle. Si F est une primitive de f alors on a

$$\forall x \in]0,1[, \quad \varphi(x) = F(x^2) - F(x).$$

F étant de classe C^1 sur $]0,1[$, c'est aussi le cas pour φ.

2. La fonction f tend vers 0 en 0, donc l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$ est faussement généralisée. Cela implique que F admet une limite finie l en 0, et donc que

$$\varphi(x) = F(x^2) - F(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} l - l = 0.$$

3. Soit $x \in]0,1[$. Pour tout $t \in [x^2, x]$ on a

$$\frac{x^2}{t} \leqslant 1 \leqslant \frac{x}{t}$$

et donc

$$-\frac{x^2}{t\ln t} \leqslant -\frac{1}{\ln t} \leqslant -\frac{x}{t \ln t}.$$

4. Pour tout $x \in]0,1[$ on a

$$-\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln t}\, dt = -\left[\ln(|\ln(t)|)\right]_{x^2}^{x} = -\ln(|\ln(x)|) + \ln(2\,|\ln x|) = \ln 2.$$

Or d'après la question précédente on a

$$x^2 \int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t} dt \leqslant \varphi(x) \leqslant x \int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t \ln t} dt,$$

donc par passage à la limite on obtient que

$$\varphi(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \ln 2.$$

5. Pour tout $x \in]0,1[$ on a

$$\varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Ainsi pour tous $a, b \in]0,1[$ on a

$$\int_a^b \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Puisque le membre de droite admet une limite finie aussi bien quand a tend vers 0 que quand b tend vers 1, l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$ est convergente et

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \lim_{b \to 1} \varphi(b) - \lim_{a \to 1} \varphi(a) = \ln 2.$$