Séries entières

⋈

On s'intéresse dans ce chapitre aux séries entières, séries de fonctions qui généralisent la notion de fonction polynomiale, ainsi que les fonctions analytiques, qui s'écrive localement comme des séries entières. Dans tous ce chapitre, les fonctions sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, ou des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes. On notera K pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 0.1. On appelle *série entière* une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ où, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction sur K de la forme $z \mapsto a_n z^n$ avec $a_n \in \mathsf{K}$.

1 Rayon de convergence

Étant donnée une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, la première question à se poser est celle de son domaine de convergence, c'est-à-dire de l'ensemble des $z \in \mathsf{K}$ tels que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ a bien un sens.

Dans tout ce chapitre on notera, pour $z_0 \in \mathsf{K}$ et $r > 0$,

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathsf{K} \mid |z - z_0| < r\}.$$

On notera également $\overline{D}(z_0, r) = \overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathsf{K} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$.

Exemple 1.1. Une fonction polynomiale est une série entière partout convergente.

Exemple 1.2. On considère la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$. Pour z tel que $|z| \geqslant 1$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ est grossièrement divergente. Pour $z \in D(0,1)$ on a

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1 - z},$$

donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge et vaut $\frac{1}{1-z}$. En particulier, le domaine de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ est $D(0,1)$.

Pour l'exemple 1.2, on a utilisé le fait qu'on sait calculer explicitement la somme d'une série géométrique. Plus généralement, on observe que s'il existe $\nu > 0$ vérifiant $|a_n| \leqslant \nu^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolement si $|z| < \frac{1}{\nu}$.

Le but est maintenant d'affiner cette remarque. Puisque le terme général d'une série entière est essentiellement donné par les puissances successives de z, on en établira la convergence en la comparant à des séries géométriques. Pour cela, les critères de d'Alembert et de Cauchy pour les séries numériques sont particulièrement adaptés.

Julien Royer
Université Toulouse III - Paul Sabatier
Version du 23 novembre 2023

Exemple 1.3. On considère la série exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Pour $z \in \mathsf{K}$ on a

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc d'après le critère de d'Alembert la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge. Ainsi, le domaine de convergence de la série exponentielle est tout K.

Exemple 1.4. On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$. On a

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{|z|^n}{n^2}} = \frac{|z|\, n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|\,,$$

donc d'après le critère de d'Alembert, la série est divergente si $|z| > 1$ et convergente si $|z| < 1$. Plus généralement, pour $z \in \overline{D}(0,1)$ on a

$$\frac{|z|^2}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est normalement convergente sur $\overline{D}(0,1)$.

Dans tous ces exemples, le domaine de convergence est un disque (éventuellement infini). D'ailleurs, si $\sqrt[n]{a_n}$ ou a_{n+1}/a_n converge vers une limite ℓ, alors le domaine de convergence contient le disque ouvert de centre 0 et de rayon $1/\ell$ et est contenu dans l'adhérence de ce disque. Dans la suite de ce paragraphe on formalise cette observation et on montre que, de façon générale, le domaine de définition est toujours (plus ou moins) de cette forme.

On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K et on note $\mathcal{D}$ le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Lemme 1.5. *Soit $z_0 \in \mathcal{D}$. Alors pour $r \in]0, |z_0|[$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$. En particulier, $D(0,|z_0|) \subset \mathcal{D}$.*

Démonstration. Si $z_0 = 0$ alors la conclusion est vide. On suppose donc $z_0 \neq 0$. Puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, il existe en particulier $M \geqslant 0$ tel que $|a_n|\,|z_0|^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $r \in]0, |z_0|[$. Pour tout $z \in D(0,r)$ on a

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n|\, r^n \leqslant |a_n|\,|z_0|^n \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n.$$

Puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} M\big(\frac{r}{|z_0|}\big)^n$ est convergente, on obtient que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente (et donc simplement convergente) sur $\overline{D}(0,r)$. $\square$

Définition 1.6. Le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ est par définition

$$R = \sup\{|z|\,, z \in \mathcal{D}\} \quad \in [0, +\infty].$$

Proposition 1.7. *On a $D(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D}(0,R)$. En outre la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$ pour tout $r \in]0,R[$.*

Démonstration. Par définition de R, on a bien $\mathcal{D} \subset \overline{D}(0,R)$. On suppose maintenant que $R > 0$, sinon les autres conclusions sont vides. Soit $r \in]0,R[$. Par définition de R, il existe $z_0 \in \mathcal{D}$ tel que $|z_0| > r$. On obtient que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $D(0,r)$ par le Lemme 1.5. Et pour $z \in D(0,R)$ il suffit d'appliquer ce résultat avec $r \in]\,|z|\,, R[$ pour montrer que $z \in \mathcal{D}$. □

Remarque 1.8. Le rayon de convergence vérifie donc

$$R = \inf \{|z|\,, z \notin \mathcal{D}\}\,.$$

Par contre, il est important de noter que la proposition 1.7 ne dit rien de la convergence de la série pour z tel que $|z| = R$. Et on ne peut rien dire dans le cas général, car tous les cas peuvent se présenter (convergence pour aucun de ces z, pour tous, ou pour une partie seulement, voir les exemples).

Définition 1.9. On appelle *disque de convergence* d'une série entière le disque $D(0,R)$, où R est le rayon de convergence de la série.

Ainsi le disque de convergence est inclus dans le domaine de convergence, mais l'inclusion peut être stricte.

Exemples 1.10. (i) Le rayon de convergence d'une fonction polynomiale est $+\infty$.

(ii) Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ est 1.

(iii) Le rayon de convergence de la série exponentielle est $+\infty$.

(iv) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1}$. La série est divergente pour $z = 1$ (série harmonique) et convergente (vers $\ln(2)$) pour $z = -1$ (série harmonique alternée). On en déduit que son rayon de convergence vaut 1.

On note dans ce dernier exemple qu'en étudiant la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n+1}$ en deux points, on est directement capable de dire qu'elle converge pour tout z tel que $|z| < 1$ et qu'elle diverge pour tout z tel que $|z| > 1$.

Dans la preuve du Lemme 1.5, on a utilisé une propriété plus faible que celle donnée en hypothèse. En effet, on a supposé que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n$ converge mais on a seulement utilisé le fait que la suite $(a_n\,|z_0|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On aurait pu utiliser cette propriété pour définir le rayon de convergence (d'ailleurs beaucoup de cours sur les séries entières font ce choix), ou encore la propriété intermédiaire que $a_n r^n$ tend vers 0. Cela donne les caractérisations équivalentes suivantes.

Proposition 1.11. *On a*

$$R = \sup \left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\} = \sup \left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, r^n < +\infty \right\}.$$

En outre pour tout $r \in [0,R[$ on a $a_n r^n \to 0$ et $\sup |a_n|\, r^n < +\infty$.

Démonstration. On note

$$R_1 = \sup \left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\} \quad \text{et} \quad R_2 = \left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, r^n < +\infty \right\}.$$

Comme une suite qui tend vers 0 est bornée, on a nécessairement $R_1 \leqslant R_2$. On suppose que $R_2 > 0$ et on considère $r \in]0, R_2[$. Par le même argument que pour le Lemme 1.5 on obtient que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ est convergente. D'où $R \geqslant r$. Par passage au supremum on obtient que $R \geqslant R_2$. On suppose maintenant que $R > 0$ et on considère $r \in]0, R[$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ converge donc $a_n r^n$ tend vers 0. Cela prouve que $R_1 \geqslant r$. Par passage au supremum on obtient $R_1 \geqslant R$. Finalement on a bien $R = R_1 = R_2$. □

Les exemples 1.3 et 1.4 montrent que l'on peut utiliser les critères de d'Alembert et de Cauchy pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Cela donne les caractérisations suivantes (où on utilise la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Proposition 1.12. (i) *On a*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(ii) *On suppose que $a_n \neq 0$ pour n assez grand et que le quotient $|a_{n+1}|/|a_n|$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$. Alors*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Démonstration. • On suppose que $R > 0$ et on considère $r \in]0, R[$. D'après la proposition 1.11, il existe $\tilde{r} \geqslant r$ tel que la suite $(a_n \tilde{r}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|a_n| r^n \leqslant |a_n| \tilde{r}_n \leqslant 1,$$

soit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{r},$$

et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Ceci étant valable pour tout $r < R$ on obtient que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R}.$$

On suppose maintenant que $R < +\infty$ et on considère $r > R$. Toujours d'après la proposition 1.11, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Il existe donc une suite croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_{n_k}| r^{n_k} \geqslant 1,$$

soit

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{r}.$$

On en déduit que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{r}.$$

Ceci étant valable pour tout $r > R$ on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{R}.$$

Finalement on a bien

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

- On suppose que le quotient $|a_{n+1}| / |a_n|$ est bien défini et converge vers une limite $\ell \in [0, +\infty]$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $z \in \mathsf{K}^*$ on a

$$\frac{\left|a_{n+1} z^{n+1}\right|}{|a_n z^n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\,|z|\,.$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge si $|z| < 1/\ell$ et diverge si $|z| > 1/\ell$. Cela prouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $1/\ell$. □

Remarque 1.13. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \in [0, +\infty]$ son rayon de convergence. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors d'après le critère de Cauchy le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n n^\alpha z^n$ est R. Par contre les domaines de convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n n^\alpha z^n$ ne sont pas nécessairement égaux (considérer par exemple le cas $a_n = 1$).

Remarque 1.14. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$, on peut également la voir comme une série entière complexe, et elle aura alors le même rayon de convergence.

2 Sommes et produits de séries entières

Après avoir discuté du domaine de convergence d'une série entière, on donne maintenant quelques propriétés de ces séries. Pour cela, on considère deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z_n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Proposition 2.1. *Soient $\alpha, \beta \in \mathsf{K}$. Pour $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$ on a*

$$\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \beta \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n.$$

Cela définit une série entière de rayon $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Démonstration. La première assertion n'est rien d'autre que la linéarité pour des séries convergentes. Le membre de droite est bien de la forme d'une série entière, et puisque la série converge pour tout $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$, son rayon est bien au moins égal à $\min(R_a, R_b)$. □

On rappelle le résultat suivant sur le produit de deux séries numériques :

Proposition 2.2. *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ deux séries numériques absolument convergentes. Alors on a*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n\right),$$

où pour $n \in \mathbb{N}$ on a noté

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

En particulier, la série du membre de droite est absolument convergente.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\tilde{\gamma}_n = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \, |\beta_{n-k}| \, .$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^{N} |\gamma_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \tilde{\gamma}_n \leqslant \sum_{k=0}^{N} |\alpha_k| \sum_{n=k}^{N} |\beta_{n-k}| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j| \right).$$

Cela prouve que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$ converge absolument (de même que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\gamma}_n$). En outre,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \gamma_n - \left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \right) \left(\sum_{j=0}^{N} \beta_j \right) \right| \leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant j,k \leqslant N \\ j+k>N}} |\alpha_k| \, |\beta_j| \leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant j,k \leqslant +\infty \\ j+k>N}} |\alpha_k| \, |\beta_j| \leqslant \sum_{n>N} \tilde{\gamma}_n.$$

Par passage à la limite ($N \to +\infty$), on obtient bien que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \right) \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \right).$$

□

Exemple 2.3. Pour $z_1, z_2 \in \mathsf{K}$ on a

$$\exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2).$$

Proposition 2.4. *Pour $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$ on a*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \right) \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n,$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Cela définit une série entière de rayon $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Démonstration. Pour $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$ on applique la proposition précédente avec $\alpha_n = a_n z^n$ et $\beta_n = b_n z^n$. □

Remarque 2.5. Pour les propositions 2.1 et 2.4 il est tout à fait possible que le rayon de convergence de la série entière obtenue soit strictement supérieur à $\min(R_a, R_b)$. Par exemple, si $b_n = -a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la somme des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ est nulle (et donc le rayon de convergence correspondant est infini), quelle que soit la valeur commune de R_a et R_b. De même, pour tout $z \in D(0,1)$ on a

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \right) \times (1 - z) = \frac{1}{1-z} \times (1 - z) = 1,$$

et la série entière de droite a un rayon de convergence infini alors que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Néanmoins, dans le cas d'une somme, si $R_a \neq R_b$ alors le rayon de la somme est nécessairement $\min(R_a, R_b)$.

3 Régularité d'une fonction définie par une série entière

On s'intéresse dans ce paragraphe à la fonction définie par une série entière sur son disque de convergence (que l'on supposera non vide). On s'intéresse en particulier aux propriétés de régularité.

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme. On a vu que pour tout $r \in]0, R[$ la série converge uniformément sur le disque $D(0, r)$. Cela prouve que f est continue sur $D(0, r)$. Ceci étant valable pour tout $r \in]0, R[$, f est en fait continue sur tout le disque de convergence $D(0, R)$. On montre dans ce paragraphe que f est en fait très régulière sur $D(0, R)$.

On rappelle que la dérivabilité au sens complexe est définie comme pour une fonction d'une variable réelle. Soit Ω un ouvert de K. Une fonction $f : \Omega \to \mathsf{K}$ est dérivable en $z_0 \in \Omega$ de dérivée $f'(z_0)$ si

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z\to z_0]{} f'(z_0).$$

On dit que f est dérivable sur Ω si elle est dérivable en chaque point de Ω. On définit alors de la même façon les dérivées successives de f. En outre on dit que f est de classe C^k sur Ω si elle est k fois dérivable sur Ω et sa dérivée $f^{(k)}$ est continue sur Ω. Elle est de classe C^∞ si elle est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Étant donnés $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, la fonction polynomiale

$$P : z \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

est dérivable sur K de dérivée

$$P' : z \mapsto \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}.$$

En itérant, on obtient qu'une fonction polynomiale est en fait de classe C^∞ et que pour tous $k \in [\![0, N]\!]$ et $z \in \mathsf{K}$ on a

$$P^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{N} n(n-1)\ldots(n-k)a_n z^{n-k}$$

(et les dérivées d'ordres plus grands que N sont nulles). En particulier, en évaluant en 0, on obtient que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$ on a

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Ainsi, P peut s'écrire comme sa série (somme finie dans ce cas) de Taylor en 0 : pour tout $z \in \mathsf{K}$ on a

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Le but de ce paragraphe est de voir dans quelle mesure ces résultats se généralisent à la somme d'une série entière quelconque.

Proposition 3.1. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0,+\infty]$. On note f sa somme. Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$ a également un rayon de convergence égal à R et pour $z \in D(0,R)$ la fonction f est dérivable en z de dérivée*

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}.$$

Démonstration. • On note R' le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$. Montrons que $R' \geqslant R$. Il suffit de considérer le cas où $R > 0$. Soient alors $r \in]0,R[$ et $\tilde{r} \in]r,R[$. On a

$$n a_n r^{n-1} = \underbrace{\frac{n}{r}\left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^n}_{\to 0} \underbrace{a_n \tilde{r}^n}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $R' \geqslant r$. Ceci étant valable pour tout $r \in]0,R[$, on obtient que $R' \geqslant R$. Inversement, on suppose que $R' > 0$ et considère $r \in]0,R'[$ et $\tilde{r} \in]r,\tilde{R}[$. On a alors

$$a_n r^n = \underbrace{n a_n \tilde{r}^{n-1}}_{\to 0} \underbrace{\frac{r}{n}\left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^{n-1}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela prouve que $R \geqslant R'$, et donc que $R = R'$.
• On suppose que $R > 0$ (sinon la deuxième conclusion de la proposition est vide). Soit $r \in]0,R[$. Pour $z \in D(0,r)$ et $h \in D^*(0, r - |z|)$ on a

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}. \tag{3.1}$$

En utilisant l'identité

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1},$$

valable pour tous complexes distincts α et β, et sachant que $|z| < r$ et $|z+h| < r$, on obtient que

$$|a_n| \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \right| \leqslant |a_n|\, n r^{n-1}.$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,|a_n|\,r^n$ est convergente, on peut passer à la limite terme à terme dans (3.1) et on obtient

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}.$$

Cela prouve que f est dérivable en z de dérivée donnée par la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$. □

Ainsi la somme d'une série entière est dérivable et la dérivée s'obtient en dérivant terme à terme. En « primitivant » terme à terme on obtient encore une série entière. Et en appliquant la proposition 3.1 à cette série on obtient qu'elle est dérivable de dérivée f :

Proposition 3.2. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$. On note f sa somme. Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a également un rayon de convergence égal à R et sa somme F est une primitive de f sur $D(0,R)$.*

D'autre part, en appliquant la proposition 3.1 aux dérivées successives de f on obtient par récurrence que f est en fait de classe C^∞ :

Proposition 3.3. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$. On note f sa somme. Alors f est de classe C^∞ au sens complexe et pour $k \in \mathbb{N}$ et $z \in D(0,R)$ on a*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geqslant k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k},$$

où le terme de droite définit une série entière de rayon de convergence R.

En évaluant en 0 toutes ces dérivées successives, on obtient que comme pour une fonction polynomiale la somme d'une série entière coïncide avec sa série de Taylor en 0.

Corollaire 3.4. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$. On note f sa somme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ainsi, pour $z \in D(0,R)$ on a

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

On vient de voir que la somme d'une série entière est non seulement de classe C^∞ sur son disque de convergence, mais qu'elle est de plus égale à la somme de sa série de Taylor en 0. Dans le cas d'une fonction d'une variable réelle (on verra lors du chapitre sur les fonctions holomorphes que les choses sont bien différentes pour une fonction d'une variable complexe), cette dernière propriété est bien plus forte que le fait d'être de classe C^∞.

En effet, il existe sur $\mathbb{R}$ des fonctions de classe C^∞ dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul. Une telle fonction n'a alors aucune chance de coïncider avec cette série de Taylor sur aucun voisinage de 0. En fait, d'après le Théorème de Borel (voir par exemple l'exercice 116 du *Petit Guide de calcul différentiel* de F. Rouvière), pour toute suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En prenant par exemple $a_k = (k!)^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on obtient un exemple de fonction dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul.

Un autre phénomène possible est d'avoir une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui admet en 0 une série de Taylor qui a un rayon de convergence infini, mais telle que la fonction et sa série de Taylor en 0 ne coïncident sur aucun voisinage de 0. Par exemple, la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et toutes ses dérivées sont nulles en 0. Sa série de Taylor est donc nulle en 0, alors qu'elle n'est elle-même identiquement nulle sur aucun voisinage de 0.

Ces remarques étant faites, il est naturel de se demander quand une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 est effectivement la somme de sa série de Taylor. Les versions globales de la formule de Taylor (Taylor-Lagrange ou Taylor avec reste intégral) permettent de contrôler la différence entre une fonction et les sommes partielles de sa série de Taylor. On reprend en guise d'exemple une fonction déjà abordée. On reviendra sur les fonctions usuelles au paragraphe 6.

Exemple 3.5. On suppose connue la fonction ln (on reviendra sur sa définition au paragraphe 6). Pour $h > -1$ on note $f(h) = \ln(1+h)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $h > -1$ on a $f^{(n)}(h) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+h)^n}$. D'après la formule de Taylor-Lagrange on a pour $N \in \mathbb{N}$

$$\left| f(h) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} h^n \right| \leqslant \frac{|h|^{N+1}}{N}.$$

Pour $|h| < 1$ on obtient par passage à la limite

$$\ln(1+h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} h^n.$$

Cela prouve que f est sur $]-1,1[$ la somme d'une série entière (de rayon de convergence égal à 1).

4 Fonctions analytiques

On a vu au paragraphe précédent que les fonctions définies par une série entière ont de très bonnes propriétés de régularité, puisqu'elles sont automatiquement de classe C^∞, et sont même égales à leurs séries de Taylor en 0.

Cependant, la somme d'une série entière est nécessairement une fonction définie sur un disque centré en 0, ce qui semble restreindre la portée des résultats obtenus. En outre, le corollaire 3.4 ne donne une écriture comme série de Taylor qu'en 0, alors que pour une fonction polynomiale, le résultat est valable en tout point.

On commence par observer que le choix de centrer les séries entières en 0 est purement arbitraire, et que la même analyse peut être faite autour de n'importe quel $z_0 \in \mathsf{K}$.

Définition 4.1. Soit $z_0 \in \mathsf{K}$. On appelle *série entière centrée en* z_0 une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n,$$

avec $a_n \in \mathsf{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par translation, toutes les propriétés des séries entières (centrées en 0) que l'on a montrées au paragraphe précédent s'étendent sans difficulté aux séries entières centrées en n'importe quel point de $\mathbb{C}$. Typiquement, le domaine de convergence $\mathcal{D}$ d'une série entière centrée en z_0 vérifie

$$D(z_0, R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D}(z_0, R)$$

pour un certain $R \in [0, +\infty]$, que l'on appelle toujours rayon de convergence.

On observe que les propriétés qui nous intéressent sont essentiellement des propriétés locales. Pour les obtenir, on n'a donc pas besoin d'avoir une fonction vraiment définie par une série entière, il suffit de considérer des fonctions qui s'écrivent *au voisinage de chaque point* comme la somme d'une série entière.

Définition 4.2. Soient Ω un ouvert de K et f une fonction de Ω dans K. Soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est *développable en série entière en* z_0 s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que $D(0,r) \subset \Omega$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à r, et

$$\forall z \in D(z_0,r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Autrement dit, la fonction $h \mapsto f(z_0+h)$ coïncide avec la somme d'une série entière au voisinage de 0.

Définition 4.3. Soient Ω un ouvert de K et f une fonction de Ω dans K. On dit que f est *analytique sur* Ω si elle est développable en série entière en chaque point de Ω.

Exemple 4.4. Une fonction polynomiale est analytique sur K. En effet, si $P \in K[X]$ un polynôme de degré $N \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in \mathsf{K}$, on sait que pour tout $z \in \mathsf{K}$ on a

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k. \tag{4.1}$$

On généralise maintenant l'exemple 4.4 en montrant que la somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence. Attention, ce n'est pas une propriété évidente. Il est clair qu'une série entière de rayon de convergence non nul est développable en série entière en 0, mais il faut travailler un peu pour montrer que c'est aussi le cas en tous les autres points du disque.

Proposition 4.5. *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est analytique sur $D(0,R)$. Plus précisément, pour tout $z_0 \in D(0,R)$ la fonction f est développable en série entière en z_0 et le rayon de convergence de la série correspondante est au moins égal à $R - |z_0|$.*

Démonstration. Soient $z_0 \in D(0,R)$. Formellement, pour $h \in D(0, R-|z_0|)$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0+h)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} h^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} h^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{k+j} C_{k+j}^k z_0^j\right) h^k.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Soit alors $r \in]0, R-|z_0|[$. Le même calcul (justifié cette fois, car on ne manipule que des termes réels positifs) donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{k+j}|\, C_{k+j}^k\, |z_0|^j\, r^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,(|z_0|+r)^n < +\infty.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on peut alors poser

$$b_k = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{k+j} C_{k+j}^k z_0^j,$$

et le calcul précédent assure que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k h^k$ a un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0|$. En outre, le calcul (4.2) est désormais licite et prouve que pour tout $h \in D(0, R - |z_0|)$ on a

$$f(z_0 + h) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k h^k.$$

Cela prouve la proposition. □

Corollaire 4.6. *Une fonction développable en série entière en un point est analytique au voisinage de ce point.*

Example 4.7. La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Proposition 4.8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $\alpha f + \beta g$ et fg sont analytiques sur Ω.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer les propositions 2.1 et 2.4 au voisinage de chaque point de Ω. □

Les résultats de régularité s'étendent alors sans difficulté aux fonctions analytiques. Il suffit d'écrire le développement en série entière au voisinage de chaque point du domaine de définition.

Proposition 4.9. *Soit f une fonction analytique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors f est de classe C^∞ sur Ω. En outre, pour $z_0 \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Un fonction analytique admet également une primitive au voisinage de tout point. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ comme à la proposition précédente, f admet une primitive F sur $D(z_0, r)$. Elle est donnée par

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0)^{n+1}.$$

Par contre, prudence, l'existence d'une primitive n'est pas une propriété locale. Dans $\mathbb{C}$, ce n'est pas parce que f admet une primitive au voisinage de tout point de Ω qu'elle admet une primitive sur tout Ω. On y reviendra au chapitre sur les fonctions holomorphes.

5 Principe des zéros isolés

On discute dans ce paragraphe une propriété très importante des fonctions analytiques. On a vu au paragraphe précédent qu'une fonction analytique est de classe C^∞, ce qui est déjà une propriété de régularité importante. Mais les résultats de ce paragraphe montrent que l'analyticité est bien plus rigide. Alors que la régularité C^∞ est a priori une propriété locale, la connaissance d'une fonction analytique au voisinage d'un point permet de dire beaucoup de choses sur ce qui se passe même loin de ce point !

On commence par donner le résultat pour une série entière. Pour $z_0 \in \mathsf{K}$ et $r > 0$ on définit le disque épointé de centre z_0 et de rayon r par

$$D^*(z_0, r) = \{z \in K \mid 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Proposition 5.1. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R > 0$.

(i) On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = 0.$$

Alors $f = 0$ *sur tout* $D(0, R)$.

(ii) On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $f^{(k)}(0) \neq 0$. *Alors il existe* $r \in]0, R[$ *tel que*

$$\forall z \in D^*(0, r), \quad f(z) \neq 0.$$

Démonstration. La première propriété est une conséquence immédiate du corollaire 3.4. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. Il existe un plus petit entier vérifiant cette propriété, donc quitte à choisir k plus petit on peut supposer que $f^{(j)}(0) = 0$ pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$. D'après le corollaire 3.4, pour tout $z \in D(0, R)$ on a

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

où on a posé

$$g(z) = \sum_{n \geqslant k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z - z_0)^{n-k}.$$

g est également la somme d'une série entière bien définie sur $D(0, R)$. En outre $g(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \neq 0$, donc par continuité il existe $r > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0, r)$. Cela prouve que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D^*(0, r)$. □

On observe que dans cette proposition l'hypothèse est locale (elle ne dépend que des valeurs de f au voisinage de 0), la deuxième conclusion est locale (on obtient une information au voisinage de 0), mais la première conclusion est globale (f est nulle partout). Pour une fonction analytique, ce résultat n'est valable qu'au voisinage du point z_0 où on fait l'hypothèse, mais elle se propage ensuite loin de z_0 par un argument de connexité.

Proposition 5.2. *Soient* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* f *une fonction analytique sur* Ω. *On suppose qu'il existe* $z_0 \in \Omega$ *tel que* $f^{(n)}(z_0) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* f *est nulle sur* Ω.

Démonstration. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des $z \in \Omega$ tels que $f^{(n)}(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{Z}$ est fermé dans Ω comme intersection de fermés et non vide par hypothèse. En outre, si z est dans $\mathcal{Z}$ alors d'après la proposition 4.9 f s'annule au voisinage de z. Cela prouve que $\mathcal{Z}$ est ouvert. Ainsi $\mathcal{Z}$ est ouvert, fermé et non vide. Puisque Ω est connexe, on obtient que $\mathcal{Z} = \Omega$, ce qui signifie que f est nulle. □

Définition 5.3. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω s'annulant en z_0. L'ordre de multiplicité de z_0 comme zéro de f est alors

$$m = \min \left\{ j \in \mathbb{N} \mid f^{(j)}(z_0) \neq 0 \right\} \quad \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}.$$

On dit alors que z_0 est un *zéro d'ordre* m de f (si f ne s'annule pas en z_0 on peut éventuellement dire que z_0 est un zéro d'ordre 0 de f).

Remarque 5.4. f admet en z_0 un zéro d'ordre supérieur ou égal à $m \in \mathbb{N}$ si et seulement si la série entière avec laquelle f coïncide au voisinage de z_0 est de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geqslant m} a_n (z - z_0)^n.$$

Si de plus $a_m \neq 0$ alors z_0 est un zéro d'ordre exactement égal à m.

Le théorème suivant sera extrêmement important pour l'étude des fonctions analytiques :

Théorème 5.5 (Principe des zéros isolés)**.** *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique non identiquement nulle sur Ω. Alors l'ensemble des points où f s'annule est une partie discrète de Ω (tout zéro de f est isolé).*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. On suppose que $f(z_0) = 0$. Puisque f n'est pas identiquement nulle, elle admet un zéro d'ordre fini $m \in \mathbb{N}^*$ en z_0 d'après la proposition 5.2. Par la proposition 5.1 il existe alors $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $D^*(z_0, r)$. Cela prouve que z_0 est un zéro isolé de f. □

Corollaire 5.6. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ l'ensemble $f^{-1}(\{\alpha\})$ est discret ou égal à Ω.*

Corollaire 5.7. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions analytiques sur Ω. Si l'ensemble des points où f et g coïncident admet un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$.*

Remarque 5.8. On rappelle qu'une fonction polynomiale (somme finie de monômes) non constante s'annule au plus un nombre fini de fois (le nombre de zéros comptés avec ordres de multiplicité étant égal au degré du polynôme). On déduit du Théorème 5.5 qu'une série entière (somme dénombrable de monômes) non nulle admet au plus un nombre dénombrable de zéros (comptés avec multiplicité). C'est cohérent.

Le résultat qui suit est un simple cas particulier du Corollaire 5.7, mais il est d'une telle importance qu'on lui accordera le statut de théorème.

Théorème 5.9 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω. Soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert contenant Ω. Alors f admet au plus un prolongement analytique de f sur $\tilde{\Omega}$.*

Démonstration. On suppose que les fonctions g_1 et g_2 sont deux fonctions analytiques sur $\tilde{\Omega}$ qui coïncident avec f sur Ω. Elles y sont en particulier égales. Puisque Ω n'est pas discret, on en déduit que $g_1 = g_2$. □

Remarque 5.10. Une fonction d'une variable réelle qui n'est que de classe C^∞ ne vérifie pas en général ces propriétés. Par exemple, on peut montrer qu'il existe des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ égales à 0 sur $[-1, 1]$ et égales à 1 (ou n'importe quoi d'autre) en dehors de [-2,2], ce qui est en contradiction totale avec le principe des zéros isolés ou le principe du prolongement analytique. Et encore, on peut faire bien plus exotique (voir par exemple l'exercice 115 du Rouvière). Cela illustre à nouveau à quel point l'analycité et ses conséquences sont des propriétés très fortes.

6 Fonctions usuelles

On discute dans cette section d'exemples de fonctions usuelles analytiques. Il s'avère que la plupart des fonctions habituelles sont en fait analytiques.

6.1 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle a été définie à l'exemple 1.3 par la série entière

$$\exp(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}.$$

On décrit dans ce paragraphe les propriétés de cette fonction. On ne suppose connue aucune des propriétés de l'exponentielle, ni réelle, ni complexe. On ne suppose pas non plus avoir déjà connaissance du réel π, qui sera défini pour l'occasion.

Proposition 6.1. (i) *On a* $\exp(0) = 1$.

(ii) *La série exponentielle a un rayon de convergence infini. En particulier, la convergence de la série est normale sur tout compact de* $\mathbb{C}$.

(iii) *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

(iv) *Pour* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

(v) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $\exp(z) \neq 0$ *et*

$$\exp(z)^{-1} = \exp(-z).$$

(vi) *La fonction exponentielle est analytique sur* $\mathbb{C}$. *En particulier elle est holomorphe et pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\exp'(z) = \exp(z).$$

(vii) *La restriction de la fonction exponentielle à* $\mathbb{R}$ *définit une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

(viii) *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$|\exp(z)| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}.$$

(ix) *L'image de l'application exponentielle est* $\mathbb{C}^*$.

(x) *Il existe un unique réel positif, noté* π, *tel que pour* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\exp(z) = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

On a alors $\exp(i\pi) = -1$ *et* $\exp(i\pi/2) = i$.

Démonstration. • Le premier point est clair, le second a été vu au paragraphe 1, le quatrième à l'exemple 2.3, le cinquième suit en prenant $z_2 = -z_1$, et le sixième est conséquence des propositions 4.5 et 3.1, et d'un simple calcul. Pour (iii), on utilise le fait que le conjugué d'une somme finie est la somme des conjugués, et le fait que la conjugaison définit une application continue sur $\mathbb{C}$.

• Montrons (vii). L'exponentielle d'un réel est bien réelle, comme somme d'une série à coefficients réels, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0.$$

D'après (vi), l'exponentielle définit alors une application strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a alors $\exp(1) > \exp(0) = 1$ et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\exp(n) = \exp(1)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

La croissance assure alors que

$$\exp(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty,$$

puis

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

La fonction exponentielle réalise donc bien une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après (iii) et (iv) on a

$$|\exp(i\theta)|^2 = \exp(i\theta)\overline{\exp(i\theta)} = \exp(i\theta)\exp(-i\theta) = 1.$$

Inversement on suppose que $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) est tel que $|\exp(z)| = 1$. On a alors

$$1 = |\exp(z)| = |\exp(x)|\,|\exp(iy)| = \exp(x).$$

Puisque l'exponentielle réelle est injective, on a nécessairement $x = 0$. On obtient bien que $|\exp(z)| = 1$ si et seulement si z est imaginaire pur.

- Montrons (ix). On note $F = \exp(\mathbb{C})$. On a déjà vu que $F \subset \mathbb{C}^*$ et, d'après le théorème de l'application ouverte, F est un ouvert de $\mathbb{C}$ (et donc un ouvert de $\mathbb{C}^*$). En outre, F est un sous-groupe du groupe (multiplicatif) $\mathbb{C}^*$. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. L'application $z \mapsto az$ est une bijection continue de $\mathbb{C}^*$, dont la réciproque $z \mapsto a^{-1}z$ est également continue. Ainsi, $aF = \{az, z \in F\}$, est un ouvert de $\mathbb{C}^*$. En outre, $aF \cap F \neq \varnothing$ si et seulement si $a \in F$ (auquel cas on a $aF = F$). Ainsi on a

$$\mathbb{C}^* = F \sqcup \left(\bigcup_{a \in \mathbb{C}^* \setminus F} aF \right).$$

Ainsi on a écrit $\mathbb{C}^*$ comme union disjointe de deux ouverts. Comme F n'est pas vide et que $\mathbb{C}^*$ est connexe, cela prouve que $F = \mathbb{C}^*$.

- Il reste à montrer (x). On a déjà vu que l'image réciproque de $\{1\}$ par l'exponentielle est contenue dans l'axe imaginaire. Il suffit donc d'étudier le noyau N du morphisme de groupes

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathbb{C},^*, \times) \\ \theta & \mapsto & \exp(i\theta). \end{array} \right.$$

Ce noyau est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. On considère $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\exp(i\theta) = -1$ (un tel θ existe d'après (ix) et (viii)). Cela assure déjà que $N \neq \mathbb{R}$. D'autre part, $\exp(2i\theta) = \exp(i\theta)^2 = 1$, donc N n'est pas réduit à $\{0\}$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $N = \alpha\mathbb{Z}$. On note alors $\pi = \alpha/2$. On a alors $\exp(i\pi) \neq 1$ et $\exp(i\pi)^2 = \exp(2i\pi) = 1$ donc $\exp(i\pi) = -1$. Ainsi, pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\exp(i\theta) = 1$ si et seulement si θ est un multiple de 2π et $\exp(i\theta) = -1$ si et seulement si $\theta - \pi$ est un multiple de 2π.

On s'intéresse finalement à $\exp(i\pi/2)$. C'est une racine de -1, soit i ou $-i$. On considère la fonction $s : t \mapsto \operatorname{Im}(\exp(i\theta))$. Elle est continue et ne s'annule que quand $\exp(i\theta)$

vaut 1 ou -1, soit quand t est un multiple de π. En particulier, s est de signe constant sur $]0,\pi[$. Mais $s'(0) = \mathrm{Im}(i) = 1$, donc s prend des valeurs strictement positives sur $]0,\pi[$. Cela assure que $\exp(i\pi/2) = i$. □

Définition 6.2. On note $e = \exp(1)$. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pourra écrire e^z au lieu de $\exp(z)$.

Remarque 6.3. Attention à cette notation ! ! Elle est pratique, donc on l'utilise, mais ce n'est qu'une notation, et il ne faut pas lui faire dire ce qu'elle ne dit pas. On utilise cette notation parce que les propriétés (iv) et (v) sont vraies, et qu'en ce sens la fonction exponentielle ressemble à une fonction puissance. Évidemment, il n'est pas question de *déduire* (iv) et (v) d'un choix de notation. D'autre part, ce choix de notation est raisonnable car pour un entier n les deux nombres $\exp(n)$ et $e \times \cdots \times e$ (avec n facteurs) coïncident (d'après la propriété (iv)...), il n'y a donc pas d'ambiguïté à les noter de la même façon. De même, $\exp(-n)$ coïncide avec $1/(e \times \cdots \times e)$.

Définition 6.4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Proposition 6.5. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors z admet une infinité d'arguments. Plus précisément, si θ_0 est un argument de z, alors l'ensemble des arguments de z est*

$$\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. On note $u = z/|z|$. On a $|u| = 1$. D'après les propriété (ix) et (viii) de la proposition 6.1 il existe $\theta_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(i\theta_0) = u$. θ_0 est alors un argument de z. Soit maintenant $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} \iff e^{i\theta} = e^{i\theta_0} \iff e^{i(\theta-\theta_0)} = 1.$$

D'après la propriété (x) de la proposition 6.1, θ est un argument de z si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $i(\theta - \theta_0) = 2ik\pi$, soit $\theta = \theta_0 + 2k\pi$. □

6.2 Fonctions hyperboliques et trigonométriques

On définit maintenant les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* par les séries entières

$$\cosh(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sinh(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Proposition 6.6. (i) *Les séries cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ont un rayon de convergence infini.*

(ii) *La fonction* cosh *est paire, la fonction* sinh *est impaire.*

(iii) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a*

$$\exp(z) = \cosh(z)+\sinh(z), \quad \cosh(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}.$$

(iv) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a*

$$\cosh'(z) = \sinh(z) \quad \textit{et} \quad \sinh'(z) = \cosh(z).$$

(v) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

Démonstration. On montre le dernier point. Pour $z \in \mathbb{C}$ on note $f(z) = \cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 - 1$. Cela définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ de dérivée partout nulle. Par conséquent, toutes les dérivées de f sont nulles. Comme par ailleurs f s'annule en 0, on obtient que $f = 0$. □

On définit maintenant les fonctions *cosinus* et *sinus* par les séries entières

$$\cos(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Proposition 6.7. (i) *Les séries cosinus et sinus ont un rayon de convergence infini.*

(ii) *La fonction* cos *est paire, la fonction* sin *est impaire.*

(iii) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cos(z) = \cosh(iz) \quad \textit{et} \quad \sin(z) = -i \sinh(iz).$$

(iv) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

(v) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cos'(z) = -\sin(z) \quad \textit{et} \quad \sin'(z) = \cos(z).$$

(vi) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1.$$

(vii) *Pour* θ *réel (et seulement dans ce cas !) on a*

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}(\exp(i\theta)) \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \operatorname{Im}(\exp(i\theta)).$$

Lorsque cela a un sens on pose

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \quad \text{et} \quad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

6.3 Logarithmes

Il y a deux façons naturelles d'introduire le logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. On peut le voir comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, ou bien comme la réciproque de la fonction exponentielle, qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. L'avantage de la première approche est qu'elle ne nécessite pas de série. Puisqu'il s'agit ici d'un chapitre sur les séries, on choisit de définir le logarithme à partir de l'exponentielle.

Définition 6.8. On appelle *logarithme népérien* et on note ln la bijection réciproque de l'exponentielle réelle.

Il est alors facile de vérifier que ln est bien l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. En outre, comme l'exponentielle, le développement en série entière du logarithme est donnée par son développement de Taylor.

Proposition 6.9. *La fonction* ln *est analytique sur* $]0, +\infty[$. *Par exemple, au voisinage de 1 on a, pour tout* $h \in]-1, 1[$,

$$\ln(1 + h) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n + 1} h^{n+1}.$$

On s'intéresse maintenant au cas complexe. On peut envisager à nouveau les deux mêmes approches pour définir un logarithme complexe, à savoir essayer d'inverser la fonction exponentielle ou de trouver une primitive de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$. On verra à la proposition 6.16 que ces deux propriétés sont encore équivalentes... et présentent donc les mêmes difficultés.

A ce stade, on n'a pas de résultat d'existence de primitives (patience, ça viendra !) et l'exponentielle complexe n'est pas vraiment une bijection. Si on restreint l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{C}^*$ on obtient une application surjective mais, contrairement à l'exponentielle réelle, l'exponentielle complexe n'est pas non plus injective. Il est donc nécessaire de restreindre également l'ensemble de départ.

On commence par regarder la forme que doit nécessairement avoir une éventuelle réciproque de l'exponentielle.

Lemme 6.10. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Si* $\ell(z) \in \mathbb{C}$ *est tel que* $\exp(\ell(z)) = z$ *alors on a*

$$\ell(z) = \ln(|z|) + i\theta,$$

où θ *est un argument de* z.

Démonstration. On note $\ell(z) = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors

$$z = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy).$$

Ainsi $|z| = \exp(x)$, soit $x = \ln(|z|)$, puis $\exp(iy) = z/|z|$, ce qui signifie que y est un argument de z. $\square$

On a précisé le fait que l'exponentielle complexe n'est pas injective, et avec la proposition 6.5 on obtient que chaque $z \in \mathbb{C}^*$ admet une infinité d'antécédents, tous différents d'un multiple de $2i\pi$.

Définition 6.11. Une *détermination continue du logarithme* sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction continue ℓ sur Ω telle que

$$\forall z \in \Omega, \quad \exp(\ell(z)) = z.$$

Ainsi, si la fonction exponentielle est injective sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, alors elle réalise une bijection de Ω dans l'ouvert $\tilde{\Omega} = f(\Omega)$ et sa réciproque est une détermination continue du logarithme sur $\tilde{\Omega}$.

Remarque 6.12. Il ne peut pas exister de détermination du logarithme sur un ouvert contenant 0.

Proposition 6.13. *Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux déterminations continues du logarithme sur deux ouverts Ω_1 et Ω_2 d'intersection connexe et non vide, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell_1(z) - \ell_2(z) = 2ik\pi$ pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.*

Démonstration. Puisque $\exp(\ell_1(z) - \ell_2(z)) = 1$ pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, il existe une application $k : \Omega_1 \cap \Omega_2 \to \mathbb{Z}$ telle que $\ell_1(z) - \ell_2(z) = 2ik(z)\pi$ pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Mais k est continue, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est supposé connexe et $\mathbb{Z}$ est discret, donc k est constante. ☐

Proposition 6.14. *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur un voisinage du cercle unité (en particulier sur $\mathbb{C}^*$).*

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe une détermination continue ℓ du logarithme sur un voisinage du cercle unité. Alors l'application $f : \theta \mapsto \ell(e^{i\theta}) - i\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp(f(z)) = \exp(\ell(e^{i\theta})) \exp(-i\theta) = 1,$$

donc f est à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Comme $2i\pi\mathbb{Z}$ est discret, f est une application constante, et donc

$$\ell(1) = f(0) = f(2\pi) = \ell(1) - 2i\pi,$$

ce qui donne une contradiction. ☐

Remarque 6.15. L'application exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times i]-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}^*$ et sa réciproque ℓ est une application sur $\mathbb{C}^*$ telle que $\exp \circ \ell = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}$. Mais cette fonction ℓ n'est pas continue, et ce pour la même raison que celle utilisée pour la preuve de la proposition 6.14 : $\ell(e^{-i\pi+i\varepsilon})$ tend vers $-i\pi$ quand ε tend vers 0, alors que $\ell(e^{-i\pi}) = i\pi$.

À la Définition 6.11, on a fait le choix d'introduire un logarithme comme étant une réciproque partielle de la fonction exponentielle. On fait maintenant le lien avec l'aspect primitive de la fonction inverse.

Proposition 6.16. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$.*

(i) *On suppose qu'il existe détermination continue ℓ du logarithme sur Ω. Alors ℓ est holomorphe et pour tout $z \in \Omega$ on a $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.*

(ii) *On suppose que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive F sur Ω. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $F - \alpha$ est une détermination continue du logarithme sur Ω.*

Démonstration. On suppose que ℓ est une détermination continue du logarithme sur Ω. Soit $z \in \Omega$. Par continuité de ℓ on a

$$\ell(z+h) - \ell(z) \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

puis, comme la fonction exp est dérivable de dérivée 1 en 0,

$$\frac{\exp(\ell(z+h) - \ell(z)) - 1}{\ell(z+h) - \ell(z)} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$$

(on note que le dénominateur n'est pas nul si $h \neq 0$ car ℓ est injective). Or

$$\exp\big(\ell(z+h) - \ell(z)\big) - 1 = \frac{\exp(\ell(z+h))}{\exp(\ell(z))} - 1 = \frac{z+h}{z} - 1 = \frac{h}{z}.$$

Cela prouve que

$$\frac{\ell(z+h) - \ell(z)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{z},$$

et donc que ℓ est dérivable en z de dérivée $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.

Inversement, on suppose que $F : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe avec $F'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$. Pour $z \in \Omega$ on pose

$$h(z) = \frac{\exp(F(z))}{z}.$$

Cela définit une fonction h est holomorphe de dérivée nulle et donc constante sur Ω. On note $\beta \in \mathbb{C}$ cette constante. Nécessairement, $\beta \neq 0$. Soit alors $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\alpha} = \beta$. Pour tout $z \in \Omega$ cela donne

$$\exp(F(z)) = z\exp(\alpha).$$

Cela prouve que $F - \alpha$ est une détermination du logarithme. □

Définition 6.17. On appelle *détermination principale du logarithme* et on peut noter Log la réciproque de la bijection

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times i]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{C}^* \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \\ z & \mapsto & \exp(z) \end{cases}$$

On remarque que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ il existe une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \backslash e^{i\theta}\mathbb{R}_+$.

Proposition 6.18. *La détermination principale du logarithme est développable en série entière sur le disque $D(1,1)$. Plus précisément, pour tout $z \in D(1,1)$ on a*

$$\operatorname{Log}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}. \tag{6.1}$$

Démonstration. D'après la proposition 6.16 on a, pour tout $z \in D(1,1)$,

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n (z-1)^n.$$

Ainsi, d'après la proposition 3.1, les deux membres de (6.1) sont deux fonctions holomorphes sur $D(1,1)$ qui ont même dérivée. Comme par ailleurs ces deux fonctions s'annulent en 1, on obtient qu'elles sont égales sur tout $D(1,1)$. □

Définition 6.19. On appelle *détermination continue de l'argument* une application de la forme $\operatorname{Im}(\ell)$ où ℓ est une détermination continue du logarithme.

La détermination principale de l'argument, que l'on peut noter Arg, est la partie imaginaire de la détermination principale du logarithme.

Proposition 6.20. *Soit θ une détermination continue de l'argument sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors θ est une fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}$ et $\theta(z)$ est un argument de z pour tout $z \in \Omega$.*

6.4 D'autres fonctions usuelles

Comme on l'a fait à l'exemple 3.5 pour la fonction ln, on peut vérifier que la plupart des fonctions usuelles de classe C^{∞} sur un intervalle de $\mathbb{R}$ sont en fait analytiques (et s'étendent donc en des fonctions analytiques sur un ouvert de $\mathbb{C}$). On rappelle (et on aurait pu procéder de cette façon pour ln), que si une fonction f est analytique, une primitive de f est également analytique par la proposition 3.2.

Dans ce chapitre on a choisi de définir les fonctions exp (et donc ln), cos, sin, cosh, sinh via une série. Mais si on les définit autrement, on peut vérifier a posteriori qu'elles sont analytiques.

On donne ici d'autres exemples, pas encore discutés dans ce chapitre. Les preuves d'analyticités sont laissées en exercices.

Exemple 6.21. Soit $\alpha > 0$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est analytique sur $]0,+\infty[$ et son développement en série entière au voisinage de 1 est donné par

$$(1+h)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} h^n.$$

Exemple 6.22. La fonction arcsin est analytique sur $]-1,1[$ et son développement en série entière en 0 est donné par

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k+1}.$$

On peut de la même façon montrer que les fonctions arctan, argcosh et argsinh sont analytiques.

7 Comportement au bord du disque de convergence

On a vu que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty[$, alors la série peut être convergente pour tout $z \in C(0,R)$ (par exemple $\sum \frac{z^n}{n^2}$), pour aucun $z \in C(0,R)$ (par exemple $\sum z^n$), ou même pour certains et pas d'autres (par exemple $\sum \frac{(-z)^n}{n}$).

D'autre part, on sait que la somme de cette série est continue sur le disque de convergence $D(0,R)$. Lorsque la série est convergente au bord, il est naturel de se demander si la somme est encore continue jusqu'au bord.

On peut toujours se ramener au cas où $R=1$, et on regarde le comportement de la somme au voisinage du point $z=1$.

On cherche donc à faire le lien entre la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et la limite de la somme $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ quand $z \in D(0,1)$ tend vers 1. La première question que l'on se pose est las suivante. Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. A-t-on alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \xrightarrow[\substack{x\to1 \\ x<1}]{} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad ? \tag{7.1}$$

Il s'agit d'une question d'interversion de limites (interversion limite-série).

Remarque 7.1. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente et donc continue sur $\overline{D}(0,1)$. En particulier (7.1) est vraie.

Dans le cas réel, on peut en fait se passer de l'hypothèse d'absolue convergence pour montrer (7.1)

Proposition 7.2. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence égal à 1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \xrightarrow[\substack{z\to1 \\ |z|<1}]{} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

On ne démontre pas ce résultat, qui peut être vu comme une conséquence de la proposition 7.4 qui suit. La proposition 7.2 peut permettre dans certains cas de calculer explicitement la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Exemple 7.3. En appliquant la proposition 7.2 à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-z)^n}{n}$ on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n x^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2).$$

Dans le cas complexe, on n'a pas forcément existence de la limite en approchant 1 par n'importe quelle suite dans $D(0,1)$, mais on a un résultat analogue si on évite d'approcher 1 en étant trop proche du bord. La proposition 7.4 implique en particulier la proposition 7.2.

Proposition 7.4. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On note f sa somme sur $D(0,1)$. Soit $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On note*

$$S = \left\{1 - \rho e^{i\theta}, \rho > 0, |\theta| \leqslant \theta_0\right\} \cap D(0,1).$$

Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge alors $f(z)$ tend vers $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ quand $z \in S$ tend vers 1.

Démonstration. Voir par exemple [Gourdon, p.252]. □

Dans la proposition 7.4 la restriction à un secteur ne peut pas être omise. En effet, il se peut que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge mais qu'il existe une suite (z_k) dans $D(0,1)$ qui tend vers 1 mais telle que $f(z_k)$ n'a pas de limite. Par exemple, on considère la série

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{z^{2\cdot 3^p} - z^{3^p}}{p}.$$

C'est une série entière de rayon de convergence 1, qui s'annule en 1. On note f sa somme. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $r \in]0,1]$ et $p > k$ on a

$$f(re^{i\pi 3^{-k}}) = \sum_{p=0}^{k} \frac{(re^{i\pi 3^{-k}})^{2\cdot 3^p} - (re^{i\pi 3^{-k}})^{3^p}}{p} + \sum_{p=k+1}^{+\infty} \frac{r^{2\cdot 3^p} + r^{3^p}}{p}.$$

La deuxième somme tend vers $+\infty$ quand r tend vers 1, donc il existe $r_k \in [1 - 2^{-k}, 1[$ tel que $\left|f(r_k e^{i\pi 3^{-k}})\right| \geqslant k$. Ainsi

$$r_k e^{i\pi 3^{-k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \left|f(r_k e^{i\pi 3^{-k}})\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

On observe que la réciproque de la proposition 7.2 n'est pas vraie. Par exemple on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} \frac{1}{2},$$

mais la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ diverge. La proposition suivante donne tout de même une réciproque partielle.

Proposition 7.5. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On note f sa somme sur $D(0,1)$. On suppose que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $f(x)$ admet une limite finie quand $x \in [0,1[$ tend vers 1. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge et sa somme vérifie (7.1).*

Démonstration. Voir par exemple [Gourdon, p.253]. □

8 Composition de fonctions analytiques

8.1 Composition de fonctions analytiques

Proposition 8.1. *Soient $a \in \mathbb{C}$, g une fonction développable en série entière au voisinage de a et f une fonction développable en série entière au voisinage de $f(a)$. Alors $(f \circ g)$ est développable en série entière au voisinage de a.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $a = f(a) = 0$.

• Il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K et $r_a, r_b > 0$ tels que les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ ont des rayons de convergence au moins égaux à $r_a > 0$ et $r_b > 0$ et leurs sommes coïncident avec f et g sur $D(0, r_a)$ et $D(0, r_b)$, respectivement. En outre on a $b_0 = 0$. Puisque g est continue et $g(0) = 0$, on peut choisir r_b assez petit pour assurer que $g(z) \in D(0, r_a)$ pour tout $z \in D(0, r_b)$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$b_n^{[m]} = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} b_{k_1} \dots b_{k_m}.$$

D'après la proposition 2.4, on obtient par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que la série entière $\sum b_n^{[m]} z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à r_b et pour $z \in D(0, r_b)$ on a

$$g(z)^m = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^{[m]} z^n.$$

Puisque $|g(z)| < r_a$, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} a_m g(z)^m$ est convergente et on a

$$f(g(z)) = \sum_{m\in\mathbb{N}} a_m g(z)^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{[m]} z^n. \tag{8.1}$$

On cherche maintenant à inverser l'ordre de sommation pour écrire $f(g(z))$ comme une série entière. Pour $z \in D(0, r_b)$ on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_m b_n^{[m]} z^n \right| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_m| \, \beta_n^{[m]} \, |z|^n ,$$

où pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ on a noté

$$\beta_n^{[m]} = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} |b_{k_1}| \dots |b_{k_m}| .$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ est absolument convergente pour $z \in D(0, r_b)$, donc par produit la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n^{[m]} z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à r_b. En outre elle s'annule en 0, donc quitte à choisir r_b plus petit, on peut supposer qu'elle est à valeurs dans $D(0, r_a)$ pour tout $z \in D(0, r_b)$. Cela assure que la série

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} |a_m| \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n^{[m]} \, |z|^n$$

est convergente pour tout $z \in D(0, r_a)$. On peut alors intervertir l'ordre des sommes dans (8.1), ce qui donne

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m b_n^{[m]} \right) z^n.$$

Comme cette série est absolument convergente pour tout $z \in D(0, r_b)$, cela prouve que $f \circ g$ est développable en série entière en 0. $\square$

Corollaire 8.2. *La composée de deux fonctions analytique est analytique.*

En composant une fonction analytique avec la fonction $z \mapsto 1/z$ (voir exercice 11), on obtient en particulier le résultat suivant.

Proposition 8.3. *Soient Ω un ouvert de K et f une fonction analytique sur Ω. On suppose que f ne s'annule pas sur Ω. Alors $1/f$ est analytique sur Ω.*

8.2 Fonctions racines et puissances réelles

Définition 8.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle détermination continue de la racine k-ième sur Ω une fonction continue f sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$ on a

$$f(z)^k = z.$$

Proposition 8.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe sur Ω une détermination continue ℓ du logarithme. Alors l'application*

$$z \mapsto \exp\left(\frac{\ell(z)}{k}\right).$$

est une détermination continue de la racine k-ième sur Ω.

Démonstration. La fonction proposée est continue comme composée de fonctions continues. En outre pour tout $z \in \Omega$ on a bien

$$\exp\left(\frac{\ell(z)}{k}\right)^k = \exp\big(\ell(z)\big) = z. \qquad \square$$

Exemple 8.6. L'application qui à $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ associe son unique racine de partie réelle strictement positive est une détermination continue de la racine carrée sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Idem en associant à z son unique racine carrée de partie réelle strictement négative.

Remarque 8.7. Plus généralement, si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^*$ sur lequel existe une détermination du logarithme, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on peut définir une « détermination continue de la puissance α » en posant

$$f_\alpha(z) = \exp\big(\alpha\ell(z)\big).$$

Cela définit une fonction holomorphe sur Ω et pour $z \in \Omega$ on a

$$f'_\alpha(z) = \frac{\alpha}{z} f_\alpha(z).$$

On observe que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $z \in \Omega$ on a aussi

$$f_\alpha(z) f_\beta(z) = f_{\alpha+\beta}(z).$$

En particulier, $f'_\alpha(z) = \alpha f_{\alpha-1}(z)$.

Proposition 8.8. *Soit $\alpha > 0$. Pour $h \in D(0,1)$ on pose*

$$f_\alpha(1+h) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} h^n.$$

Cela définit une série entière de rayon de convergence égal à 1 et et f_α est une détermination continue de la puissance α sur le disque $D(1,1)$.

Démonstration. Si α est un entier positif alors la série entière définissant f_α est une fonction polynomiale et le résultat est simplement la formule de Taylor pour un polynôme. On suppose maintenant que $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Par la règle de d'Alembert (voir la proposition 1.12), la série entière définissant f_α à un rayon de convergence égal à 1.

Par composition (voir la proposition 8.1 fonction $g_\alpha : z \mapsto \exp(\alpha \operatorname{Log}(z))$ est analytique sur $D(1,1)$. En outre, avec les propriétés des fonctions exp et Log, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$g_\alpha^{(n)}(1) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n-1)).$$

Cela prouve que pour tout $z \in D(1,1)$ on a $f_\alpha(z) = \exp(\alpha \operatorname{Log}(z))$, et en particulier f_α est une détermination de la puissance α sur $D(1,1)$. $\square$

9 Exercices

***Exercice* 1.** Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n+1}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{n+1} z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n^2}.$$

***Exercice* 2.** Déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^3}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} n^4 z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(n) z^n.$$

***Exercice* 3.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-z)^n}{\sqrt{n}}.$$

***Exercice* 4.** Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \in [0, +\infty]$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^{2n}$.

***Exercice* 5.** Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que ces deux séries ont un rayon de convergence au moins égal à r et

$$\forall z \in D(0,r), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n.$$

Montrer que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***Exercice* 6.** Développer en séries entières au voisinage de 0 la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(1-x)(2+x)}.$$

***Exercice* 7.** On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 1, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des solutions développables en séries entières sur un voisinage de 0. Si possible, exprimer les solutions obtenues à l'aide de fonctions usuelles.

***Exercice* 8.** Pour $x \in]-1,1[$ on pose

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que f est développable en séries entières sur $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ on a

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1.$$

3. Expliciter le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

***Exercice* 9.** Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

***Exercice* 10.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $z \mapsto z^n$ est analytique sur $\mathbb{C}$.

***Exercice* 11.** Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

***Exercice* 12.** Déterminer l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ telles que
1. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
2. $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$.

***Exercice* 13.** Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions analytiques sur Ω. Montrer que f ou g est identiquement nulle sur Ω.

***Exercice* 14.** **1.** Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que pour $r \in]0, R[$ on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Montrer que

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|.$$

3. Soient $R > 0$ et f une fonction analytique sur le disque complexe $D(0,R)$. Montrer que la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

a un rayon de convergence au moins égal à R.
4. Montrer que les conclusions des deux questions précédentes ne sont pas valables pour une fonction analytique réelle.

***Exercice* 15.** Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $u_0 \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des fonctions entières telles que

$$\begin{cases} u' = \alpha u, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$