Intégrales généralisées

Comment montrer que l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

est convergente (ou qu'elle ne l'est pas) ?

On s'intéresse ici au cas où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et f est définie et continue sur $[a,b[$, auquel cas il ne peut y avoir de problème qu'en b.

Si $b \in \mathbb{R}$ et f se prolonge par continuité en b, on est ramenés au cas d'une fonction continue sur un segment (intégrale usuelle). Si $b = +\infty$ ou f n'est pas bornée au voisinage de b, on a bien affaire à une intégrale généralisée

- Méthode 1

On peut vérifier directement que la fonction : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ définie sur $[a,b[$ admet ou non une limite quand x tend vers b.

On ne peut que rarement le faire (on l'a fait pour les intégrales de Riemann) mais cela donne des fonctions de référence pour la méthode 2

- Méthode 2

Si on connait une fonction g définie sur $[a,b[$ dont on sait que : $\forall x \in [a,b[, \quad 0 \leq |f(x)| \leq g(x)$

et l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente, alors on sait que les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b |f(t)|\,dt$ sont convergentes (et on a : $\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$)

→ voir exercice 5.12

TD n° 5 Intégrales

Exercice 5.1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Il faut montier que $F(a) \leq F(b)$

méthode 1 : D'après la relation de Chasles, on a :

$$F(b) - F(a) = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Comme f est positive et que l'intégrale d'une fonction positive est positive, on a : $F(b) - F(a) \geq 0$, soit $F(b) \geq F(a)$ - D'où F est croissante

méthode 2 : D'après le théorème des accroissements finis (voir première partie du cours, on a :

$$\exists\, c \in]a,b[, \quad F(b) - F(a) = \underbrace{(b-a)}_{\geq 0} F'(c)$$

Mais $F' = f$ est une fonction positive, donc $F'(c) = f(c) \geq 0$, d'où $F(b) - F(a) \geq 0$, et donc F est croissante.

Exercice 5.3

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x)\,g(x) \geq 1$, donc $\sqrt{f(x)\,g(x)} \geq 1$

En intégrant entre 0 et 1 on obtient :

$$1 = \int_0^1 1\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{g(x)\,f(x)}\,dx$$

On applique maintenant l'inégalité de Cauchy - Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$, et on obtient :

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{f(x)}\,\sqrt{g(x)}\,dx \leq \sqrt{\int_0^1 \underbrace{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2}_{=f(x)} dx}\ \sqrt{\int_0^1 \underbrace{\left(\sqrt{g(x)}\right)^2}_{=g(x)} dx}$$

En élevant au carré, on obtient bien : $1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \times \int_0^1 g(x)\,dx$

Exercice 2

1. Soit $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) > 0$. On suppose que $x_0 \in]0,1[$ (je vous laisse voir qu'on peut faire à peu près la même chose si $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$)

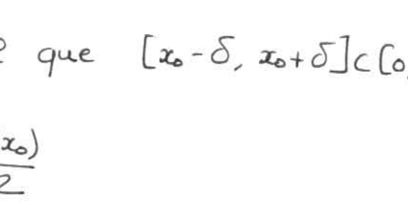
Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [0,1]$ et :

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{f(x_0)}{2}$$

On a en particulier :

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad f(x) \geq f(x_0) - |f(x_0) - f(x)| \geq f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}$$

On considère maintenant la fonction g telle que $g(x) = \frac{f(x_0)}{2}$ si $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et $g(x) = 0$ sinon



g est une fonction en escalier, et $g \leq f$ sur $[0,1]$. On a donc:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{f(x_0)}{2} \times (2\delta) = \delta f(x_0) > 0$$

2. Comme f est à valeur dans $[0,1]$, on a :

$$0 \leq f - f^2$$

Or $\int_0^1 \left(f(x) - f(x)^2\right) dx = 0$

donc d'après la question 1, on a $f(x) = f(x)^2$ pour tout $x \in [0,1]$, soit : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$

Comme f est continue, on a même :

$f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ ou $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$

Et comme f est non nulle, on a bien :

$$f(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in [0,1]$$

Exercice 5.7

$$B = \int_0^1 e^x \cos x \, dx$$

On fait une intégration par parties avec $u' = u = e^x$, $v(x) = \cos x$, $v'(x) = -\sin x$:

$$B = \left[e^x \cos x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x \sin x \, dx = e \cos 1 - 1 + \int_0^1 e^x \sin x \, dx$$

On effectue une nouvelle intégration par parties :

$$B = e \cos 1 - 1 + \left[e^x \sin x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cos x \, dx$$

$$= e(\cos 1 + \sin 1) - 1 - B$$

donc : $\quad 2B = e(\cos 1 + \sin 1) - 1$

soit : $\quad B = \frac{1}{2}\left(e(\cos 1 + \sin 1) - 1\right)$

Exercice 5.8

Ces deux intégrales se calculent en utilisant le théorème de changement de variable (cor. 13.3)

- $A = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$

Ici on a envie de faire le changement de variable $y = g(x) = e^x$

Attention au facteur $g'(x)$ (ici $g'(x) = e^x$) dans la formule.

On écrit :

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, \frac{e^x}{e^x}\, dx$$

et on applique la formule avec : $g : x \mapsto e^x$, $h : y \mapsto \frac{1}{1+y} \times \frac{1}{y}$, $a = 0$, $b = 1$ (g est bien de classe C^1 sur $[0,1]$ et h continue sur $[1,e]$)

On obtient alors :

$$A = \int_{e^0}^{e^1} \frac{1}{1+y} \times \frac{1}{y}\, dy = \int_1^e \frac{1}{1+y} \times \frac{1}{y}\, dy$$

Ensuite, il s'agit d'un calcul d'intégrale de fraction rationnelle, plus ou moins facile selon les cas, mais faisable. Ici on a :

$$A = \int_1^e \left(\frac{-1}{1+y} + \frac{1}{y} \right) dy = \Big[-\ln(1+y) + \ln y \Big]_1^e = -\ln(1+e) + 1 + \ln 2$$

- $B = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy$

On effectue ici le changement de variable $y = \sin x$ ($\sin$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $y \mapsto \sqrt{1-y^2}$ continue sur $\mathbb{R}$) _ Attention on utilise l'égalité dans l'autre sens par rapport au cas précédent :

$$B = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\, \cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x}\, \cos x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x))\, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 5.10

On suppose par l'absurde que la limite ℓ de f en $+\infty$ n'est pas 0 -

Supposons par exemple que $\ell > 0$ (le cas $\ell < 0$ est analogue).

Il existe $x_0 \geq 0$ tel que :

$$\forall x \geq x_0 \,, \quad |f(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$$

et donc :

$$\forall x \geq x_0 \,, \quad f(x) \geq \frac{\ell}{2}$$

Comme l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ est convergente, l'intégrale $\int_{x_0}^\infty f(x)\,dx$ est également convergente (le vérifier). Mais pour tout $x \in [x_0, \infty[$, on a :

$$0 \leq \frac{\ell}{2} \leq f(x)$$

donc l'intégrale $\int_{x_0}^\infty \frac{\ell}{2}\,dx$ est convergente (voir prop. 14.2)_

Or ceci est impossible, car, pour $A \geq x_0$ on a :

$$\int_{x_0}^A \frac{\ell}{2}\,dx = (A - x_0)\frac{\ell}{2} \xrightarrow[A\to\infty]{} +\infty$$

On a ainsi obtenu une contradiction.

D'où finalement : $\ell = 0$.

5.12.c

Etude de la convergence de l'intégrale $\int_0^{\infty} t^5 e^{-t}\, dt$

L'application $t \mapsto t^5 e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$

- On montre dans un premier temps que l'application $t \mapsto t^7 e^{-t}$ est bornée sur $[1,+\infty[$ (ie: $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in [1,+\infty[, \ |t^7 e^{-t}| \leq M$)

On note $g(t) = t^7 e^{-t}$. On a alors :

$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad g'(t) = (7t^6 - t^7)\, e^{-t}$$

donc pour $t \in [1,+\infty[$, on a : $\quad g'(t) = 0 \iff t = 7$

On peut donc faire le tableau de variations de g :

t	1		7		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	e^{-1}	$\nearrow$	$7^7 e^{-7}$	$\searrow$	0

Ainsi, g est bornée (par $M = 7^7 e^{-7}$).

On a donc : $\forall t \geq 1, \ 0 \leq t^5 e^{-t} \leq \frac{M}{t^2}$

- Pour tout $x \geq 1$, on a : $\int_1^x \frac{M}{t^2}\, dt = \left[-\frac{M}{t}\right]_1^x = -\frac{M}{x} + M \xrightarrow[x \to +\infty]{} M$

Ainsi l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{M}{t^2}\, dt$ est convergente

D'après le théorème 14.2, on en déduit que l'intégrale $\int_1^{\infty} e^{-t} t^5\, dt$ est convergente, c'est-à-dire que la fonction $x \mapsto \int_1^x t^5 e^{-t}\, dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que :

$$\int_0^x t^5 e^{-t}\, dt = \int_0^1 t^5 e^{-t}\, dt + \int_1^x t^5 e^{-t}\, dt$$

admet une limite quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_0^{\infty} t^5 e^{-t}\, dt$ est convergente.