

Chapitre 4

Mesures

On étudie dans ce chapitre la notion de mesure. Une mesure sur un ensemble X est une application qui à une partie A de X associe sa « taille ». De même qu'il y a toutes sortes de façons pertinentes de définir la distance entre deux points, chacune étant adaptée à un contexte ou un autre, il y a bien des façons de définir la taille des parties d'un même ensemble.

Par exemple, il y a une infinité de façons de mesurer la taille de chaque pays du monde. Sa superficie, le nombre d'habitants, ou encore le nombre de victoires à la coupe du monde de foot.

Autre exemple, considérons l'intervalle $[0, 2]$ de \mathbb{R} . Il est de longueur 2, il contient une infinité d'éléments, et contient 3 entiers. Quelles est alors la taille de ce segment ? Cela dépend du contexte.

Le but de ce chapitre est de donner une définition abstraite regroupant ce que devrait vérifier à minima une façon raisonnable d'attribuer une mesure aux parties d'un ensemble, puis de voir dans ce cadre abstrait quelles sont les propriétés communes à toutes ces mesures.

La première propriété que l'on attendra d'une mesure sur X est qu'elle attribue aux parties de X une mesure qui est un réel positif. On peut également définir des mesures signés, voire complexes, mais on n'en parlera pas ici.

La propriété centrale pour une mesure sur X est que la mesure d'une union disjointe de parties de X doit être la somme des mesures de chacune des parties. La superficie de l'union européenne est la somme des superficies des pays qui la composent. En particulier, il faut que cette union ait elle-même une mesure. Chaque pays de l'UE a un certain nombre de victoires en coupe du monde, mais l'UE en tant que telle n'en a pas. On peut toujours décider que le nombre de victoires de l'UE est la somme des victoires des états membres pour retomber sur une bonne mesure.

Il y a tout de même une subtilité important sur ce point, subtilité qu'il est important d'avoir en tête dès le début. On pourrait se contenter de demander que la mesure d'une union finie de parties deux à deux disjointes soit la somme des mesures de chacune des parties. Mais cela s'avérerait être une propriété trop faible. A l'inverse, on pourrait demander que la mesure d'une union quelconque de parties deux à deux disjointes soit la somme des mesures de chaque partie. Mais on obtient alors une propriété bien trop contraignante. Par exemple, le segment $[0, 2]$ est de longueur 2, alors qu'il est l'union de singletons deux à deux disjoints, qui sont chacun de longueur nulle.

Le bon compromis, qui sera effectivement retenu pour la définition d'une mesure, est de demander que la mesure d'une union dénombrable de parties deux à deux disjointes soit la somme des mesures de chaque partie. Ce choix est suffisamment souple pour qu'on

puisse effectivement définir les mesures dont on a besoin en pratique, mais suffisamment contraignant pour qu'on puisse ensuite déduire de bonnes propriétés. En particulier on pourra considérer la mesure de la limite (en un sens convenable à préciser) d'une suite de parties de X . Dans le contexte de l'intégration, c'est ce qui permettra d'obtenir de bonnes propriétés vis-à-vis du passage à la limite (c'est une question centrale en intégration de pouvoir dire quelque chose de la limite de l'intégrale d'une suite de fonction, on y reviendra ultérieurement).

4.1 Mesures sur $(X, \mathcal{P}(X))$

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X .

Définition 4.1. On appelle *mesure* sur $(X, \mathcal{P}(X))$ une application

$$\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties de X deux à deux disjointes alors on a

$$\mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

La deuxième propriété est une égalité dans $[0, +\infty]$. En particulier la série vaut $+\infty$ si l'un au moins des termes vaut $+\infty$ ou s'il s'agit d'une série de termes positifs divergente.

Remarque 4.2. La deuxième propriété dit que la mesure d'une union *dénombrable* de parties disjointes est la somme des mesures de chacune des parties. On ne demande pas à ce que ce soit le cas pour une union *quelconque* de parties de X .

Remarque 4.3. Pour la première hypothèse de la définition, il suffirait de supposer qu'il existe $A \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu(A) < +\infty$. En effet, pour un tel A on a alors $A \cap \emptyset = \emptyset$ et donc

$$\mu(A) + \mu(\emptyset) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A),$$

ce qui implique que $\mu(\emptyset) = 0$.

Exemple 4.4.

Pour $A \in \mathcal{P}(X)$ on pose

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela définit une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$, appelée *mesure de comptage*.

Exemple 4.5. On suppose que $X \neq \emptyset$ et on considère $x \in X$. On définit alors la mesure δ_x , appelée *mesure de Dirac* en x , par

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Exemple 4.6. On suppose que X est un ensemble fini. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$ on pose

$$\mu(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(X)}$$

Cela définit une mesure μ sur X , appelée *mesure uniforme*. On note que $\mu(A) \in [0, 1]$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, avec en particulier $\mu(X) = 1$.

Exemple 4.7. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ on pose

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$$

(si la série est convergente, alors $\mu(A)$ est sa somme, sinon la série est une série divergente de réels positifs, et dans ce cas on a $\mu(A) = +\infty$). Cela définit une mesure μ sur \mathbb{N} . Si $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on retrouve la mesure de comptage sur \mathbb{N} .

Proposition 4.8. (i) Soient $N \in \mathbb{N}$ et A_0, \dots, A_N des parties deux à deux disjointes de X . Alors on a

$$\mu \left(\bigsqcup_{n=0}^N A_n \right) = \sum_{n=0}^N \mu(A_n).$$

(ii) Si A et B sont des parties de X telles que $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(iii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties de X alors

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

(iv) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties de X croissante pour l'inclusion (c'est-à-dire telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(v) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties de X décroissante pour l'inclusion (c'est-à-dire telle que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et si $\mu(A_0) < \infty$, alors

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Démonstration. (i) Pour $n \geq N + 1$ on note $A_{n+1} = \emptyset$. On a alors une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties deux à deux disjointes de X . On a alors

$$\mu \left(\bigsqcup_{n=0}^N A_n \right) = \mu \left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^N \mu(A_n).$$

(ii) On a $\mu(B \setminus A) \geq 0$ donc

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

(iii) On note $\tilde{A}_0 = A_0$ puis, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tilde{A}_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} \tilde{A}_j \right) \subset A_n.$$

Les \tilde{A}_n , $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjointes et on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n.$$

On a alors

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

(iv) On note $B_0 = A_0$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Les B_n , $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints. En outre pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A_n = \bigsqcup_{k=0}^n B_k \quad \text{et} \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_k.$$

On a alors

$$\mu(A_n) = \sum_{k=0}^n \mu(B_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

(v) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $B_n = A_0 \setminus A_n$. Comme $A_n \subset A_0$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_0).$$

Comme tous les termes de cette égalité sont finis, on peut en fait écrire

$$\mu(A_n) = \mu(A_0) - \mu(B_n).$$

De même on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A_0 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right),$$

et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

Comme la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante on a

$$\mu(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right),$$

ce qui donne

$$\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

□

Remarque 4.9. L'hypothèse $\mu(A_0)$ est importante dans la dernière propriété. En effet, considérons l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage et, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mu(A_n) = +\infty$, alors que

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Théorème 4.10. *Il n'existe pas de mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ invariante par translation et telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ on a*

$$\lambda([a, b]) = b - a.$$

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'une telle mesure λ existe sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. On considère sur $[0, 1]$ la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

On considère une partie A de $[0, 1]$ qui contient un élément de chaque classe d'équivalence (on utilise ici l'axiome du choix). Pour $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ distincts on a alors $A + q_1 \cap A + q_2 = \emptyset$. En outre, par invariance par translation on a $\lambda^*(A + q) = \lambda^*(A)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. On note

$$B = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]} A + q$$

Comme B est union dénombrable des $A + q$ pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]$, qui sont deux à deux disjoints, on peut écrire

$$\lambda(B) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]} \lambda(A + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]} \lambda(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda^*(A) = 0, \\ +\infty & \text{si } \lambda^*(A) > 0. \end{cases}$$

Comme $B \subset [0, 3]$ on a $\lambda(B) \leq \lambda([0, 3]) \leq 3$. Soit maintenant $x \in [1, 2]$. Comme $x - 1 \in [0, 1]$ il existe $a \in A$ et $q \in \mathbb{Q}$ tels que $x - 1 = a + q$, soit $x = a + (q + 1)$. On a nécessairement $(q + 1) \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]$, et donc $x \in B$. Ainsi $[1, 2] \subset B$, donc $\lambda(B) \geq \lambda([1, 2]) \geq 1$. Cela donne une contradiction. \square

Remarque 4.11. On peut prouver le même résultat sans l'hypothèse d'invariance par translation (voir par exemple l'exercice 2.29 de [Gallouet-Herbin]).

4.2 Tribus, espaces mesurables

4.2.1 Définition et propriétés générales

On a vu qu'on ne pourrait pas définir la mesure de Lebesgue qui nous intéresse sur toutes les parties de \mathbb{R} . D'autre part, on souhaite faire une théorie abstraite de la mesure, qui pourra s'adapter à différents types de problèmes. Comme on demandera à une mesure de vérifier un certain nombre de propriétés minimales, l'ensemble de définition d'une telle mesure (qui est une partie de l'ensemble des parties de l'espace considéré) doit lui même vérifier un certain nombre de propriétés minimales. Une mesure sur un espace X sera défini sur ce que l'on appelle une tribu de X .

Définition 4.12. Soit X un ensemble. On appelle **tribu** ou **σ -algèbre** sur X une famille \mathcal{M} de parties de X ($\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, ou encore $\mathcal{M} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$) vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) $X \in \mathcal{M}$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{M}$ alors $X \setminus A \in \mathcal{M}$.
- (iii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{M} alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.$$

Les éléments de \mathcal{M} sont appelés **parties mesurables** de X . On dit alors que (X, \mathcal{M}) est un **espace mesurable**.

Exemples 4.13. Soit X un ensemble.

- $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ est la plus grande tribu sur X . C'est le choix par défaut lorsque c'est possible.
- $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ est la plus petite tribu sur X (elle n'a donc pas tellement d'intérêt).

Proposition 4.14. Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesurable.

- (i) On a $\emptyset \in \mathcal{M}$.

(ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{M} alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.$$

(iii) \mathcal{M} est stable par unions finies et par intersections finies.

(iv) Soient $A, B \in \mathcal{M}$. Alors on a $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

Démonstration. La deuxième propriété résulte du fait que

$$X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus A_n).$$

Puisque les $A_n, n \in \mathbb{N}$, sont dans \mathcal{M} , et que \mathcal{M} est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable, on obtient que $X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ sont dans \mathcal{M} . Pour la dernière propriété on rappelle que $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$. \square

4.2.2 Tribu engendrée par une famille de parties de X

Soit X un ensemble.

Lemme 4.15. Soit $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de tribus sur X (indexée par un ensemble Λ quelconque). Alors l'intersection

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$$

est une tribu sur X .

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a $X \in \mathcal{M}_\lambda$, donc $X \in \mathcal{M}$. Soit $A \in \mathcal{M}$. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a $X \setminus A \in \mathcal{M}_\lambda$, d'où $X \setminus A \in \mathcal{M}$. Enfin on considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{M} . Pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \in \mathcal{M}_\lambda,$$

d'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}_\lambda$. Cela prouve que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. Ces trois propriétés assurent que \mathcal{M} est une tribu de X . \square

Définition 4.16. Soit F une famille de parties de X . On appelle **tribu engendrée par F** et on note $\sigma(F)$ l'intersection de toutes les tribus de X contenant F .

Proposition 4.17. Soit F une famille de parties de X .

(i) $\sigma(F)$ est une tribu sur X .

(ii) On a $F \subset \sigma(F)$.

(iii) Si \mathcal{M} est une tribu sur X contenant F , alors $\sigma(F) \subset \mathcal{M}$.

(iv) Si F est une tribu, alors $\sigma(F) = F$.

(v) Si F et G sont deux familles de parties de X telles que $F \subset G$, alors $\sigma(F) \subset \sigma(G)$.

Les trois premières propriétés peuvent être résumées en disant que $\sigma(F)$ est la plus petite tribu sur X contenant F .

Démonstration. $\sigma(F)$ est une intersection de tribus, c'est donc une tribu d'après le Lemme 4.15. Chacune de ces tribus contenant F , c'est aussi le cas de $\sigma(F)$. Et par construction, $\sigma(F)$ est incluse dans toute tribu contenant F . En particulier, si F est une tribu, on a $\sigma(F) \subset F$ et donc $\sigma(F) = F$. Enfin, si $G \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ contient F , alors $\sigma(G)$ est une tribu contenant G et donc F , d'où $\sigma(F) \subset \sigma(G)$. \square

Exemples 4.18. Soit X un ensemble.

— On a $\sigma(\emptyset) = \{\emptyset, X\}$ et $\sigma(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X)$.

— Si A est une partie de X alors $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$.

4.2.3 Tribu borélienne

On rappelle que si X est un ensemble et \mathcal{T} est une famille de parties de X , on dit que \mathcal{T} est une topologie sur X si \emptyset et X appartiennent à \mathcal{T} , et si \mathcal{T} est stable par unions quelconques et par intersections finies. Dans ce cas, on dit que (X, \mathcal{T}) est un espace topologique et les éléments de \mathcal{T} sont appelés ouverts de X .

On note que les définitions de tribu et de topologie se ressemblent mais donnent des résultats très différents. Par exemple, en général l'ensemble des ouverts n'est pas du tout stable par passage au complémentaire.

Néanmoins, la tribu que l'on utilisera le plus fréquemment sur \mathbb{R}^d est liée à sa topologie de la façon suivante :

Définition 4.19. Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. On appelle **tribu borélienne** de X la tribu $\sigma(\mathcal{T})$ engendrée par les ouverts de X .

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de \mathbb{R} munie de sa topologie usuelle. On définit de la même façon $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque cela ne sera pas précisé, la tribu considérée sur les ensembles \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{R}^d avec $d \geq 1$ sera implicitement la tribu borélienne.

Lemme 4.20. *Tout ouvert de \mathbb{R} est union dénombrable d'intervalles ouverts.*

Démonstration. Soit O un ouvert de \mathbb{R} . On note

$$\mathcal{I} = \left\{ (q, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N}^* \mid \left] q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right[\subset O \right\}$$

et

$$\tilde{O} = \bigcup_{(q,n) \in \mathcal{I}} \left] q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right[.$$

O est union dénombrable d'intervalles ouverts, et par définition on a $\tilde{O} \subset O$. Soit $x \in O$. Comme O est ouvert il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left] x - \frac{2}{n}, x + \frac{2}{n} \right[\subset O.$$

Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} on peut considérer

$$q \in \mathbb{Q} \cap \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[.$$

On a alors $(q, n) \in \mathcal{I}$ et

$$x \in \left] q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right[\subset \tilde{O}.$$

Cela prouve que $O \subset \tilde{O}$ et donc $O = \tilde{O}$. D'où le résultat. \square

Proposition 4.21. *La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On note \mathcal{M} la tribu de \mathbb{R} engendrée par les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On a $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\left] b, +\infty[= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left] b - \frac{1}{n}, +\infty \right[\in \mathcal{M},$$

puis, par passage au complémentaire,

$$]-\infty, b[= \mathbb{R} \setminus [b, +\infty[\in \mathcal{M}.$$

Soit maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Alors on a

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[\in \mathcal{M}.$$

Finalement, puisque tout ouvert de \mathbb{R} est union dénombrable d'ouverts de la forme $]-\infty, b[$, $]a, b[$ ou $]a, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on en déduit que tout ouvert de \mathbb{R} est dans \mathcal{M} , et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$. D'où le résultat. \square

4.3 Mesure sur un espace mesurable quelconque

4.3.1 Définitions, exemples, propriétés générales

Définition 4.22. Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesurable. On appelle **mesure (positive)** sur (X, \mathcal{M}) une application $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{M} deux à deux disjoints alors on a

$$\mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit alors que (X, \mathcal{M}, μ) est un **espace mesuré**.

Proposition 4.23. Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesurable.

- (i) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $A_0, \dots, A_N \in \mathcal{M}$ des parties deux à deux disjointes de X . Alors on a

$$\mu \left(\bigsqcup_{n=0}^N A_n \right) = \sum_{n=0}^N \mu(A_n).$$

- (ii) Si A et B sont des parties mesurables de X telles que $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (iii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables de X alors

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- (iv) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables de X croissante pour l'inclusion (c'est-à-dire telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

- (v) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables de X décroissante pour l'inclusion (c'est-à-dire telle que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et si $\mu(A_0) < \infty$, alors

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Démonstration. On reprend la démonstration de la proposition 4.8 en remplaçant $\mathcal{P}(X)$ par \mathcal{M} et en vérifiant bien que toutes les parties de X que l'on considère sont bien mesurables. \square

Définition 4.24. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré.

- On dit que la mesure μ est finie si $\mu(X) < \infty$.
- On dit que μ est une mesure de probabilité si $\mu(X) = 1$.
- On dit que la mesure μ est σ -finie s'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties mesurables telles que $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Définition 4.25. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré. Soit $\mathcal{P}(x)$ une propriété dépendant de $x \in X$. On dit que \mathcal{P} est vraie pour (μ) -presque tout $x \in X$ (ou vraie μ -presque partout) s'il existe $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$ et $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X \setminus E$.

4.3.2 Lemme d'unicité des mesures

Définition 4.26. Une famille \mathcal{C} de parties de X est appelée **classe monotone** si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $X \in \mathcal{C}$,
- (ii) si $A, B \in \mathcal{C}$ sont tels que $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{C}$,
- (iii) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{C} telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}.$$

Proposition 4.27. (i) Une tribu est une classe monotone.

(ii) Une classe monotone stable par union finies (ou stable par intersections finies) est une tribu.

Démonstration. On montre le deuxième point. Étant données deux parties A et B de X on a

$$A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)),$$

donc une classe monotone stable par intersections finies est également stable par unions finies. Soit alors \mathcal{C} une classe monotone stable par unions finies. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{C} . Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\tilde{A}_n = \bigcup_{j=1}^n A_j.$$

Alors $\tilde{A}_n \in \mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(\tilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \in \mathcal{C}.$$

Les autres propriétés étant claires, cela prouve que \mathcal{C} est une tribu sur X . □

Proposition-Définition 4.28. Soit F une famille de parties de X . Alors l'intersection de toutes les classes monotones contenant F est une classe monotone, appelée **classe monotone engendrée par F** .

Lemme 4.29 (Lemme des classes monotones). Soit F une famille de parties de X stable par intersection finie. Alors la classe monotone engendrée par F est la tribu $\sigma(F)$.

Démonstration. On note \mathcal{C} la classe monotone engendrée par \mathcal{F} . Puisque $\sigma(\mathcal{F})$ est une classe monotone contenant \mathcal{F} on a $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{F})$. Montrons que \mathcal{C} est stable par intersection finie. Cela prouvera que \mathcal{C} est une tribu, et comme \mathcal{C} contient \mathcal{F} , on en déduira que $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}$.

Soit $A \in \mathcal{F}$. On note

$$\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{C} \mid A \cap B \in \mathcal{C}\}.$$

Par hypothèse, \mathcal{C}_A contient \mathcal{F} . On vérifie en outre que \mathcal{C}_A est une classe monotone. On a $X \in \mathcal{C}_A$ car $X \cap A = A \in \mathcal{C}$. Si B_1 et B_2 sont dans \mathcal{C}_A avec $B_1 \subset B_2$ alors on a $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{C}$ et

$$(B_2 \setminus B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A) \in \mathcal{C},$$

d'où $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{C}_A$. Enfin si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de \mathcal{C}_A on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{C}$ et

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cap A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap A) \in \mathcal{C},$$

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{C}_A$. Cela prouve que \mathcal{C}_A est une classe monotone contenant \mathcal{F} et incluse dans \mathcal{C} , donc $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}$. Soient maintenant $B \in \mathcal{C}$ et \mathcal{C}_B défini comme précédemment. D'après ce qui précède, on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_B$. On vérifie de la même manière que \mathcal{C}_B est une classe monotone, et donc $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}$. Ainsi, pour tous $A, B \in \mathcal{C}$ on a $A \cap B \in \mathcal{C}$. Cela prouve que \mathcal{C} est une tribu et conclut la démonstration. \square

Proposition 4.30 (Unicité des mesures). *Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesuré muni de deux mesures μ et ν . On suppose qu'il existe une famille \mathcal{F} de parties mesurables telles que \mathcal{F} est stable par intersection finie, $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{M}$ et*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mu(A) = \nu(A).$$

En outre, on suppose que \mathcal{F} contient en particulier une famille $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $E_n \subset E_{n+1}$, $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = X$. Alors

$$\mu = \nu.$$

Démonstration. • On suppose que $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ (dans ce cas on peut considérer que $E_n = X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour la dernière hypothèse). On note

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}, \mu(A) = \nu(A)\}.$$

Par hypothèse on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$. Montrons que \mathcal{C} est une classe monotone. Par hypothèse on a $X \in \mathcal{C}$. Soient $A, B \in \mathcal{C}$ tels que $B \subset A$. On a alors

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B),$$

donc $A \setminus B \in \mathcal{C}$. Enfin si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ est croissante on a

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \nu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right),$$

d'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$. Ainsi \mathcal{C} est bien une classe monotone. Puisque \mathcal{F} est stable par intersection finie, on obtient que

$$\mathcal{C} \supset \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{M} \supset \mathcal{C}.$$

D'où $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$.

- On suppose maintenant (ii). Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $A \in \mathcal{M}$ on note

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) \quad \text{et} \quad \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n).$$

Comme $X \cap E_n = E_n \in \mathcal{F}$, on peut appliquer le cas précédent aux mesures μ_n et ν_n . Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{M}, \quad \mu_n(A) = \nu_n(A).$$

Soit $A \in \mathcal{M}$. Puisque la suite $(A \cap E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap E_n) = A$ on obtient alors

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A) = \nu(A).$$

D'où le résultat. □

4.3.3 Complétion des mesures

Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré.

Définition 4.31. On dit que $A \subset X$ est un **ensemble négligeable** s'il existe $B \in \mathcal{M}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Définition 4.32. On dit d'une mesure qu'elle est **complète** si tous les ensembles négligeables sont mesurables.

Proposition 4.33. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré. On note $\mathcal{M}^*(\mu)$ l'ensemble des parties E de X telles qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}$ vérifiant $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$. Pour un tel E on note $\mu^*(E) = \mu(A)$. Alors $\mathcal{M}^*(\mu)$ est une tribu sur X et μ^* est une mesure complète sur $(X, \mathcal{M}^*(\mu))$ qui prolonge μ (cela signifie que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*(\mu)$ et $\mu^*(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$).

Démonstration. • Montrons que μ^* est bien définie sur $\mathcal{M}^*(\mu)$. On suppose que $E \in \mathcal{P}(X)$ et $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathcal{M}$ sont tels que

$$\begin{cases} A_1 \subset E \subset B_1, \\ \mu(B_1 \setminus A_1) = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A_2 \subset E \subset B_2, \\ \mu(B_2 \setminus A_2) = 0. \end{cases}$$

On a $A_1 \subset E \subset B_2$, donc $\mu(A_1) \leq \mu(B_2) = \mu(A_2)$. De même on a $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$, et donc $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

- On note que si $E \in \mathcal{M}$ on a $E \subset E \subset E$ et $\mu(E \setminus E) = 0$, donc $E \in \mathcal{M}^*(\mu)$ et $\mu^*(E) = \mu(E)$.
- Montrons que $\mathcal{M}^*(\mu)$ est une tribu sur X . Comme $X \in \mathcal{M}$, on a bien $X \in \mathcal{M}^*(\mu)$. Soit $E \in \mathcal{M}^*(\mu)$. Soient $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$. Alors on a

$$X \setminus B \subset X \setminus E \subset X \setminus A$$

et

$$\mu((X \setminus A) \setminus (X \setminus A)) = \mu(B \setminus A) = 0.$$

D'où $X \setminus E \in \mathcal{M}^*(\mu)$. On considère maintenant $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^*(\mu)^{\mathbb{N}}$ puis $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \subset E_n \subset B_n \quad \text{et} \quad \mu(B_n \setminus A_n) = 0.$$

Alors on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

et

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \setminus A_n) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n \setminus A_n) = 0.$$

Puisque $\bigcup A_n$ et $\bigcup B_n$ sont dans \mathcal{M} , cela prouve que $\bigcup E_n$ est dans $\mathcal{M}(\mu^*)$ et

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right). \quad (*)$$

Finalement, $\mathcal{M}^*(\mu)$ est bien une tribu sur X .

- Il reste à montrer que μ^* est une mesure. Comme $\emptyset \in \mathcal{M}$, on a $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Soit maintenant $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}^*(\mu)$ deux à deux disjoints. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $A_n, B_n \in \mathcal{M}$ tels que $A_n \subset E_n \subset B_n$ et $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$. En particulier, les A_n , $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints. D'après (*) on a

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Ainsi μ^* est bien une mesure.

- Enfin, la mesure μ^* est complète. En effet, supposons que $E \subset X$ et $\tilde{E} \in \mathcal{M}^*(\mu)$ sont tels que $E \subset \tilde{E}$ et $\mu^*(\tilde{E}) = 0$. Il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \subset \tilde{E} \subset B$, $\mu(B \setminus A) = 0$ et $\mu(A) = \mu^*(\tilde{E}) = 0$. Alors on a $\emptyset \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus \emptyset) = \mu(B) = \mu(A) = 0$. D'où $E \in \mathcal{M}^*(\mu)$ (et $\mu^*(E) = \mu(\emptyset) = 0$). \square

4.4 Mesure de Lebesgue

On construit dans ce paragraphe la mesure de Lebesgue. Le but est d'obtenir une mesure correspondant au volume usuel (on parlera de longueur en dimension 1 et d'aire en dimension 2). On a vu qu'il n'est pas possible d'avoir une telle mesure bien définie sur tout $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. On cherche tout de même à construire une mesure définie sur une famille de partie de \mathbb{R}^d suffisamment large pour ne pas être gêné en pratique.

Le cahier des charges pour la mesure de Lebesgue est donc de définir une application qui vérifie les axiomes d'une mesure et qui coïncide avec le volume usuel sur les ensembles de référence que sont les pavés (voir la Définition 4.34). Par rapport à la mesure de Jordan, on demande qu'une union dénombrable de parties mesurables soit encore mesurable (autrement dit, la mesure de Jordan n'est pas une mesure au sens où on l'a définie car l'ensemble des parties Jordan-mesurables n'est pas une tribu).

On attend également de la mesure de Lebesgue qu'elle soit invariante par translation et par les isométries de l'espace (rotations, symétries). Ces dernières propriétés n'ont pas à être prises comme axiomes et seront conséquences des conditions déjà imposées (via le théorème de changement de variables). L'invariance par translation peut également être vue comme conséquence du théorème de changement de variables mais sera utilisée pour la démonstration et doit donc être démontrée auparavant. Ce sera en fait une simple conséquence du fait que c'est bien le cas pour les pavés (voir la Proposition 4.43).

La définition de la mesure suit la même logique que la définition de la mesure de Jordan. On commence par définir une mesure extérieure qui correspond à l'infimum des mesures d'ensembles simples (unions de pavés), pour lesquels la notion de mesure est naturelle. La différence est qu'on autorise des unions dénombrables, alors qu'on ne considère que des unions finies pour la mesure de Jordan.

4.4.1 Mesure des ensembles élémentaires

Définition 4.34. (i) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Si I est l'un des intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b[$ on définit la *longueur* de I comme étant le réel positif

$$|I| = b - a.$$

(ii) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Un *pavé* de \mathbb{R}^d est une partie de \mathbb{R}^d de la forme

$$P = I_1 \times \cdots \times I_d,$$

où I_1, \dots, I_d sont des intervalles bornés de \mathbb{R} . Le *volume* de P (on parle plutôt d'*aire* si $d = 2$) est alors

$$|P| = |I_1| \times \cdots \times |I_d|.$$

Définition 4.35. On dit qu'une partie de \mathbb{R}^d est un *ensemble élémentaire* si elle s'écrit comme union finie de pavés de \mathbb{R}^d .

Proposition 4.36. (i) Une union finie d'ensembles élémentaires est un ensemble élémentaire.

(ii) Une intersection finie d'ensembles élémentaires est un ensemble élémentaire.

(iii) Si E et F sont des ensembles élémentaires, alors $E \setminus F$ et $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ sont des ensembles élémentaires.

(iv) Soient E un ensemble élémentaire et $x \in \mathbb{R}^d$. Le *translaté* $E + x = \{y + x, y \in E\}$ est un ensemble élémentaire.

Démonstration. • Le premier point résulte simplement du fait qu'une union finie d'unions finies de pavés est une union finie de pavés.

• Soient maintenant E et F deux ensembles élémentaires de \mathbb{R}^d . Soient P_1, \dots, P_n et $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m$ des pavés de \mathbb{R}^d (avec $n, m \in \mathbb{N}$) tels que

$$E = P_1 \cup \cdots \cup P_n \quad \text{et} \quad F = \tilde{P}_1 \cup \cdots \cup \tilde{P}_m.$$

On a

$$E \cap F = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (P_i \cap \tilde{P}_j).$$

Comme l'intersection de deux pavés est encore un pavé, on en déduit que $E \cap F$ est un ensemble élémentaire de \mathbb{R}^d . Par récurrence, on obtient que toute intersection finie d'ensembles élémentaires est un ensemble élémentaire.

• Soit $P = I_1 \times \cdots \times I_d$ et $\tilde{P} = \tilde{I}_1 \times \cdots \times \tilde{I}_d$ deux pavés de \mathbb{R}^d . Alors on a

$$P \setminus \tilde{P} = \bigcup_{k=1}^d \left(I_1 \times \cdots \times I_{k-1} \times (I_k \setminus \tilde{I}_k) \times I_{k+1} \times \cdots \times I_d \right).$$

Comme $I_k \setminus \tilde{I}_k$ est l'union d'au plus deux intervalles bornés de \mathbb{R} , on obtient que $P \setminus \tilde{P}$ est un ensemble élémentaire de \mathbb{R}^d . Avec les notations précédentes on a

$$E \setminus \tilde{P}_1 = \bigcup_{i=1}^n (P_i \setminus \tilde{P}_1),$$

donc la soustraction d'un pavé à un ensemble élémentaire est un ensemble élémentaire. Par récurrence, on obtient que

$$E \setminus F = (\dots ((E \setminus \tilde{P}_1) \setminus \tilde{P}_2) \dots) \setminus \tilde{P}_m$$

est bien un ensemble élémentaire.

- Avec les propriétés démontrées il devient clair que $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ est également un ensemble élémentaire.
- Finalement, pour $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$E + x = \bigcup_{i=1}^n (P_i + x),$$

donc l'ensemble des ensembles élémentaires est invariant par translation. □

Proposition 4.37. *Soit E un ensemble élémentaire. Alors il existe des pavés P_1, \dots, P_m deux à deux disjoints tels que*

$$E = \bigsqcup_{k=1}^m P_k.$$

Démonstration. On considère le cas $E \neq \emptyset$. Soient P_1, \dots, P_n des pavés de \mathbb{R}^d (avec $n \in \mathbb{N}^*$) tels que $E = \bigcup_{i=1}^n P_i$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note $P_i = I_{i,1} \times \dots \times I_{i,d}$. Soit $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$. On note $(a_{0,k}, \dots, a_{\nu_k,k})$ la famille croissante des extrémités des intervalles $I_{1,k}, \dots, I_{n,k}$ (avec $\nu_k \in \mathbb{N}$). On note alors \mathcal{J}_k l'ensemble des intervalles de la forme $\{a_j\}$ avec $j \in \llbracket 0, \nu_k \rrbracket$ ou $]a_{j-1}, a_j[$ avec $j \in \llbracket 1, \nu_k \rrbracket$. On note ensuite \mathcal{P} l'ensemble (fini) des pavés de la forme $J_1 \times \dots \times J_k$ avec $J_k \in \mathcal{J}_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Pour $P \in \mathcal{P}$ on a soit $E \cap P = \emptyset$, soit $E \cap P = P$. Si on note \mathcal{P}_0 l'ensemble des $P \in \mathcal{P}$ dont l'intersection avec E n'est pas vide, on a alors

$$E = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}_0} P.$$

□

Proposition-Définition 4.38. Soit E un ensemble élémentaire. On définit la mesure $m(E)$ de E par l'une des deux définitions équivalentes suivantes :

- (i) Si $E = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_n$ où $n \in \mathbb{N}$ et les P_i , $1 \leq i \leq n$, sont des pavés deux à deux disjoints de \mathbb{R}^d , alors on pose

$$m(E) := \sum_{i=1}^n |P_i|.$$

- (ii) On note

$$m(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d} \text{Card} \left(E \cap \frac{\mathbb{Z}^d}{n} \right).$$

Démonstration. On commence par observer que si I est un intervalle borné de \mathbb{R} on a

$$\frac{1}{n} \left(\text{Card} \left(I \cap \frac{\mathbb{Z}}{n} \right) - 1 \right) \leq |I| \leq \frac{1}{n} \left(\text{Card} \left(I \cap \frac{\mathbb{Z}}{n} \right) + 1 \right)$$

et donc

$$\frac{1}{n} \text{Card} \left(I \cap \frac{\mathbb{Z}}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |I|.$$

Pour un pavé de \mathbb{R}^d on a de la même façon

$$\frac{1}{n^d} \text{Card} \left(P \cap \frac{\mathbb{Z}^d}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |P|.$$

Si $E = P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_m$ comme dans l'énoncé on a alors

$$\frac{1}{n^d} \text{Card} \left(E \cap \frac{\mathbb{Z}^d}{n} \right) = \frac{1}{n^d} \sum_{i=1}^m \text{Card} \left(P_i \cap \frac{\mathbb{Z}^d}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m |P_i|.$$

Cela prouve que la limite de la deuxième définition existe et est égale à la somme de la première définition. Cela prouve en particulier que cette somme ne dépend pas du choix d'une décomposition de E comme union finie de pavés deux à deux disjoints. \square

Proposition 4.39. (i) On a $m(\emptyset) = 0$.

(ii) Si P est un pavé alors $m(P) = |P|$.

(iii) (positivité) La mesure de toute ensemble élémentaire est positive ou nulle.

(iv) (invariance par translation) Si E est un ensemble élémentaire et $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$m(E + x) = m(E).$$

(v) (additivité finie) Si E et F sont élémentaires et disjoints alors

$$m(E \sqcup F) = m(E) + m(F).$$

Plus généralement pour $k \in \mathbb{N}^*$ et E_1, \dots, E_k des ensembles élémentaires deux à deux disjoints on a

$$m(E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_k) = m(E_1) + \cdots + m(E_k).$$

(vi) (monotonie) Si E et F sont deux ensembles élémentaires tels que $E \subset F$ alors on a $m(E) \leq m(F)$.

(vii) (sous-additivité finie) Si E et F sont élémentaires alors on a

$$m(E \cup F) \leq m(E) + m(F).$$

Plus généralement, si E_1, \dots, E_k pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont des ensembles élémentaires alors on a

$$m(E_1 \cup \cdots \cup E_k) \leq m(E_1) + \cdots + m(E_k).$$

Démonstration. Les trois premières propriétés sont claires. Si $E = P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_m$ où $m \in \mathbb{N}$ et les P_j , $1 \leq j \leq m$, sont deux à deux disjoints, alors on a

$$E + x = \bigsqcup_{j=1}^m (P_j + x),$$

donc

$$m(E + x) = \sum_{j=1}^m |P_j + x| = \sum_{j=1}^m |P_j| = m(E).$$

Pour l'additivité on utilise directement l'une ou l'autre des deux définitions de m . Pour la monotonie on écrit $F = E \sqcup (F \setminus E)$. Par positivité on a alors

$$m(F) = m(E) + m(F \setminus E) \geq m(E).$$

Enfin, pour la dernière propriété on a $E \cup F = E \sqcup (F \setminus E)$ et $F \setminus E \subset F$ donc

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F \setminus E) \leq m(E) + m(F).$$

\square

4.4.2 Mesure extérieure de Lebesgue

On commence par définir la mesure extérieure à partir des unions dénombrables de pavés. Cette application est bien définie pour toute partie de \mathbb{R}^d .

Définition 4.40. Soit A une partie de \mathbb{R}^d . On note \mathcal{P}_A l'ensemble des suites $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavés de \mathbb{R}^d telles que

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} P_k,$$

puis on pose

$$\lambda^*(A) = \inf_{(P_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A} \sum_{k=0}^{+\infty} |P_k|.$$

Cela définit une application $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$ appelée *mesure extérieure de Lebesgue*.

Remarque 4.41. On observe que dans la Définition 4.40 on peut se restreindre aux suites de pavés ouverts ou aux suites de pavés fermés. Pour les pavés fermés, il suffit de remarquer que si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite dans \mathcal{P}_A alors c'est encore le cas pour $(\overline{P_k})_{k \in \mathbb{N}}$, et $|\overline{P_k}| = |P_k|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, étant donné $\varepsilon > 0$ et $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A$ telle que $\sum_{k \in \mathbb{N}} |P_k| \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ un pavé ouvert \tilde{P}_k tel que $P_k \subset \tilde{P}_k$ et $|\tilde{P}_k| \leq |P_k| + \varepsilon 2^{-n}$. Ainsi la suite $(\tilde{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dans \mathcal{P}_A et

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\tilde{P}_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |P_k| + 2\varepsilon \leq \lambda^*(A) + 3\varepsilon,$$

ce qui montre que l'infimum de la définition ne change pas si on se restreint aux suites de pavés ouverts.

Première chose à faire pour s'assurer que la Définition 4.40 mérite d'être considérée, vérifier qu'elle donne bien ce qu'on attend pour les pavés.

Proposition 4.42. Si P est un pavé de \mathbb{R}^d on a $\lambda^*(P) = |P|$.

Démonstration. En considérant la suite $(P, \emptyset, \emptyset, \dots)$, on a par définition $\lambda^*(P) \leq |P|$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavés ouverts telle que $P \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$ et

$$\lambda^*(P) \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} |P_k| - \varepsilon.$$

Il existe un pavé fermé \tilde{P} de \mathbb{R}^d tel que $\tilde{P} \subset P$ et $|\tilde{P}| \geq |P| - \varepsilon$. On a alors $\tilde{P} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$. Comme \tilde{P} est compact, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on a en fait

$$\tilde{P} \subset \bigcup_{k=0}^N P_k.$$

D'après les propriétés des ensembles élémentaires on a

$$|\tilde{P}| \leq m \left(\bigcup_{k=0}^N P_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |P_k|.$$

D'où, finalement,

$$|P| \leq |\tilde{P}| + \varepsilon \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |P_k| + \varepsilon \leq \lambda^*(P) + 2\varepsilon.$$

Cela prouve que $|P| \leq \lambda^*(P)$. On a donc égalité. \square

On montre maintenant les principales propriétés de λ^* :

Proposition 4.43. (i) (monotonie) Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ tels que $A \subset B$. On a $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

(ii) (invariance par translation) Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors on a $\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$.

(iii) (sous-additivité dénombrable) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$. On a

$$\lambda^* \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^*(A_n).$$

Démonstration. • Comme $A \subset B$, tout recouvrement de B par une suite de pavés est aussi un recouvrement de A . Ainsi on a $\mathcal{P}_B \subset \mathcal{P}_A$ et donc

$$\lambda^*(A) = \inf_{(P_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A} \sum_{k=0}^{+\infty} |P_k| \leq \inf_{(P_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_B} \sum_{k=0}^{+\infty} |P_k| = \lambda^*(B).$$

• On rappelle qu'on a invariance par translation pour le volume des pavés (si P est un pavé de \mathbb{R}^d et $x \in \mathbb{R}^d$ alors $|P + x| = |P|$). Or pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ quelconque, la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de A par des pavés si et seulement si $(P_k + x)_{k \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de $A + x$ par des pavés. Ainsi, par passage à l'infimum sur la somme des volumes de ces pavés, on obtient bien l'invariance par translation de λ^* .

• On note $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $(P_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_{A_n}$ telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |P_{n,k}| \leq \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_{n,k} \subset \bigcup_{(m,k) \in \mathbb{N}^2} P_{m,k},$$

donc

$$A \subset \bigcup_{(m,k) \in \mathbb{N}^2} P_{m,k}.$$

Comme \mathbb{N}^2 est dénombrable, on peut considérer une bijection φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N}^2 . Pour $j \in \mathbb{N}$ on note $Q_j = P_{\varphi(j)}$. On a alors

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j,$$

donc

$$(Q_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A.$$

On a donc

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |Q_j| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |P_{n,k}| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \leq 2\varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(A_n).$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient bien

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(A_n). \quad \square$$

Exemple 4.44. On considère

$$T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y \leq x\}. \quad (4.1)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$T \subset \bigcup_{j=1}^n \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right] \times \left[0, \frac{j}{n} \right]$$

donc

$$\lambda^*(T) \leq \sum_{j=1}^n \frac{j}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\lambda^*(T) \leq \frac{1}{2}.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$T \supset \bigcup_{j=1}^n \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right] \times \left[0, \frac{j-1}{n} \right]$$

donc, par monotonie,

$$\lambda^*(T) \geq \sum_{j=1}^n \frac{j}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\lambda^*(T) \geq \frac{1}{2}.$$

Cela prouve que $\lambda^*(T) = \frac{1}{2}$.

Exemple 4.45. Comme \mathbb{Q} est dénombrable (et donc union dénombrable d'intervalles de longueurs nulles), on a $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Proposition 4.46. *L'application λ^* ne définit pas une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.*

Démonstration. On considère le cas $d = 1$. On a vu qu'il n'existe pas de mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ invariante par translation et telle que la mesure de l'intervalle $]a, b[$ est $b - a$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Or λ^* vérifie ces deux dernières propriétés, donc ce n'est pas une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Pour le cas général, on observe que si λ^* était une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$ alors l'application $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \lambda^*(A \times [0, 1]^{d-1})$ serait une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, ce qui est impossible. \square

4.4.3 Tribu de Lebesgue

Le phénomène mis en évidence à la Proposition 4.46 est que la mesure extérieure d'une union d'ensembles deux à deux disjoints n'est pas nécessairement égale à la somme des mesures extérieures des ensembles en question.

Le problème est déjà présent pour la mesure extérieure de Jordan (pour laquelle on ne considère que des recouvrements finis par des pavés). Par exemple, les mesures extérieures de Jordan des ensembles $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ sont toutes les deux égales à 1, alors que l'union $[0, 1]$ est elle-même de mesure 1. La raison est que si on voit l'intervalle $[0, 1]$ comme union finie d'intervalles (de longueurs non nulles), alors tous ces intervalles rencontrent à la fois \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ainsi, si on utilise ces sous-intervalles pour obtenir un recouvrement de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et un recouvrement de $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$, tous

doivent être gardés dans les deux cas. En un certain sens, la frontière de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est trop « grande ».

En autorisant des unions dénombrables de pavés, on a assoupli le problème (d'ailleurs la mesure extérieure de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est maintenant nulle), mais il n'est pas complètement résolu. Ainsi, comme on a fait pour la mesure de Jordan, on ne va garder que les ensembles dont la frontière est suffisamment raisonnable pour pouvoir bien distinguer par des recouvrements dénombrables de pavés l'ensemble de son complémentaire.

Cela peut être formalisé de la façon suivante :

Définition 4.47. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des parties A de \mathbb{R}^d telles que

$$\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A).$$

Remarque 4.48. Puisqu'on a toujours

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A),$$

A est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A) \leq \lambda^*(B).$$

On commence par donner un exemple d'ensemble dont la frontière est particulièrement réduite et qui est donc bien dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exemple 4.49. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que l'intervalle $]a, +\infty[$ est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Soient $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_B$ telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \leq \lambda^*(B) + \varepsilon.$$

On a $(I_n \cap]a, +\infty[) \in \mathcal{P}_{B \cap]a, +\infty[}$ et $(I_n \cap]-\infty, a]) \in \mathcal{P}_{B \setminus]a, +\infty[}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|I_n \cap]a, +\infty[[+ |I_n \setminus]a, +\infty[[= |I_n|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda^*(B \cap]a, +\infty[) + \lambda^*(B \setminus]a, +\infty[) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n \cap]a, +\infty[[+ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n \setminus]a, +\infty[[\\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \\ &\leq \lambda^*(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\lambda^*(B \cap]a, +\infty[) + \lambda^*(B \setminus]a, +\infty[) \leq \lambda^*(B),$$

et donc que $]a, +\infty[\in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Dans l'exemple précédent, la raison pour laquelle tout fonctionne est que la famille $(I_n \cap]-\infty, a], I_n \cap]a, +\infty[)$ donne un recouvrement de B par une union dénombrable d'intervalles qui est bien adaptée au découpage $B = (B \cap]-\infty, a]) \sqcup (B \cap]a, +\infty[)$.

Autre cas où la frontière d'un ensemble est petite, quand l'ensemble lui-même est petit :

Exemple 4.50. Si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\lambda^*(A) = 0$ alors $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour $B \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\lambda^*(A \cap B) \leq \lambda^*(A) = 0,$$

et donc

$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B \setminus A) \leq \lambda^*(B).$$

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ de parties de \mathbb{R}^d est maintenant notre candidat pour définir la mesure de Lebesgue. On doit donc vérifier qu'il a bien la structure adéquate.

Proposition 4.51. *L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est une tribu de \mathbb{R}^d .*

Démonstration. • Pour $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lambda^*(B \cap \mathbb{R}^d) + \lambda^*(B \setminus \mathbb{R}^d) = \lambda^*(B) + \lambda^*(\emptyset) = \lambda^*(B),$$

donc $\mathbb{R}^d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

• Soit maintenant $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Pour $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lambda^*(B \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)) + \lambda^*(B \setminus (\mathbb{R}^d \setminus A)) = \lambda^*(B \setminus A) + \lambda^*(B \cap A) = \lambda^*(B).$$

Cela prouve que $\mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

• Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. On note $C = B \cap (A_1 \cup A_2)$, de sorte que $B \cap A_1 = C \cap A_1$ et $(B \setminus A_1) \cap A_2 = C \setminus A_1$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda^*(B) &= \lambda^*(B \cap A_1) + \lambda^*(B \setminus A_1) \\ &= \lambda^*(B \cap A_1) + \lambda^*((B \setminus A_1) \cap A_2) + \lambda^*((B \setminus A_1) \setminus A_2) \\ &= \lambda^*(C \cap A_1) + \lambda^*(C \setminus A_1) + \lambda^*(B \setminus (A_1 \cup A_2)) \\ &= \lambda^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \lambda^*(B \setminus (A_1 \cup A_2)). \end{aligned}$$

Cela prouve que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est stable par passage au complémentaire,

$$\mathbb{R}^d \setminus (A_1 \cap A_2) = (\mathbb{R}^d \setminus A_1) \cup (\mathbb{R}^d \setminus A_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d),$$

et donc $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Par récurrence, on obtient que toute union ou intersection finie d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

• Soit $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. On note $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $U_k = \bigcup_{j=0}^k A_j$. On a alors $U_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $U_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $U_k \subset A$ on a

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap U_k) + \lambda^*(B \setminus U_k) \geq \lambda^*(B \cap U_k) + \lambda^*(B \setminus A).$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\lambda^*(B \cap U_k) = \sum_{j=0}^k \lambda^*(B \cap A_j).$$

Pour $k = 0$ c'est clair puisque $U_0 = A_0$. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1$ ($k \geq 1$). Comme $U_{k-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\begin{aligned} \lambda^*(B \cap U_k) &= \lambda^*((B \cap U_k) \cap U_{k-1}) + \lambda^*((B \cap U_k) \setminus U_{k-1}) \\ &= \lambda^*(B \cap U_{k-1}) + \lambda^*(B \cap A_k) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^*(B \cap A_j) + \lambda^*(B \cap A_k) \\ &= \sum_{j=0}^k \lambda^*(B \cap A_j). \end{aligned}$$

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(B) \geq \sum_{j=0}^k \lambda^*(B \cap A_j) + \lambda^*(B \setminus A).$$

Par passage à la limite on obtient

$$\lambda^*(B) \geq \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^*(B \cap A_j) + \lambda^*(B \setminus A). \quad (*)$$

Puisque

$$\lambda^*(B \cap A) = \lambda^*\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j)\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(B \cap A_j),$$

cela donne

$$\lambda^*(B) \geq \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A)$$

et prouve que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

• On considère maintenant une suite quelconque $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. On note $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et on montre que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. On note $C_0 = A_0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C_k = A_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j.$$

Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est stable par union et intersection finie et par passage au complémentaire, on obtient que C_k appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En outre les C_k pour $k \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints et on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = A.$$

Ainsi A appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ comme union dénombrable d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ deux à deux disjoints. \square

Comme on souhaite que la mesure de Lebesgue soit invariante par translation, il faut que la tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ soit elle-même stable par translation.

Proposition 4.52. *Soient $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors on a $A + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Alors on a

$$(A + x) \cap B = (A \cap (B - x)) + x$$

et

$$(A + x) \setminus B = (A \setminus (B - x)) + x,$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda^*((A + x) \cap B) + \lambda^*((A + x) \setminus B) &= \lambda^*(A \cap (B - x)) + \lambda^*(A \setminus (B - x)) \\ &= \lambda^*(B - x) = \lambda^*(B). \end{aligned}$$

D'où $A + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. \square

On a déjà introduit sur \mathbb{R}^d une tribu naturellement donnée par la topologie usuelle, la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. A défaut de pouvoir définir la mesure de Lebesgue sur toutes les parties de \mathbb{R}^d , cette tribu était une candidate naturelle pour être le cadre de travail pour la suite. La question est donc de savoir si les boréliens ont ou non un bon comportement vis-à-vis du problème évoqué en début de paragraphe. La réponse a déjà été essentiellement donnée à l'Exemple 4.49.

Proposition 4.53. On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Pour le cas $d = 1$, on a déjà montré à l'Exemple 4.49 que tous les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Puisque ces intervalles engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on obtient que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$. On peut procéder de la même façon en dimension quelconque, les demi-espaces de la forme $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j > a\}$ pour $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $a \in \mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, et l'ensemble de ces demi-espaces engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. \square

Remarque 4.54. L'inclusion de la Proposition 4.53 est stricte. On peut montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a la puissance du continu (il est en bijection avec \mathbb{R}) tandis que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

4.4.4 Mesure de Lebesgue

On a vu que la mesure de Lebesgue que l'on cherche à construire ne pourra pas être définie pour toute partie de \mathbb{R}^d . On a alors défini une collection $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ de parties de \mathbb{R}^d supposées suffisamment « régulières » pour que la mesure d'une union disjointe soit bien la somme des mesures. Et en effet, si l'on concède cette restriction, alors la mesure extérieure définit bien la mesure tant attendue.

Proposition 4.55. La restriction de λ^* à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (et donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) est une mesure.

Démonstration. On a bien $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables deux à deux disjointes. On note $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. D'après (*) appliquée avec $B = A$ on obtient

$$\lambda^*(A) \geq \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^*(A_j).$$

Puisque l'inégalité inverse est toujours vraie d'après la Proposition 4.43, on obtient donc

$$\lambda^*(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^*(A_j),$$

ce qui prouve que λ^* est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$ et donc, par restriction, sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. \square

Définition 4.56. On appelle mesure de Lebesgue et on note λ (ou λ_d) la restriction de λ^* à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ou à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 4.57. Comme $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]^d$ et que $\lambda^*([-n, n]^d) = (2n)^d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient que la mesure de Lebesgue est σ -finie.

Proposition 4.58. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \inf \left\{ \lambda(O), O \text{ ouvert dans } \mathbb{R}^d \text{ contenant } A \right\} \\ &= \sup \left\{ \lambda(K), K \text{ compact de } \mathbb{R}^d \text{ contenu dans } A \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. • Si O est un ouvert contenant A on a $\lambda(A) \leq \lambda(O)$, donc

$$\lambda(A) \leq \inf \left\{ \lambda(O), O \text{ ouvert dans } \mathbb{R}^d \text{ contenant } A \right\}.$$

L'inégalité opposée est claire si $\lambda(A) = +\infty$. On suppose donc que $\lambda(A) < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A$ telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |P_k| \leq \lambda(A) + \varepsilon.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un pavé ouvert \tilde{P}_k tel que $|\tilde{P}_k| \leq |P_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. On note $O = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{P}_k$. Alors O est ouvert et puisque la suite $(\tilde{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dans \mathcal{P}_A on a

$$\lambda(O) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\tilde{P}_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |P_k| + \varepsilon \leq \lambda(A) + 2\varepsilon.$$

D'où

$$\inf \left\{ \lambda(O), O \text{ ouvert dans } \mathbb{R}^d \text{ contenant } A \right\} \leq \lambda(A).$$

• On a déjà

$$\lambda(A) \geq \sup \left\{ \lambda(K), K \text{ compact de } \mathbb{R}^d \text{ contenu dans } A \right\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P_n = [-n, n]^d$ et $A_n = A \cap P_n$. On a alors

$$\lambda(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda(A).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ouvert O_n contenant $P_n \setminus A_n$ et tel que

$$\lambda(O_n) \leq \lambda(P_n \setminus A_n) + \frac{1}{n}.$$

On note $K_n = P_n \setminus O_n$. K_n est un compact inclus dans A_n et $A_n \setminus K_n \subset O_n \setminus (P_n \setminus A_n)$, donc

$$\lambda(K_n) \geq \lambda(A_n) - \frac{1}{n}.$$

On a alors $K_n \subset A$ et

$$\lambda(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda(A).$$

□

L'enjeu essentiel de cette section est d'avoir construit une mesure qui étend la notion de volume sur \mathbb{R}^d . On peut se demander s'il y avait d'autres façons de faire. Le résultat d'unicité suivant montre que non.

Théorème 4.59. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ invariante par translation et finie sur les bornés. Alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\mu = C\lambda$. En particulier, la mesure de Lebesgue est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que la mesure d'un pavé P de \mathbb{R}^d est $|P|$.*

Démonstration. On note $C = \mu([0, 1]^d)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par invariance par translation on obtient que

$$\mu \left(\left[0, \frac{1}{n} \right] \right) = \frac{C}{n^d}.$$

On considère maintenant un pavé ouvert

$$P = \prod_{j=1}^d]a_j, b_j[.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [1, d]$ on considère $p_{j,n}, q_{j,n} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\frac{p_{j,n}}{n} \leq a_j < \frac{p_{j,n} + 1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{q_{j,n}}{n} \leq b_j < \frac{q_{j,n} + 1}{n}.$$

On a alors

$$\bigcup_{p_{j,n}+1 \leq k_j \leq q_{j,n}-1} \prod_{j=1}^d \left[\frac{k_j}{n}, \frac{k_j+1}{n} \right] \subset P \subset \bigcup_{p_{j,n} \leq k_j \leq q_{j,n}} \prod_{j=1}^d \left[\frac{k_j}{n}, \frac{k_j+1}{n} \right],$$

et donc

$$\frac{C}{n^d} \prod_{j=1}^d (q_{j,n} - p_{j,n} - 2) \leq \mu(P) \leq \frac{C}{n^d} \prod_{j=1}^d (q_{j,n} - p_{j,n}).$$

Par passage à la limite ($n \rightarrow +\infty$), on obtient

$$\mu(P) = C \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = C\lambda(P).$$

Puisque les pavés ouverts sont stables par intersection finie et engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ on obtient par le lemme d'unicité des mesures que $\mu = C\lambda$. La deuxième assertion s'obtient de la même façon par ce même lemme d'unicité. \square

On termine cette discussion sur la mesure de Lebesgue avec la question de la complétude. On déduit que l'Exemple 4.50 que toutes les parties négligeables pour la mesure de Lebesgue sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Par contre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est une tribu beaucoup plus petite.

Proposition 4.60. *La complétion de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. On note \mathcal{M}^* la tribu obtenue par complétion de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

• Soit $A \in \mathcal{M}^*$. Il existe $A_-, A_+ \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tels que $A_- \subset A \subset A_+$ et $\lambda(A_+ \setminus A_-) = 0$. Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A) \leq \lambda^*(B \cap A_+) + \lambda^*(B \setminus A_-).$$

Comme $B \cap A_- \subset B \cap A_+$ et $\lambda^*((B \cap A_+) \setminus (B \cap A_-)) \leq \lambda^*(A_+ \setminus A_-) = 0$, on a $\lambda^*(B \cap A_+) = \lambda^*(B \cap A_-)$ puis, comme $A_- \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A) \leq \lambda^*(B \cap A_-) + \lambda^*(B \setminus A_-) = \lambda^*(B).$$

Cela prouve que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, et donc que $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

• Soit maintenant $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $Q_n = [-n, n]^d$ et $A_n = A \cap Q_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ il existe une suite $(P_{m,j})_{j \in \mathbb{N}}$ de pavés de \mathbb{R}^d (qu'on peut supposer inclus dans Q_n) tels que si on note

$$B_m = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_{m,j}$$

alors $A_n \subset B_m$ et

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} |P_{m,j}| \leq \lambda^*(A_n) + \frac{1}{m}.$$

On note $B = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} B_m$. Alors B est un borélien de \mathbb{R}^d , $A \subset B$ et

$$\lambda(B) \leq \lambda^*(A_n).$$

On obtient de la même façon un borélien B' tel que $(Q_n \setminus A_n) \subset B'$ et $\lambda(B') = \lambda^*(Q_n \setminus A_n)$. On a alors $(Q_n \setminus B') \subset A_n \subset B$. Comme $A_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lambda^*(Q_n) = \lambda^*(A_n) + \lambda^*(Q_n \setminus A_n),$$

d'où, puisque tous les ensembles considérés sont de mesures finis,

$$\lambda(Q_n \setminus B') = \lambda(Q_n) - \lambda(B') = \lambda(Q_n) - \lambda^*(Q_n \setminus A_n) = \lambda^*(A_n) = \lambda(B).$$

Cela assure que $\lambda(B \setminus (Q_n \setminus B')) = 0$ et donc que $A_n \in \mathcal{M}^*$. Enfin on a

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}^*,$$

et la démonstration est complète. \square

4.5 Fonctions mesurables

On commence par définir la notion de fonction mesurable. Comme on l'a vu en introduction, c'est une hypothèse nécessaire pour espérer définir l'intégrale d'une fonction au sens de Lebesgue. Cependant, on verra que c'est une contrainte plus faible qu'être continue ou Riemann intégrable.

Pour la suite, l'espace mesurable d'arrivée (Y, \mathcal{N}) sera toujours $[0, +\infty]$, \mathbb{R} ou \mathbb{C} , munis de leurs tribus boréliennes.

4.5.1 Définition

Définition 4.61. Soient (X, \mathcal{M}) et (Y, \mathcal{N}) deux espaces mesurables et f une fonction de \mathcal{M} dans \mathcal{N} . On dit que f est mesurable si

$$\forall B \in \mathcal{N}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{M}.$$

Cette définition est à comparer avec la définition d'une fonction continue entre espaces topologiques. On note que f est mesurable si et seulement si \mathcal{N} est contenu dans la tribu image de \mathcal{M} par f (voir Exercice 11).

Remarque 4.62. La notion de fonction mesurable est indépendante du choix d'une éventuelle mesure sur (X, \mathcal{M}) ou sur (Y, \mathcal{N}) .

Remarque 4.63. Si $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, alors toutes les fonctions de X dans Y sont mesurables.

Lemme 4.64. Soient (X, \mathcal{M}) et (Y, \mathcal{N}) deux espaces mesurables et f une fonction de \mathcal{M} dans \mathcal{N} . On suppose que \mathcal{N} est engendrée par une famille \mathcal{F} de parties de Y telle que

$$\forall B \in \mathcal{F}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{M}.$$

Alors f est mesurable.

Démonstration. On note $\tilde{\mathcal{N}}$ la mesure image de \mathcal{M} par f :

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{B \in \mathcal{P}(Y) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}.$$

On a vu (voir Exercice 11) que $\tilde{\mathcal{N}}$ est une mesure sur Y . Par hypothèse, $\tilde{\mathcal{N}}$ contient \mathcal{F} , d'où $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F}) \subset \tilde{\mathcal{N}}$. Cela prouve qu'on a bien $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ pour tout $B \in \mathcal{N}$. \square

Définition 4.65. On suppose que X et Y sont deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes. Alors les fonctions mesurables de X vers Y sont également appelées **fonctions boréliennes**.

Proposition 4.66. Soient X et Y deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes. Une fonction continue de X dans Y est borélienne.

Démonstration. On note \mathcal{O} l'ensemble des ouverts de Y . Soit f une fonction continue de X dans Y . Soit $B \in \mathcal{O}$. Par hypothèse, $f^{-1}(B)$ est un ouvert et donc un borélien de X . D'après le lemme précédent, puisque $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{O})$ on obtient que f est borélienne. \square

4.5.2 Stabilité de la classe des fonctions mesurables

Proposition 4.67. Soient (X_1, \mathcal{M}_1) , (X_2, \mathcal{M}_2) et (X_3, \mathcal{M}_3) trois espaces mesurables. Soient f une fonction mesurable de (X_1, \mathcal{M}_1) dans (X_2, \mathcal{M}_2) et g une fonction mesurable de (X_2, \mathcal{M}_2) dans (X_3, \mathcal{M}_3) . Alors $g \circ f$ est une fonction mesurable de (X_1, \mathcal{M}_1) dans (X_3, \mathcal{M}_3) .

Démonstration. Soit $C \in \mathcal{M}_3$. On a $g^{-1}(C) \in \mathcal{M}_2$ donc $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{M}_1$. Cela prouve que $(g \circ f)$ est mesurable. \square

Corollaire 4.68. Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans \mathbb{R} .

- (i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction (λf) est mesurable.
- (ii) Les fonctions $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$ et $|f|$ sont mesurables.
- (iii) Si f ne s'annule pas alors la fonction $1/f$ est mesurable.

Démonstration. Il suffit de composer f avec les fonctions $y \mapsto \lambda y$, $y \mapsto \max(y, 0)$, $y \mapsto \max(-y, 0)$, $y \mapsto |y|$, toutes continues et donc boréliennes sur \mathbb{R} , ou bien avec la fonction $y \mapsto 1/y$, continue sur \mathbb{R}^* . \square

Proposition 4.69. Soient (X, \mathcal{M}) un espace mesurable et (Y, \mathcal{T}) un espace topologique. Soient $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables et $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ une application continue. Pour tout $x \in X$ on note

$$g(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x)).$$

Alors g est une fonction mesurable de X dans Y , muni de sa tribu borélienne.

Démonstration. Puisque \mathbb{R}^2 et Y sont munis de leurs tribus boréliennes et que la fonction Φ est continue, elle est aussi mesurable. Pour $x \in X$ on note $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$, de sorte que $g = \Phi \circ F$. Soient I_1 et I_2 deux intervalles. On a $F^{-1}(I_1 \times I_2) = f_1^{-1}(I_1) \cap f_2^{-1}(I_2) \in \mathcal{M}$ (car f_1 et f_2 sont mesurables). Puisque la tribu borélienne est engendrée par les rectangles de cette forme (voir Exercice ??), on en déduit que F est mesurable. La fonction g est alors mesurable comme composée de fonctions mesurables. \square

Corollaire 4.70. Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans \mathbb{R} . Alors les fonctions $f + g$, fg , $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont mesurables.

Démonstration. On applique la proposition précédente avec les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto \min(f, g)$ et $(x, y) \mapsto \max(f, g)$, toutes continues de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . \square

Proposition 4.71. Soit X un espace mesurable. Soient f et g deux fonctions de X dans \mathbb{C} .

- (i) f est mesurable si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ (à valeurs réelles) le sont.
- (ii) Si f et g sont mesurables, alors les fonctions $f + g$, fg et $|f|$ sont mesurables. Si de plus f ne s'annule pas, alors la fonction $1/f$ est mesurable.

Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesurable et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que

$$\left(\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) (x) = \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_n(x)$$

et, de même,

$$\left(\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) (x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_n(x).$$

Proposition 4.72. Soient (X, \mathcal{M}) un espace mesurable et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans \mathbb{R} ou dans $[0, +\infty]$. Alors les fonctions

$$\sup f_n, \quad \inf f_n, \quad \limsup f_n \quad \text{et} \quad \liminf f_n$$

sont mesurables. En particulier si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in X$ (quand $n \rightarrow \infty$), alors la limite f est une fonction mesurable.

Démonstration. On note $g = \sup f_n$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on a

$$g^{-1}(]a, +\infty]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{M},$$

donc g est mesurable. On montre de même que $\inf f_n$ est mesurable. On en déduit alors que

$$\limsup f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k$$

sont des fonctions mesurables. □

Proposition 4.73. Soient (X, \mathcal{M}) et (Y, \mathcal{N}) deux espaces mesurables. Soit f une fonction de X dans Y . Soient $X_1 \in \mathcal{M}$ et $X_2 = X \setminus X_1$. On munit X_1 et X_2 des tribus \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 induites par \mathcal{M} . Alors f est mesurable si et seulement si ses restrictions à (X_1, \mathcal{M}_1) et (X_2, \mathcal{M}_2) le sont.

Démonstration. On suppose que f est mesurable. Montrons que la restriction f_1 de f à X_1 est mesurable. Soit $B \in \mathcal{N}$. On a

$$f_1^{-1}(B) = X_1 \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_1,$$

car $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. On vérifie de même que la restriction de f à (X_2, \mathcal{M}_2) est mesurable. Inversement, on suppose que les restrictions de f à X_1 et X_2 sont mesurables. Soit $B \in \mathcal{N}$. On a

$$f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup f_2^{-1}(B) \in \mathcal{M},$$

car $f_1^{-1}(B) \in \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ et $f_2^{-1}(B) \in \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}$. D'où f est mesurable. □

La démonstration du corollaire suivant est laissée en exercice.

Corollaire 4.74. Soient (X, \mathcal{M}) et (Y, \mathcal{N}) deux espaces mesurables. Soit f une fonction de X dans Y . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables et deux à deux disjointes dans X telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note \mathcal{M}_n la tribu induite par \mathcal{M} sur X_n . Alors f est mesurable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la restriction de f à (X_n, \mathcal{M}_n) est mesurable.

4.6 Annexe : mesure de Jordan

Définition 4.75. Soit A une partie bornée de \mathbb{R}^d . On définit les mesures intérieure et extérieure de Jordan de A par

$$m_{*,J}(A) := \sup_{\substack{E \text{ élémentaire} \\ E \subset A}} m(E)$$

et par

$$m^{*,J}(A) := \inf_{\substack{E \text{ élémentaire} \\ E \supset A}} m(E),$$

respectivement. On dit alors que A est mesurable au sens de Jordan si $m_{*,J}(A) = m^{*,J}(A)$, et dans ce cas la mesure de Jordan de A est par définition

$$m_J(A) := m_{*,J}(A) = m^{*,J}(A).$$

Exemple 4.76. On considère $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Montrons que $m_{*,J}(A) = 0$ et $m^{*,J}(A) = 1$.

Soit E un ensemble élémentaire de \mathbb{R} tel que $A \subset E$. L'adhérence de E est encore un ensemble élémentaire de \mathbb{R} contenant A et $m(\overline{E}) = m(E)$. Si x n'est pas dans \overline{E} , il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset [0, 1] \setminus \overline{E}$. Puisque A est dense dans $[0, 1]$, on obtient une contradiction. Ainsi \overline{E} contient $]0, 1[$ et sa mesure est au moins égale à 1. Cela prouve que $m^{*,J}(A) \geq 1$. Comme par ailleurs on a $A \subset [0, 1]$ et que $[0, 1]$ est un ensemble élémentaire de mesure 1, on a $m^{*,J}(A) \leq 1$.

Soit maintenant E un ensemble élémentaire de \mathbb{R} inclus dans A . L'intérieur de E est encore un ensemble élémentaire de \mathbb{R} inclus dans A et $m(\overset{\circ}{E}) = m(E)$. Si $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$, alors par densité de $[0, 1] \setminus A$ dans $[0, 1]$ on obtient que $([0, 1] \setminus A) \cap \overset{\circ}{E} \neq \emptyset$, ce qui est absurde. D'où $\overset{\circ}{E} = \emptyset$. Cela prouve que $m_{*,J}(A) = 0$.

Exemple 4.77. On considère le triangle T défini en (4.1). Les mêmes calculs qu'à l'exemple 4.44 montrent que $m^{*,J}(T) \leq \frac{1}{2}$ et $m_{*,J}(T) \geq \frac{1}{2}$. Cela prouve que T est mesurable au sens de Jordan, de mesure $m_J(T) = \frac{1}{2}$.

Proposition 4.78. (i) Pour toute partie bornée A de \mathbb{R}^d on a

$$m_{*,J}(A) \leq m^{*,J}(A).$$

(ii) Un ensemble élémentaire E est mesurable au sens de Jordan, et on a $m_J(E) = m(E)$.

(iii) Soit A une partie bornée de \mathbb{R}^d . Alors A est mesurable au sens de Jordan si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des ensembles élémentaires A^- et A^+ tels que $A^- \subset A \subset A^+$ et $m(A^+ \setminus A^-) \leq \varepsilon$.

(iv) Soient A et B deux ensembles mesurables au sens de Jordan tels que $A \subset B$. Alors on a

$$m(A) \leq m(B).$$

(v) Une union finie d'ensembles mesurables au sens de Jordan est mesurable au sens de Jordan. En outre, si A_1, \dots, A_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sont mesurables au sens de Jordan on a

$$m_J(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq m_J(A_1) + \dots + m_J(A_n).$$

De plus, si les A_i , $1 \leq i \leq n$, sont deux à deux disjoints on a

$$m_J(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = m_J(A_1) + \dots + m_J(A_n).$$

(vi) Une intersection finie d'ensembles mesurables au sens de Jordan est mesurable au sens de Jordan.

(vii) Si A et B sont deux ensembles mesurables au sens de Jordan alors $A \setminus B$ et $A \Delta B$ le sont également.

Démonstration. • Si E et F sont des ensembles élémentaires telles que $E \subset A \subset F$ on a en particulier

$$m(E) \leq m(F).$$

La première propriété vient alors en prenant la borne supérieure sur E et la borne inférieure sur F .

• Puisque $E \subset E$ on a par définition

$$m^{J,*}(E) \leq m(E) \quad \text{et} \quad m(E) \leq m_{*,J}(E).$$

Avec l'inégalité précédente, on a alors $m_{*,J}(E) = m(E) = m^{*,J}(E)$. Cela prouve que E est mesurable au sens de Jordan de mesure $m(E)$.

- On suppose que A est mesurable au sens de Jordan. Alors il existe un ensemble élémentaire A^- tel que

$$A^- \subset A \quad \text{et} \quad m(A^-) \geq m_J(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe un ensemble élémentaire A^+ tel que

$$A \subset A^+ \quad \text{et} \quad m(A^+) \leq m_J(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a en particulier $A^- \subset A^+$ et $m(A^+ \setminus A^-) = m(A^+) - m(A^-) \leq \varepsilon$. On montre maintenant la réciproque. Il existe des suites $(A_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles élémentaires telles que $A_n^- \subset A \subset A_n^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m(A_n^+) - m(A_n^-) = m(A_n^+ \setminus A_n^-) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On a alors

$$m^{*,J}(A) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} m(A_n^+) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} m(A_n^-) \leq m_{*,J}(A).$$

Cela prouve que A est mesurable au sens de Jordan.

- Si E est un ensemble élémentaire contenant B il contient aussi A , donc $m^{J,*}(A) \leq m^{J,*}(B)$. Pour des ensembles mesurables les mesures de Jordan et de Jordan extérieure coïncident, donc $m_J(A) \leq m_J(B)$.
- Soient A et B deux ensembles mesurables au sens de Jordan. Soit $\varepsilon > 0$. Soient A^- , A^+ , B^- et B^+ des ensembles élémentaires tels que $A^- \subset A \subset A^+$, $B^- \subset B \subset B^+$, $m(A^+ \setminus A^-) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $m(B^+ \setminus B^-) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors on a

$$(A^- \cup B^-) \subset (A \cup B) \subset (A^+ \cup B^+).$$

D'autre part

$$(A^+ \cup B^+) \setminus (A^- \cup B^-) \subset (A^+ \setminus A^-) \cup (B^+ \setminus B^-),$$

donc

$$m((E_A^+ \cup E_B^+) \setminus (E_A^- \cup E_B^-)) \leq m((E_A^+ \setminus E_A^-) \cup (E_B^+ \setminus E_B^-)) \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que $A \cup B$ est mesurable au sens de Jordan. En outre avec ces notations on a

$$m(A \cup B) \leq m(E_A^+ \cup E_B^+) \leq m(A) + m(B) + \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient bien que $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$. En outre si $A \cap B = \emptyset$ on a $A^- \cap B^- = \emptyset$ donc

$$m(A \sqcup B) \geq m(A^- \sqcup B^-) = m(A^-) + m(B^-) \geq m(A) + m(B) - \varepsilon.$$

On obtient alors $m(A \sqcup B) \geq m(A) + m(B)$, d'où l'égalité.

- En reprenant les notations précédentes, on a

$$(A^- \cap B^-) \subset (A \cap B) \subset (A^+ \cap B^+)$$

et

$$(A^+ \cap B^+) \setminus (A^- \cap B^-) \subset (A^+ \setminus A^-) \cap (B^+ \setminus B^-),$$

donc $A \cap B$ est mesurable au sens de Jordan. Enfin

$$(A^- \setminus B^+) \subset (A \setminus B) \subset (A^+ \setminus B^-)$$

et

$$(A^+ \setminus B^-) \setminus (A^- \setminus B^+) \subset (A^+ \setminus A^-) \cup (B^+ \setminus B^-),$$

donc $A \setminus B$ est mesurable au sens de Jordan. □

Remarques 4.79. — Une union dénombrable d'ensembles mesurables au sens de Jordan peut ne pas être mesurable (voir Exemple 4.76).

— Une intersection dénombrable d'ensembles mesurables au sens de Jordan peut ne pas être mesurable.

4.7 Exercices

Exercice 1. Montrer que les mesures sur $(X, \mathcal{P}(X))$ données en exemple sont effectivement des mesures.

Exercice 2. On modélise les résultats d'un jet de deux dés par l'ensemble $C = \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$. On munit C de la mesure uniforme μ . Pour $(j, k) \in C$ on pose $f(j, k) = j + k$. On note S l'ensemble $\llbracket 2, 12 \rrbracket$. Pour $B \in \mathcal{P}(S)$ on pose

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \frac{\text{Card} \{(j, k) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid j + k \in B\}}{\text{Card}(C)}.$$

1. Montrer que $\nu(S) = 1$.
2. Calculer $\nu(\{s\})$ pour tout $s \in S$.
3. Calculer $\nu(\{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$.

Exercice 3. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge. Réinterpréter en terme de mesure le fait que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 4. Soit \mathcal{M} une tribu de X et $E \in \mathcal{P}(X)$. Montrer que

$$\mathcal{M}_E := \{A \cap E, A \in \mathcal{M}\}$$

est une tribu de E . On dira que \mathcal{M}_E est la tribu induite par \mathcal{M} sur E .

Exercice 5. Déterminer la tribu de \mathbb{R} engendrée par $\{[0, 2], [1, 3]\}$.

Exercice 6. Soit X un ensemble. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, \dots, A_n des parties deux à deux disjointes de X telles que $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Déterminer le nombre d'éléments de la tribu de X engendrée par $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Exercice 7. Soit X un ensemble.

1. Déterminer la tribu engendrée par les singletons de X .
2. Déterminer la tribu engendrée par les parties de X contenant deux éléments.

Exercice 8. Soient X un ensemble et A une partie de X . Déterminer la tribu engendrée par les parties de X contenant A .

Exercice 9. Soit X un ensemble. Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux tribus de X . Déterminer les tribus engendrées par $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ et par $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

Exercice 10. Soit X un ensemble non vide. On appelle algèbre de X une famille \mathcal{A} de parties de X telle que $X \in \mathcal{A}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a $X \setminus A \in \mathcal{A}$ et $A \cup B \in \mathcal{A}$.

1. Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. Montrer qu'il existe une plus petite algèbre (au sens de l'inclusion) contenant P .
2. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'algèbres de X telle que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est une algèbre de X .
3. Que dire de la question précédente si on remplace « algèbre » par « σ -algèbre » ? On pourra par exemple considérer $X = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \sigma(\{0\}, \dots, \{n\})$.

Exercice 11. Soient (X, \mathcal{M}) un espace mesurable, Y un ensemble et φ une fonction de X dans Y .

1. Montrer que $\mathcal{N} = \{B \mid \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$ est une tribu sur Y . On l'appelle tribu image de \mathcal{M} par φ .
2. Expliciter \mathcal{N} lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Même question lorsque $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$.
3. On suppose que φ est une bijection. Montrer que \mathcal{M} est la tribu image de \mathcal{N} par φ^{-1} .

Exercice 12. Soient X un ensemble, (Y, \mathcal{N}) un espace mesurable et φ une fonction de X dans Y . Montrer que

$$\mathcal{M} = \{\varphi^{-1}(B), B \in \mathcal{N}\}$$

est une tribu sur X .

Exercice 13. Soient X et Y deux ensembles. Soit φ une application de X dans Y .

1. Soit \mathcal{F} une famille de parties de Y . On note

$$\varphi^{-1}(\mathcal{F}) = \{\varphi^{-1}(F), F \in \mathcal{F}\}.$$

On définit de même $\varphi^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$. Montrer que $\sigma(\varphi^{-1}(\mathcal{F})) = \varphi^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

2. On suppose que X et Y sont des ouverts de \mathbb{R}^d et que φ est un homéomorphisme de X dans Y . Montrer que la tribu image de la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ par φ est la tribu borélienne $\mathcal{B}(Y)$ de Y .

Exercice 14. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par l'ensemble des intervalles de la forme $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{Q}$.

Exercice 15. Soit X un espace topologique, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$. Soit F une partie de X , muni de la topologie induite et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(F)$ correspondante.

1. Montrer que

$$\mathcal{B}(F) = \{A \cap F, A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

2. Montrer que si F est un borélien de X alors $\mathcal{B}(F)$ est simplement l'ensemble des boréliens de X inclus dans F .

Exercice 16. On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens de \mathbb{R} .

(i) L'ensemble des réels x tels que $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

(ii) L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(iii) L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ a 0 pour valeur d'adhérence.

Exercice 17. 1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 18. On note P l'ensemble des pavés de \mathbb{R}^d de la forme

$$\prod_{j=1}^d \left[\frac{n_j}{2^{-k}}, \frac{n_j + 1}{2^{-k}} \right],$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que P est un ensemble dénombrable de parties de \mathbb{R}^d .

2. Montrer que tout ouvert de \mathbb{R}^d est union d'éléments de P .

3. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(P)$.

4. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par l'ensemble des boules euclidiennes ouvertes (respectivement fermées).

5. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par les demi-espaces de la forme

$$\mathbb{R}^{j-1} \times]a, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-j},$$

avec $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Soient X un ensemble et \mathcal{F} une famille de parties de X . Montrer que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F})$ il existe une famille dénombrable \mathcal{D} d'éléments de \mathcal{F} telle que $A \in \sigma(\mathcal{D})$. *Indication : on pourra montrer que l'ensemble des A dans $\sigma(\mathcal{F})$ vérifiant cette propriété est une tribu sur X .*

Exercice 20. Montrer qu'une tribu contient toujours un nombre fini ou indénombrable d'éléments.

Exercice 21. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on note $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m ainsi définie est-elle une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?

Exercice 22. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Montrer que l'application

$$m = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}$$

définit une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Exercice 23. Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et $E \in \mathcal{M}$. On note \mathcal{M}_E la tribu induite sur E (voir Exercice 4).

1. Montrer que tout $A \in \mathcal{M}$ est également dans \mathcal{M} .

2. Pour $A \in \mathcal{M}_E$ on note

$$\mu_E(A) = \mu(A \cap E) = \mu(A).$$

Montrer que cela définit une mesure μ_E sur E .

Exercice 24. Soient (X, \mathcal{M}) un espace mesurable, Y un ensemble et φ une fonction de X dans Y . On note \mathcal{N} la tribu image de \mathcal{M} par φ (voir l'exercice 21). Pour $B \in \mathcal{N}$ on pose

$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)).$$

1. Montrer que cela définit une mesure ν sur (Y, \mathcal{N}) . Elle est appelée mesure image de μ par f .

2. Expliciter ν lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ et $\mu = \delta_{x_0}$, où x_0 est un élément de X .

Exercice 25. On considère une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note \mathcal{O} l'union de tous les ouverts de \mathbb{R} de mesure nulle. Montrer que \mathcal{O} est un ouvert de mesure nulle. En déduire qu'il existe un plus grand ouvert de \mathbb{R} (au sens de l'inclusion) de mesure nulle.

Exercice 26. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert \mathcal{O} dense dans \mathbb{R} et tel que

$$\lambda(\mathcal{O}) \leq \varepsilon.$$

Exercice 27. Soit μ une mesure sur les boréliens de \mathbb{R} , finie sur les compacts. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \begin{cases} \mu(]x_0, x]) & \text{si } x > x_0, \\ -\mu(]x, x_0]) & \text{si } x \leq x_0. \end{cases}$$

1. Montrer que cela définit une fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , croissante et continue à droite en tout point.

2. Montrer que F est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.

3. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$ est dénombrable.

Exercice 28. Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables. On note B l'ensemble des $x \in X$ tel que $x \in A_n$ pour une infinité d'indices n .

1. Montrer que B est mesurable.

2. On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ converge. Montrer que $\mu(B) = 0$.

Exercice 29. 1. Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que le graphe de f est de mesure nulle dans \mathbb{R}^2 (muni de la mesure de Lebesgue).

2. Soit f une fonction de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 . Montrer que $f(\mathbb{R})$ est de mesure nulle dans \mathbb{R}^2 (toujours muni de la mesure de Lebesgue). Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue?

Exercice 30. Donner un exemple de mesure μ qui est σ -finie sur \mathbb{R} et telle que $\mu(\] - n, n]) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 31. La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est-elle borélienne sur \mathbb{R} ?

Exercice 32. Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesurable.

1. Vérifier que si $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ alors toute fonction de X dans n'importe quel espace mesurable est mesurable.

2. On suppose maintenant que $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(X)$. Donner un exemple de fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas mesurable mais telle que $|f|$ l'est.

Exercice 33. Montrer que la réciproque d'une bijection mesurable n'est pas nécessairement mesurable.

Exercice 34. 1. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer directement (*i.e.* sans utiliser le cours) que les fonctions $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$ sont mesurables.

2. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer que les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des fonctions mesurables de X dans \mathbb{R} .

Exercice 35. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante est mesurable.

Exercice 36. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à droite.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère sur \mathbb{R} la fonction f_n telle que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -n, \\ f(\frac{p}{n}) & \text{si } x \in \] - n, n] \text{ et } \frac{p-1}{n} < x \leq \frac{p}{n}, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f_n ainsi définie est mesurable.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f .

3. En déduire que f est mesurable.

4. Montrer qu'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à gauche est mesurable.

Exercice 37. Soient (X, \mathcal{M}) un espace mesurable et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $\omega : X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in X$ on a $|\omega(x)| = 1$ et $f(x) = |f(x)|\omega(x)$.