# Chapitre 5

# Intégration au sens de Lebesgue

Le but de ce chapitre est de donner une nouvelle construction de l'intégrale. Par rapport à la définition connue pour les fonctions continues par morceaux, ou même par rapport à l'intégrale de Riemann, cette nouvelle approche va permettre de définir l'intégrale de fonctions beaucoup plus générales.

Cette nécessité de généraliser si largement la définition de l'intégrale est motivée par une changement de point de vue sur l'utilisation de cette intégrale. Il ne s'agit pas de calculer l'aire sur la courbe de fonctions tellement compliquées qu'elles ne seraient pas intégrables au sens de Riemann.

Un tournant dans l'utilisation de l'intégrale a été l'introduction par J. Fourier des séries qui portent aujourd'hui son nom. Fourier affirmait que toute fonction périodique (en fait, toute fonction sur $[0, \pi]$ s'annulant aux extrémités) peut s'écrire comme somme éventuellement infinie de fonctions trigonométriques. Les coefficients étaient alors donnés par une expression faisant intervenir… l'intégrale de la fonction en question.

Alors que l'intégrale était à l'origine utilisée pour calculer des aires, ce qui n'impliquait que des fonctions très simples, l'affirmation de Fourier devait concerner n'importe quelle fonction. Cela a poussé les mathématiciens a clarifier la notion même de fonction, pour aboutir à la définition très générale qu'on utilise aujourd'hui, et ensuite à définir l'intégrale pour cette large classe de fonctions.

Il y a eu de nombreuses définitions améliorant au fil du temps la théorie de l'intégration. La construction de l'intégrale au sens de Riemann est déjà très générale et permet de donner un sens à l'intégrale de toutes les fonctions que l'on peut rencontrer dans des problèmes concrêts.

Mais l'un des intérêts cruciaux de l'intégrale de Lebesgue qui sera définie dans ce chapitre est le bon comportement par rapport au passage à la limite. Une question naturelle, et qui sera au cœur de nombreuses discussions concernant la théorie de l'intégration, est la suivante. Étant donnée une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions intégrables (quoi que cela puisse signifier) qui admet une limite (à nouveau, en un sens à préciser), a-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to+\infty} f_n \quad ? \tag{5.1}$$

Avant de se demander si l'égalité est vraie (et on verra que même dans des situations très simples, elle ne l'est pas), il faut déjà s'assurer que les deux membres de cette égalité ont bien un sens. En particulier, si on note $f$ la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est-on capable de donner un sens à l'intégrale de $f$ ? Si on considère simplement l'intégrale des fonctions continues, on sait qu'à moins d'imposer une hypothèse de convergence très forte, comme une convergence uniforme, la limite d'une suite de fonctions continues ne

*Version du 10 septembre 2021*

sera pas nécessairement continue. Et la classe des fonctions Riemann intégrables, bien que relativement large, n'est pas non plus stable par passage à la limite en un sens trop faible. C'est là que les notions que l'on utilisera dans ce chapitre seront plus souples.

Malheureusement, même si le nouvel espace des fonctions intégrables sera plus adapté pour se poser la question (5.1), cela n'implique pas que l'égalité sera vraie. En fait, des contre-exemples très simples n'impliquant que des fonctions continues et à supports compacts montrent qu'aucune définition raisonnable de l'intégrale ne peut assurer (5.1) en toute généralité. Un théorème de passage à la limite sous l'intégrale ne peut donc être énoncé qu'avec des hypothèses restrictives. Les contre-exemples typiques qu'il est bon de garder à l'esprit sont les suivants. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose par exemple

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2], \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2], \end{cases}$$

puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \phi(x-n), \quad g_n = n\phi(nx), \quad h_n = \frac{1}{n}\phi\left(\frac{x}{n}\right). \tag{5.2}$$

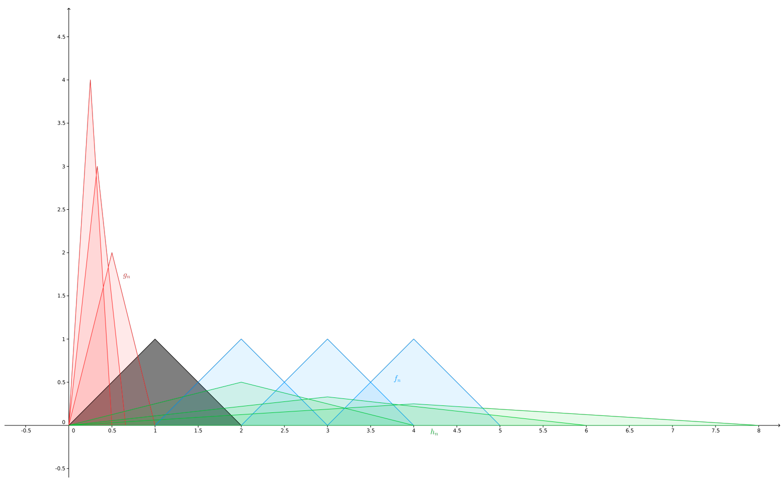


Figure 5.1 – Contre-exemples (5.2)

On note tout d'abord que toutes ces fonctions sont continues et à supports compacts, donc les intégrales correspondantes ont bien un sens, quelle que soit la définition choisie. On note également que toutes ces fonctions sont d'intégrales égales à 1, mais que les trois suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers 0 (qui est également parfaitement intégrable quelle que soit la théorie choisie). En particulier, l'égalité (5.1) n'a pas lieu. Ces trois contre-exemples illustrent trois phénomènes différents. La fonction $f_n$ est un profil qui s'échappe à l'infini, la fonction $g_n$ se concentre en un point et la fonction $h_n$ s'étale. On note également que les fonctions $g_n$ sont à support dans un même compact, et que dans le cas de $h_n$ on a convergence uniforme vers 0 (évidemment, aucun contre-exemple ne peut avoir ces deux propriétés à la fois, puisque sur un compact et pour une suite de fonctions continues convergeant uniformément, le passage à la limite sous l'intégrale est bien valable).

Ces trois phénomènes seront moralement les seules obstructions au passage à la limite sous l'intégrale, et une hypothèse permettant d'exclure ces trois cas aura de bonnes chances d'être suffisante pour montrer (5.1). Ce sera le cas pour les résultats du paragraphe 5.3. En particulier, on peut considérer que le théorème de convergence dominée 5.34 est le résultat principal de ce chapitre.

Au delà de simples calculs de limites, ces bonnes propriétés vis-à-vis du passage à la limite auront des conséquences importantes sur la structure des espaces de fonctions intégrables. On y reviendra au chapitre suivant sur les espaces de Lebesgue.

Avant de construire effectivement l'intégrale de Lebesgue, on discute brièvement l'idée à l'orgine de la construction. Considérons par exemple une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles positives, disons dans le segment $[c, d]$. L'idée pour construire l'intégrale de Riemann est de diviser le segment $[a, b]$ en petits intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ avec $a = a_0 < \dots a_n = b$, et pour chaque $j$ d'approcher la zone entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a_j$ et $x = a_{j+1}$ et la courbe de $f$ par le rectangle de base $[a_j, a_{j+1}]$ et de hauteur $[0, y_j]$ où $y_j$ approche les valeurs de $f(x)$ pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Pour l'intégrale de Darboux, on encadre cette zone entre deux rectangles, en choisissant à la place de $y_j$ l'infimum et le supremum des valeurs de $f$ sur $[x_j, x_{j+1}]$. Pour l'intégrale de Lebesgue, l'idée est un peu différente. Plutôt que de regarder un petit intervalle en $x$ et de voir les valeurs prises en $y$ sur ce petit intervalle, on regarde un petit intervalle en $y$ et on regarde pour quelles valeurs de $x$ la fonction $f$ prend les valeurs correspondantes. Autrement dit, on divise l'intervalle $[c, d]$ en petits intervalles $[y_k, y_{k+1}[$ et pour chaque $k$ on considère l'image réciproque $X_k = f^{-1}([y_k, y_{k+1}[)$. L'aire correspondante est alors approchée par $\mathsf{long}(X_k) \times y_k$, où $\mathsf{long}(X_k)$ désigne la longueur de $X_k$, et on somme les contributions correspondant à chaque $k$ pour obtenir une approximation de l'intégrale de $f$. On obtient alors l'intégrale de $f$ en prenant de plus en plus de sous-intervalles de plus en plus petits. On note que $X_k$ n'a aucune raison d'être un intervalle, donc il faut pouvoir donner un sens à la longueur de $X_k$. C'est là que les efforts consentis pour définir la mesure de Lebesgue prennent tous leur sens. Néanmoins, on a vu qu'on n'était pas capable de donner un sens à la longueur de n'importe quelle partie de $\mathbb{R}$. Cette stratégie ne sera donc appliquable qu'aux fonctions telles que l'image réciproque d'un intervalle est mesurable. On ne pourra donc considérer l'intégrale que pour des fonctions qui sont au moins mesurables.

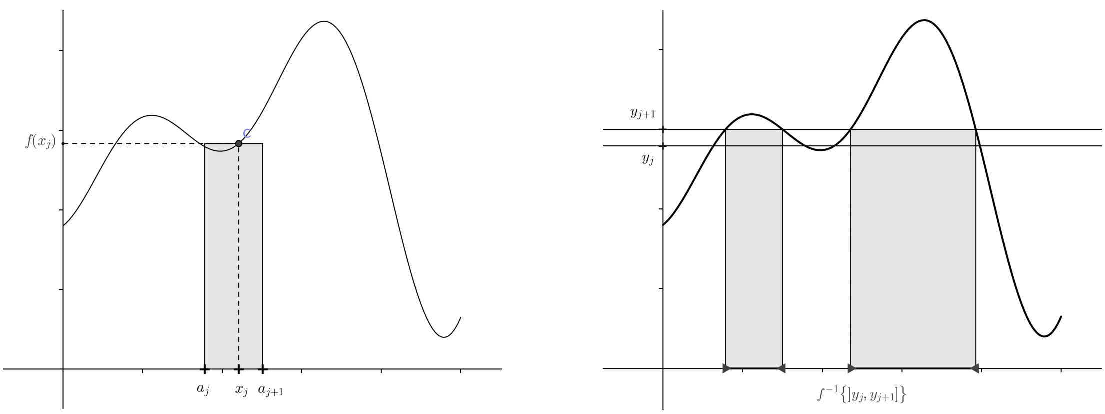



Figure 5.2 – Stratégies de Riemann et de Lebesgue

Bien entendu, la taille de l'image réciproque n'est pas nécessairement donnée par sa mesure de Lebesgue. La définition de l'intégrale que l'on va donner dans ce chapitre aura en fait du sens dès lors qu'on prendra une fonction mesurable sur n'importe quel espace mesurable. L'intégrale sera même utilisée pour définir de nouvelles mesures, qui donneront alors les intégrales à densité (voir le paragraphe 5.2.5).

Après avoir défini les fonctions mesurables et construit l'intégrale de Lebesgue, on montrera les théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale déjà évoqués. On terminera ensuite ce chapitre avec deux outils importants permettant de simplifier des intégrales, afin de pouvoir les calculer ou d'en donner de bonnes propriétés. On montrera les théorèmes de Fubini, qui permettent typiquement d'exprimer des intégrales sur des domaines de $\mathbb{R}^d$ pour $d \geqslant 1$ en fonction d'intégrales unidimensionnelles, mais aussi d'intervertir l'ordre d'intégration pour des intégrales multiples. Enfin on terminera par le théorème de changement de variable qui permet, par un changement de coordonnées, de tenir compte des symétries d'un calcul pour le simplifier (par exemple passer en coordonnées polaires pour un problème à symétrie radiale).

## 5.1 Définition de l'intégrale

### 5.1.1 Intégration des fonctions étagées

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle que la fonction indicatrice d'une partie $A$ de $X$ est la fonction $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ telle que, pour $x \in X$,

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

En particulier $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A$ est une partie mesurable de $X$.

**Définition 5.1.** On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est étagée si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On note $\mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ l'ensemble des fonctions étagées à valeurs réelles positives.

*Remarque* 5.2.
— Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est étagée si et seulement si elle est combinaison linéaire de fonctions indicatrices de parties mesurables.
— Soit $f$ une fonction étagée sur $(X, \mathcal{M})$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) les différentes valeurs prises par $f$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on note $A_j = f^{-1}(\{\alpha_j\})$. Alors les ensembles $A_j$, $j \in [\![1, n]\!]$, forment une partition de $X$ et on a

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

**Proposition 5.3.** *Soient $f, g \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors $f + g \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ et $\lambda f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$.*

**Définition 5.4.** Soit $f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ deux à deux disjoints et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0$ tels que $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = X$ et

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Alors on appelle intégrale de $f$ le réel positif (éventuellement infini)

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

(on rappelle qu'on utilise la convention $0 \times (+\infty) = 0$).

*Démonstration.* On suppose qu'il existe également $m \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{M}$ deux à deux disjoints et $\beta_1, \dots, \beta_m \geqslant 0$ tels que $\bigcup_{k=1}^m B_k = X$ et

$$f = \sum_{k=1}^m \beta_k \mathbb{1}_{B_k}.$$

Soient $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. On note que si $A_j \cap B_k \neq \emptyset$ alors $\alpha_j = \beta_k$, donc dans tous les cas on a $\alpha_j \mu(A_j \cap B_k) = \beta_k \mu(A_j \cap B_k)$. On a alors

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k).$$

Cela prouve que la définition ne dépend pas du choix d'une partition de $X$ compatible avec $f$. □

**Proposition 5.5.** *(i) Pour $f, g \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ on a*

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

*(ii) Pour $f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a $\lambda f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ et*

$$\int_X (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int_X f\, d\mu.$$

*(iii) Soient $f, g \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ telles que $f \leqslant g$. Alors on a*

$$\int_X f\, d\mu \leqslant \int_X g\, d\mu.$$

*Démonstration.* (i) On note

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{et} \quad g = \sum_{k=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

où $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}_+^*$, $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{M}$ avec $A_1, \dots, A_n$ deux à deux disjoints et $B_1, \dots, B_m$ deux à deux disjoints. On note $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $A_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$ et $B_0 = X \setminus \bigcup_{k=1}^m B_k$. On peut encore écrire

$$f = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{et} \quad g = \sum_{k=0}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}.$$

On a alors

$$f + g = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ 0 \leqslant k \leqslant m}} (\alpha_j + \beta_k) \mathbb{1}_{A_j \cap B_k}.$$

Puisque les ensembles $(A_j \cap B_k)$ pour $(j,k) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket$ sont mesurables et deux à deux disjoints, on a

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ 0 \leqslant k \leqslant m}} (\alpha_j + \beta_k) \mu(A_j \cap B_k).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g)\,d\mu &= \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant m}} \alpha_j \mu(A_j\cap B_k) + \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant m}} \beta_k \mu(A_j\cap B_k)\\
&= \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{k=0}^m \mu(A_j\cap B_k) + \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{j=0}^n \mu(A_j\cap B_k)\\
&= \sum_{j=0}^n \alpha_j \mu(A_j) + \sum_{k=0}^m \beta_k \mu(B_k)\\
&= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.
\end{aligned}$$

(ii) On garde les même notations pour $f$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a alors

$$\lambda f = \sum_{j=1}^n (\lambda\alpha_j)\mathbb{1}_{A_j},$$

donc

$$\int_X \lambda f\,d\mu = \sum_{j=1}^n \lambda\alpha_j\mu(A_j) = \lambda\sum_{j=1}^n \alpha_j\mu(A_j) = \lambda\int_X f\,d\mu.$$

(iii) La fonction $g-f$ est dans $\mathcal{E}_+(X,\mathcal{M})$. En effet elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, toutes positives ou nulles. On peut donc définir son intégrale, qui est positive. Par linéarité on a alors

$$\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X (g-f)\,d\mu \geqslant \int_X f\,d\mu.$$

□

*Remarque* 5.6. Soit $f = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ une fonction étagée, où $m \in \mathbb{N}$, $\beta_1,\dots,\beta_m \in \mathbb{R}_+$ et $B_1,\dots,B_m \in \mathcal{M}$ (non nécessairement deux à deux disjoints). Alors par linéarité de l'intégrale on a

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \int_X \mathbb{1}_{B_j}\,d\mu = \sum_{j=1}^m b_j\mu(B_j).$$

### 5.1.2 Intégration des fonctions à valeurs positives

On note $[0,+\infty] = [0,+\infty[ \cup \{+\infty\}$. On étend l'addition et la multiplication de $[0,+\infty[$ à $[0,+\infty]$ en posant :

(i) $\forall a \in [0,+\infty], \quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty,$

(ii) $\forall a \in [0,+\infty]\setminus\{0\}, \quad a \times (+\infty) = (+\infty)\times a = +\infty,$

(iii) $0\times(+\infty) = (+\infty)\times 0 = 0.$

On étend de même la relation d'ordre totale usuelle de $]0,+\infty[$ à $[0,+\infty]$ en disant simplement que pour tout $a \in [0,+\infty]$ on a $a \leqslant +\infty$.

On munit enfin $[0,+\infty]$ d'une topologie naturelle. Soient $a \in [0,+\infty]$ et $\mathcal{V} \subset [0,+\infty]$.

- Si $a \in \mathbb{R}_+$, on dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de $a$ dans $[0,+\infty]$ s'il contient un voisinage de $a$ dans $[0,+\infty[$.
- Si $a = +\infty$, on dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de $a$ dans $[0,+\infty]$ s'il contient $]b,+\infty[\cup\{+\infty\}$ pour un certain $b \in ]0,+\infty[$.

On appelle alors ouvert de $[0, +\infty]$ une partie de $[0, +\infty]$ qui est voisinage de chacun de ses éléments.

En particulier, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs (qui peut être vue comme une suite d'éléments de $[0, +\infty]$) tend vers $+\infty$ au sens habituel si et seulement si elle tend vers $+\infty$ dans $[0, +\infty]$, pour la topologie que l'on vient de définir. En particulier, une suite croissante dans $[0, +\infty]$ est toujours convergente.

Enfin, on munit $[0, +\infty]$ de la tribu borélienne correspondant à cette topologie.

**Proposition 5.7.** *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante de fonctions étagées à valeurs positives qui converge ponctuellement vers $f$.*

*Démonstration.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $\varphi_n : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ par

$$\forall t \in [0, +\infty], \quad \varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}E(2^n t) & \text{si } t \leqslant n, \\ n & t \geqslant n, \end{cases}$$

où $E$ désigne la partie entière. Cela définit une suite croissante de fonctions qui ne prennent chacune qu'un nombre fini de valeurs et telles que pour tout $t \in [0, +\infty]$ on a

$$\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} t.$$

Notant maintenant $f_n = \varphi_n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient bien une suite croissante de fonctions étagées sur $X$ et qui converge ponctuellement vers $f$. $\square$

**Définition 5.8.** Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On appelle intégrale de $f$ (sur $X$ et pour la mesure $\mu$) la quantité

$$\int_X f\,d\mu = \sup_{\substack{h\in\mathcal{E}_+(X,\mathcal{M})\\ h\leqslant f}} \int_X h\,d\mu \quad \in [0, +\infty].$$

Si $f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$, on retrouve bien l'intégrale de $f$ définie précédemment.

**Proposition 5.9.** *Soient $f, g : X \to [0, +\infty]$ mesurables et telles que $f \leqslant g$. Alors on a*

$$\int_X f\,d\mu \leqslant \int_X g\,d\mu.$$

**Théorème 5.10** (Théorème de la convergence monotone ou Théorème de Beppo-Levi)**.** *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables de $X$ dans $[0, +\infty]$. On note $f : X \to [0, +\infty]$ la limite ponctuelle de cette suite. Alors $f$ est mesurable et on a*

$$\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f\,d\mu.$$

*Démonstration.* La fonction $f$ est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. D'autre part la suite des intégrales de $f_n$ est croissante. Elle admet donc une limite $\ell \in [0, +\infty]$. En outre pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n \leqslant f$, donc

$$\int_X f_n\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu$$

puis, par passage à la limite,

$$\ell \leqslant \int_X f\,d\mu.$$

Soit $h \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ telle que $h \leqslant f$. On note

$$h = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbb{1}_{B_j}$$

avec $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0, +\infty[$ et $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{M}$. Soit $\gamma \in ]0, 1[$. On note $A_n$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $f_n(x) \geqslant \gamma h$. On a

$$A_n = \{x \in X \mid f_n(x) = +\infty\} \cup \{x \in X \mid f_n(x) \in [0, +\infty[ \text{ et } f_n(x) - \gamma h(x) \geqslant 0\},$$

donc $A_n$ est mesurable. Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a $A_n \subset A_{n+1}$. En outre, pour tout $x \in X$ on a

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) > \gamma h(x),$$

donc

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X.$$

On a alors

$$\ell \geqslant \int_X f_n \, d\mu \geqslant \int_{A_n} f_n \, d\mu \geqslant \gamma \int_{A_n} h \, d\mu = \gamma \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_n \cap B_j) \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(B_j) = \gamma \int_X h \, d\mu.$$

Ceci étant valable pour tout $\gamma \in ]0, 1[$ on obtient

$$\ell \geqslant \int_X h \, d\mu.$$

Ceci étant valable pour tout $h \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ tel que $h \leqslant f$ on obtient

$$\ell \geqslant \int_X f \, d\mu.$$

Cela conclut la démonstration. □

**Proposition 5.11.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables de $X$ dans $[0, +\infty]$ et $\lambda \geqslant 0$. Alors on a*

$$\int_X (f + \lambda g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \lambda \int_X g \, d\mu.$$

*Démonstration.* On considère des suites croissantes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ qui convergent vers $f$ et $g$, respectivement. Alors la suite $(f_n + \lambda g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})^{\mathbb{N}}$ est croissante et converge ponctuellement vers $f + \lambda g$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_X (f_n + \lambda g_n) \, d\mu = \int_X f_n \, d\mu + \lambda \int_X g_n \, d\mu.$$

D'après le théorème de convergence monotone, on obtient par passage à la limite

$$\int_X (f + \lambda g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \lambda \int_X g \, d\mu.$$ □

**Proposition 5.12.** *Soient $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables.*

*(i) Pour tout $a > 0$ on a*

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\}) \leqslant \frac{1}{a} \int_X f \, d\mu.$$

*(ii) On a* $\displaystyle\int_X f\,d\mu = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *presque partout.*

*(iii) Si* $\displaystyle\int_X f\,d\mu < +\infty$ *alors* $f < +\infty$ *presque partout.*

*(iv) Si* $f = g$ *presque partout, alors*

$$\int_X f\,d\mu = \int_X g d\mu.$$

*Démonstration.* (i) Soit $a > 0$. On note $A = f^{-1}([a, +\infty])$. Alors $a\mathbb{1}_A \leqslant f$, donc

$$\int_X f\,d\mu \geqslant \int_X a\mathbb{1}_A\,d\mu = a\mu(A).$$

(ii) On suppose que $f = 0$ presque partout. Soit $h \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{M})$ telle que $h \leqslant f$. Alors $h = 0$ presque partout, donc $\int_X h\,d\mu = 0$. On en déduit que $\int_X f\,d\mu = 0$. Inversement, supposons que $\int_X f\,d\mu = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $A_n = f^{-1}\big(\big[\frac{1}{n}, +\infty\big]\big)$. D'après la proposition précédente on a $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion. On a alors

$$\mu(f^{-1}(]0, +\infty])) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

(iii) On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $f(x) = +\infty$ pour tout $x \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors $n\mathbb{1}_A \leqslant f$, donc

$$\int_X f\,d\mu \geqslant n\mu(A).$$

Cela prouve que

$$\int_X f\,d\mu = +\infty.$$

(iv) On note $h_+ = \max(f, g)$ et $h_- = \min(f, g)$. Alors $h_+ - h_-$ est à valeurs positives et presque partout nulle, d'où

$$\int_X h_+\,d\mu = \int_X h_-\,d\mu + \int_X (h_+ - h_-)\,d\mu = \int_X h_-\,d\mu.$$

D'autre part, $h_- \leqslant f \leqslant h_+$, donc

$$\int_X h_-\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu \leqslant \int_X h_+\,d\mu,$$

soit

$$\int_X f\,d\mu = \int_X h_-\,d\mu.$$

De même,

$$\int_X g\,d\mu = \int_X h_-\,d\mu.$$

D'où

$$\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu. \qquad \square$$

### 5.1.3 Intégration des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Étant donnée une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, on note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. Ainsi $f_+$ et $f_-$ sont à valeurs positives et on a $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$. On rappelle que si $f$ est mesurable, alors $f_+$, $f_-$ et $|f|$ le sont également.

*Remarque* 5.13. Si $f$ est mesurable on a

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu.$$

Par monotonie, on obtient en particulier que

$$\int_X f_+ \, d\mu \leqslant \int_X |f| \, d\mu \quad \text{et} \quad \int_X f_- \, d\mu \leqslant \int_X |f| \, d\mu.$$

**Définition 5.14.** Soit $f$ une fonction de $X$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est intégrable (sur $X$, par rapport à $\mu$) si elle est mesurable et

$$\int_X |f| \, d\mu < +\infty.$$

Dans ce cas on pose

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**Proposition 5.15.** *(i) $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

*(ii) L'application $f \mapsto \int_X f \, d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

*(iii) Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu.$$

*(iv) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ telles que $f \leqslant g$. Alors on a*

$$\int_X f \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu.$$

*(v) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ telles que $f = g$ presque partout. Alors on a*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

*Démonstration.* • Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait que $f + g$ et $\lambda g$ sont mesurables. En outre, $|f + g| \leqslant |f| + |g|$ et $|\lambda f| = |\lambda| \, |f|$. On en déduit que $f + g$ et $\lambda g$ sont intégrables.

• On a

$$(\lambda f)_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0, \\ \lambda f_+ & \text{si } \lambda > 0, \\ -\lambda f_- & \text{si } \lambda < 0, \end{cases}$$

et

$$(\lambda f)_- = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0, \\ \lambda f_- & \text{si } \lambda > 0, \\ -\lambda f_+ & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Si $\lambda \leqslant 0$ on a alors

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \int_X (\lambda f)_+ \, d\mu - \int_X (\lambda f)_- \, d\mu = \int_X |\lambda| \, f_- \, d\mu - \int_X |\lambda| \, f_+ \, d\mu$$
$$= |\lambda| \left( \int_X f_- \, d\mu - \int_X f_+ \, d\mu \right) = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

On conclut de même si $\lambda \geqslant 0$.

- Pour la somme, on écrit

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

ce qui donne

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+.$$

Par linéarité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs positives, on a

$$\int_X (f+g)_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu + \int_X g_- \, d\mu = \int_X (f+g)_- \, d\mu + \int_X f_+ \, d\mu + \int_X g_+ \, d\mu.$$

Ainsi,

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X (f+g)_+ \, d\mu - \int_X (f+g)_- \, d\mu$$
$$= \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu + \int_X g_+ \, d\mu - \int_X g_- \, d\mu$$
$$= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

- On procède de façon analogue pour la monotonie. Si $f \leqslant g$ on a

$$f_+ - f_- \leqslant g_+ - g_-,$$

soit

$$f_+ + g_- \leqslant g_+ + f_-.$$

Cela donne

$$\int_X f_+ \, d\mu + \int_X g_- \, d\mu \leqslant \int_X g_+ \, d\mu + \int_X g_- \, d\mu,$$

et donc

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \leqslant \int_X g_+ \, d\mu - \int_X g_- \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

- Pour l'inégalité triangulaire on écrit simplement

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \right| \leqslant \int_X f_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu.$$

- Pour la dernière propriété on écrit

$$\left| \int_X f \, d\mu - \int_X g \, d\mu \right| = \left| \int_X (f-g) \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f - g| \, d\mu = 0.$$

Cela conclut la démonstration. □

Du fait que l'intégrale ne dépend pas de ce qui se passe sur un ensemble négligeable, on peut définir l'intégrale d'une fonction qui n'est définie que presque partout :

**Définition 5.16.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$ et $f$ une fonction mesurable de $X \backslash E$ dans $\mathbb{R}$ (on peut donner une définition analogue pour une fonction à valeurs dans $[0, +\infty]$). Pour $x \in X$ on pose

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \backslash E, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Alors on dit que $f$ est intégrable sur $X$ si $\tilde{f}$ l'est et dans ce cas on pose

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \tilde{f} \, d\mu.$$

### 5.1.4 Intégration des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

**Définition 5.17.** Soit $f$ une fonction de $X$ dans $\mathbb{C}$. On dit que $f$ est intégrable (sur $X$, par rapport à $\mu$) si elle est mesurable et

$$\int_X |f| \, d\mu < +\infty.$$

Dans ce cas on pose

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) \, d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $X$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

*Remarque* 5.18. Si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont mesurables de $X$ dans $\mathbb{R}$. En outre si $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$ alors $\int_X |\mathrm{Re}(f)| \, d\mu < +\infty$ et $\int_X |\mathrm{Im}(f)| \, d\mu < +\infty$, donc la définition a bien un sens.

**Proposition 5.19.** *(i) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

*(ii) L'application $f \mapsto \int_X f \, d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

*(iii) Pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu.$$

*(iv) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ tels que $f = g$ presque partout. Alors on a*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

*Démonstration.* Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Par linéarité des parties réelles et imaginaires et linéarité de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles on a

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) \, d\mu &= \int_X \mathrm{Re}(f + g) \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f + g) \, d\mu \\ &= \int_X \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) \, d\mu + \int_X \mathrm{Re}(g) \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(g) \, d\mu \\ &= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\int_X (\lambda f)\, d\mu &= \int_X \operatorname{Re}(\lambda f)\, d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(\lambda f)\, d\mu \\
&= \int_X (\alpha \operatorname{Re}(f) - \beta \operatorname{Im}(f))\, d\mu + i \int_X (\beta \operatorname{Re}(f) + \alpha \operatorname{Im}(f))\, d\mu \\
&= (\alpha + i\beta) \left( \int_X \operatorname{Re}(f)\, d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(f)\, d\mu \right) \\
&= \lambda \int_X f\, d\mu.
\end{aligned}$$

Cela prouve la première assertion. Pour la seconde, on considère un argument $\theta$ de $\int_X f\, d\mu$. On a alors

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| = e^{-i\theta} \int_X f\, d\mu = \int_X e^{-i\theta} f\, d\mu.$$

Comme il s'agit d'égalités entre nombres réels positifs, on ne les modifie pas en prenant la partie réelle puis la valeur absolue de chaque terme. En appliquant la définition d'une intégrale complexe puis l'inégalité triangulaire pour une intégrale d'une intégrale réelle on obtient

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| = \left| \operatorname{Re} \left( \int_X e^{-i\theta} f\, d\mu \right) \right| = \left| \int_X \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)\, d\mu \right| \leqslant \int_X \left| \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \right|\, d\mu \leqslant \int_X |f|\, d\mu.$$

Cela prouve l'inégalité triangulaire. On déduit la dernière assertion comme dans le cas réel. □

On peut de la même façon intégrer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de l'une des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$. Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$ et $f = (f_1, \dots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$, alors $f$ est mesurable si et seulement si les $f_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ le sont. Dans ce cas la fonction $f \mapsto \|f\|$ est également mesurable. En outre, si

$$\int \|f\|\, d\mu < +\infty$$

alors les fonctions $f_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ sont intégrable et on pose

$$\int_X f\, d\mu = \left( \int_X f_1\, d\mu, \cdots, \int_X f_n\, d\mu \right).$$

Cela définit une application $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à $f$, et on a l'inégalité triangulaire

$$\left\| \int_X f\, d\mu \right\| \leqslant \int_X \|f\|\, d\mu$$

(ce n'est pas complètement évident dans le cas de la norme euclidienne).

## 5.2 Exemples d'espaces mesurés et intégrales correspondantes

Dans ce paragraphe on reprend les exemples de base de mesures et on regarde ce que donne l'intégration de fonctions contre ces mesures. On utilisera par ailleurs l'intégration pour définir de nouvelles mesures, les mesures à densité.

### 5.2.1 Mesure de Dirac

On commence par l'un des exemples les plus simples de mesures, la mesure de Dirac en un point.

La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice (on pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition 5.23 ci-dessous).

**Proposition 5.20.** *Soit $X$ un ensemble non vide et $x_0 \in X$. Alors toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$ et on a*

$$\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

### 5.2.2 Restriction de l'intégrale sur une partie mesurable

En guise de second exemple, on considère la restriction de l'intégrale à une partie $E$ de $X$. Plus précisément, on vérifie qu'on définit une intégrale sur $E$ en étendant simplement par 0 les fonctions définies sur $E$. Par exemple, à partir de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathbb{R}$ on obtient par restriction une mesure de Lebesgue sur n'importe quel intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et le lien entre l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale de Lebesgue sur $I$ sera bien celui qu'on imagine.

**Proposition 5.21.** *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $E \in \mathcal{M}$.*

*(i) On note*

$$\mathcal{M}_E = \{A \in \mathcal{M} \mid A \subset E\} = \{B \cap E, B \in \mathcal{M}\}.$$

*Cela définit une tribu $\mathcal{M}_E$ sur $E$.*

*(ii) Pour $A \in \mathcal{M}_E$ on note*

$$\mu_E(A) = \mu(A).$$

*Cela définit une mesure $\mu_E$ sur $E$.*

*(iii) Soit $f$ une fonction mesurable de $(E, \mathcal{M}_E)$ dans $[0, +\infty]$. On note $\mathbb{1}_E^* f$ la fonction qui à $x \in X$ associe*

$$(\mathbb{1}_E^* f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

*Alors $\mathbb{1}_E^* f$ est mesurable sur $X$ et on a*

$$\int_E f \, d\mu_E = \int_X \mathbb{1}_E^* f \, d\mu.$$

*(iv) Soit $f$ une fonction mesurable de $(E, \mathcal{M}_E)$ dans $\mathbb{R}$. On définit $\mathbb{1}_E^* f$ comme précédemment. Alors $f$ est intégrable sur $(E, \mathcal{M}_E, \mu_E)$ si et seulement si $\mathbb{1}_E^* f$ l'est sur $(X, \mathcal{M}, \mu)$, et dans ce cas on a*

$$\int_E f \, d\mu_E = \int_X \mathbb{1}_E^* f \, d\mu.$$

A nouveau, la démonstration est laissée en exercice.

### 5.2.3 Cas de la mesure de Lebesgue

Les deux exemples précédents nous ont permis de manipuler la nouvelle définition de l'intégrale. On aborde maintenant le cas qui nous intéresse plus particulièrement, à savoir l'intégrale correspondant à la mesure de Lebesgue. On vérifie que l'intégrale que l'on vient de construire coïncide bien avec l'intégrale que l'on connaissait pour une fonction continue sur un segment (on peut en fait le faire pour toute fonction intégrable au sens de Riemann).

**Proposition 5.22.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f$ une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$. Alors $f$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ (c'est-à-dire intégrable sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$) et on a*

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Puisque ces deux quantités coïncident, on pourra utiliser la notation de droite pour désigner l'intégrale de gauche.

Cette proposition assure que tous les calculs d'intégrales vus dans $\mathbb{R}$ pour des fonctions régulières (théorème fondamental de l'analyse, intégrations par parties, etc.) sont encore valables pour l'intégrale de Lebesgue.

*Démonstration.* On commence par observer que $f$ est borélienne car continue sur $[a, b]$. En outre elle est bornée, donc

$$\int_{[a,b]} |f| \, d\lambda \leqslant (b - a) \|f\|_\infty < +\infty.$$

Cela prouve que $f$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est uniformément continue sur $[a, b]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ tels que $|x - y| \leqslant \delta$ on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Quitte à choisir $\delta$ plus petit, on peut supposer que si

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

une subdivision de $[a, b]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) de pas inférieur ou égal à $\delta > 0$ et si pour $j \in [\![1, n]\!]$ on considère $\xi_j \in ]x_{j-1}, x_j[$, alors

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leqslant \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[a,b]} f \, d\lambda - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \left( \int_{[a,b]} f \mathbb{1}_{]x_{j-1}, x_j[} \, d\lambda - f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right) \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \left| \int_{]x_{j-1}, x_j[} f \, d\lambda - f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \int_{]x_{j-1}, x_j[} |f - f(\xi_j)| \, d\lambda \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \int_{]x_{j-1}, x_j[} \frac{\varepsilon}{b-a} \, d\lambda \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela prouve que
$$\left|\int_{[a,b]} f\,d\lambda - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant 2\varepsilon.$$
Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien égalité. □

### 5.2.4 Mesure de comptage et séries

On munit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de comptage $\mu$. Soit $u$ une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n = u(n)$. Alors la fonction $u$ est intégrable sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ si et seulement si
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty,$$
et dans ce cas on a
$$\int_{\mathbb{N}} u\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
On fait cette remarque pour montrer que la théorie des séries peut être incluse dans cette théorie générale de l'intégration. Néanmoins, dans ce contexte on continuera d'utiliser le vocabulaire et les notations des séries et on ne parlera jamais d'intégrale sur $\mathbb{N}$.

***Exercice* 1.** Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On considère sur $\mathbb{N}$ la mesure à poids $\mu_a$ définie au chapitre 4 ( **(voir l'exemple ex-mesure-comptage-poids)**) . Soit $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $f$ est intégrable sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_a)$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n |f_n|$, et dans ce cas
$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f_n.$$

### 5.2.5 Mesures définies par une densité

Par rapport à la mesure de comptage usuelle sur $\mathbb{N}$, la mesure de comptage à poids $\mu_a$ définie au chapitre 4 ( **(voir l'exemple ex-mesure-comptage-poids)**) ne donne pas le même poids à chaque point de $\mathbb{N}$. On peut vouloir faire la même chose dans d'autre contexte. Par exemple, pour une intégrale sur $\mathbb{R}$, on peut vouloir donner plus de poids à un intervalle plutôt qu'à un autre même s'ils ont même longueur. On doit donc construire de nouvelles mesures, et pour cela on va utiliser l'intégrale.

**Proposition 5.23.** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesurable et $w$ une fonction mesurable de $X$ dans $[0, +\infty]$. Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on pose*
$$\mu_w(A) = \int_A w\,d\mu = \int_X \mathbb{1}_A w\,d\mu.$$

*(i)* *$\mu_w$ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$.*

*(ii)* *Soit $f$ une fonction mesurable de $X$ dans $[0, +\infty]$. Alors $fw$ est mesurable sur $X$ et*
$$\int_X f\,d\mu_w = \int_X fw\,d\mu.$$

*(iii)* *Soit $f$ une fonction mesurable de $X$ dans $\mathbb{C}$. Alors $f$ est intégrable sur $(X, \mathcal{M}, \mu_w)$ si et seulement si $fw$ est intégrable sur $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et dans ce cas*
$$\int_X f\,d\mu_w = \int_X fw\,d\mu.$$

*Démonstration.* • L'application $\mu_w$ est bien définie de $\mathcal{M}$ dans $[0, +\infty]$. On a $\mu_w(\varnothing) = \int_X 0\, d\mu = 0$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables deux à deux disjointes on a par le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}\mu_w\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} w\, d\mu = \int_X \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{A_n} w\, d\mu \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_X \mathbb{1}_{A_n} w\, d\mu = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mu_w(A_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_w(A_n).\end{aligned}$$

Cela prouve que $\mu_A$ est bien une mesure sur $(X, \mathcal{M})$.
• Puisque $f$ est mesurable, $fw$ est mesurable comme produit de deux fonctions mesurables. L'égalité est vraie par définition de $\mu_w$ si $f$ est l'indicatrice d'une partie mesurable $A$ de $X$. Par linéarité de l'intégrale (et du produit par $w$), elle est donc vraie pour les fonctions étagées. Pour le cas général, on considère une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge vers $f$. Pour tout $n$ on a alors

$$\int_X f_n\, d\mu_w = \int_X f_n w\, d\mu.$$

D'après le théorème de convergence monotone, on obtient alors l'égalité attendue par passage à la limite.
• On considère maintenant une fonction mesurable $f$ de $X$ dans $\mathbb{R}$. Comme précédemment, $fw$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. D'après (ii) on a

$$\int_X |f|\, d\mu_w = \int_X |f|\, w\, d\mu,$$

donc $f$ est intégrable sur $(X, \mathcal{M}, \mu_w)$ si et seulement si $fw$ l'est sur $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Et dans ce cas, notant $f_+$ et $f_-$ les parties positives et négatives de $f$ on obtient, toujours d'après (ii),

$$\int_X f\, d\mu_w = \int_X f_+\, d\mu_w - \int_X f_-\, d\mu_w = \int_X f_+ w\, d\mu - \int_X f_- w\, d\mu = \int_X f w\, d\mu. \qquad \square$$

*Exemple* 5.24. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on pose

$$\mu(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_A e^{-x^2}\, dx.$$

Cela définit une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. En outre on observe que si les intervalles $[n, n+1]$ sont tous de longueur 1, la suite $(\mu([n, n+1]))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Cette mesure donne plus de poids au valeurs proche de 0 qu'aux grandes valeurs.

## 5.3 Passage à la limite sous l'intégrale

Le but de ce paragraphe est de montrer des résultat reliant l'intégrale de la limite d'une suite de fonctions avec la limite des intégrales de ces fonctions. On a déjà mentionné en introduction le fait qu'une propriété telle que (5.1) ne peut pas être vraie en général et qu'un théorème de passage à la limite sous l'intégrale doit nécesserement avoir une hypothèse qui exclut les contre-exemples (5.2). Pour toute cette section on fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

### 5.3.1 Théorème de convergence monotone

On a déjà montré au paragraphe 5.1.2 le théorème de convergence monotone. On en rappelle l'énoncé ici.

**Théorème 5.25** (Théorème de la convergence monotone ou Théorème de Beppo-Levi)**.** *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables de $X$ dans $[0,+\infty]$. Alors $f_n$ converge simplement vers une fonction mesurable $f : X \to [0,+\infty]$ et on a*

$$\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f \, d\mu.$$

Le théorème de convergence monotone s'applique directement aux séries de fonctions à valeurs positives. Cette version est également appelée théorème de convergence monotone.

**Corollaire 5.26.** *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $X$ dans $[0,+\infty]$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ définit une fonction mesurable de $X$ dans $[0,+\infty]$ et on a*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

*Remarque* 5.27. La limite du théorème 5.25 ou la série du corollaire 5.26 peuvent prendre la valeurs $+\infty$.

### 5.3.2 Lemme de Fatou

On donne maintenant un nouveau résultat de passage à la limite sous l'intégrale. Par rapport au théorème de convergence monotone, on retire l'hypothèse de monotonie, mais la conclusion est plus faible que celle attendue. En particulier ce résultat inclut les cas donnés en (5.2).

**Théorème 5.28** (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $X$ dans $[0,+\infty]$. Alors on a*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

*Démonstration.* La suite $(\inf_{k\geqslant n} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. Chacune de ces fonctions est mesurable, et par le théorème de convergence monotone on a

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} f_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \inf_{k\geqslant n} f_k \, d\mu.$$

Pour tout $j \geqslant n$ on a $\inf_{k\geqslant n} f_k \leqslant f_j$, donc

$$\int_X \inf_{k\geqslant n} f_k \, d\mu \leqslant \int_X f_j \, d\mu.$$

En prenant l'infimum sur $j \geqslant n$ on obtient

$$\int_X \inf_{k\geqslant n} f_k \, d\mu \leqslant \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k \, d\mu. \tag{5.3}$$

D'où le résultat. □

*Remarque* 5.29. Il peut y avoir inégalité stricte en (5.3) et donc pour l'inégalité donnée par le lemme de Fatou. C'est par exemple le cas pour tous les contre-exemples (5.2). On peut également considérer l'exemple suivant. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n = \mathbb{1}_{[0,1]}$ si $n$ est pair et $f_n = \mathbb{1}_{[-1,0[}$ si $n$ est impair. Alors on a

$$\liminf_{n \to +\infty} f_n = 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \liminf_{n \to +\infty} f_n \right) d\lambda < \liminf_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda.$$

*Remarque* 5.30. L'hypothèse de positivité est nécessaire pour le lemme de Fatou. En effet, si pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n = -\frac{\mathbb{1}_{[0,n]}}{n}$, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\lambda = \int_X 0 \, d\lambda = 0$$

et

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \liminf_{n \to +\infty} (-1) = -1.$$

### 5.3.3 Théorème de convergence dominée

On s'intéresse maintenant à la version qui sera en fait la plus souvent utile en pratique. Pour le prochain résultat on va affaiblir la notion de convergence presque partout. Puisque les intégrales ne dépendent pas de ce qu'il se passe sur un ensemble de mesure nulle, les résultats sont en fait inchangés si les hypothèses sont vraies seulement presque partout (en fait, cette observation vaut déjà pour les théorèmes précédents).

**Définition 5.31.** Soient $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, et $f$ des fonctions de $X$ dans $\mathbb{C}$. On dit que $f_n$ converge simplement presque partout vers $f$ si pour presque tout $x \in X$ on a

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x).$$

*Exemple* 5.32. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \cos(x)^n$. Alors $f_n$ converge simplement presque partout vers la fonction nulle. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$ on a $|\cos(x)| < 1$ et donc $f_n(x) \to 0$ quand $n$ tend vers $+\infty$. On note que pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ on a $f_n(x) = 1 \to 1$ tandis que pour $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ on a $f_n(x) = (-1)^n$, donc la suite $(f_n(x))$ n'a même pas de limite.

*Remarque* 5.33. On remarque que si $E$ est un ensemble négligeable de $\mathbb{R}$, alors la suite $(f_n)$ de l'exemple précédent converge aussi presque partout vers la fonction indicatrice de $E$. Cela permet d'une part de voir que la limite au sens de la convergence simple presque partout n'est pas unique. D'autre part, en prenant une partie $E$ qui n'est pas mesurable on voit que la limite simple presque partout d'une suite de fonctions mesurables n'est pas nécessairement mesurable. Il faudra donc être prudent, cette notion de limite simple presque partout apportera de la souplesse qui sera bienvenue pour les applications, mais en contrepartie on devra composer avec ces nouvelles subtilités de la théorie.

**Théorème 5.34** (Théorème de convergence dominée)**.** *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement presque partout vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose qu'il existe une* *fonction intégrable $g : X \to [0, +\infty]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a pour presque tout $x \in X$*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x). \tag{5.4}$$

*Alors $f_n$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f$ est intégrable, et on a*

$$\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f \, d\mu.$$

On rappelle que si $f_n$ converge simplement vers $f$ (partout) alors la limite $f$ est automatiquement mesurable.

*Démonstration.* • D'après (5.4), $f_n$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, par passage à la limite dans (5.4) on a aussi $|f| \leqslant g$, donc $f$ est également intégrable sur $X$.

• On suppose que $f_n$ converge simplement vers $f$ et $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite de fonctions positives mesurables $(2g - |f_n - f|)$. D'après le lemme de Fatou et par linéarité de l'intégrale on a

$$\begin{aligned}
\int_X 2g \, d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\
&= \int_X 2g \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-|f_n - f|) \, d\mu.
\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X (-|f_n - f|) \, d\mu = 0.$$

Puisque

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f_n - f| \, d\mu,$$

on en déduit que

$$\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f \, d\mu. \qquad \square$$

• On considère maintenant le cas général. Soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ pour tout $x \in X \backslash A$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $B_n \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(B_n) = 0$ et $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in X \backslash B_n$. Enfin on note $E = A \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Alors $E \in \mathcal{M}$ et $\mu(E) = 0$ et le théorème de convergence dominée s'applique au fonctions $\mathbb{1}_{X\backslash E} f_n$ et $\mathbb{1}_{X\backslash E} f$ (dominées par $g$). Ainsi,

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_{X\backslash E} f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X \mathbb{1}_{X\backslash E} f \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

D'où le résultat.

*Remarque* 5.35. On observe que la fonction $f$ du théorème est intégrable, donc contrairement au théorème de convergence monotone, le théorème de convergence dominée ne permet pas de conclure qu'une suite d'intégrales tend vers $+\infty$.

*Exemple* 5.36. Pour $n \geqslant 2$ on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^n} \, dx.$$

L'intégrale $I_n$ est bien définie pour tout $n \geqslant 2$ (à justifier). Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\frac{\cos(x)}{1+x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [0,1[, \\ \frac{\cos(x)}{2} & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En outre pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 0$ on a

$$\left| \frac{\cos(x)}{1+x^n} \right| \leqslant g(x),$$

où on a posé

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Puisque la fonction $g$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on obtient par le théorème de convergence dominée que

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \cos(x)\,dx = \sin(1).$$

*Exemple* 5.37. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue. Alors on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\pi x)^n\,d\lambda(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on note $f_n(x) = f(x)\cos(\pi x)^n$. On commence par observer que chacune des intégrales est bien définie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n$ est mesurable comme produit d'une fonction mesurable et d'une fonction continue et donc borélienne. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|f_n(x)| \leqslant |f(x)|, \tag{5.5}$$

donc par comparaison on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|\,d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\,d\lambda < +\infty.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ on a $|\cos(\pi x)| < 1$ donc

$$f_n(x) = f(x)\cos(\pi x)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puisque $\mathbb{Z}$ est de mesure de Lebesgue nulle (car dénombrable), la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement presque partout vers 0. Or d'après (5.5) on peut appliquer le théorème de converge dominée. Cela donne

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} 0\,d\lambda = 0.$$

On énonce maintenant la version du théorème de convergence dominée adaptée aux séries de fonctions.

**Corollaire 5.38.** *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbb{C}$ telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\,d\mu < +\infty.$$

*Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge pour presque tout $x \in X$, sa somme est intégrable sur $X$ et on a*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\,d\mu.$$

*Démonstration.* La fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ est mesurable et d'après le théorème de convergence monotone

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

On a alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty$ pour presque tout $x \in X$. En particulier il existe $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est (absolument) convergente pour tout $x \in X \backslash E$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ on note

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Pour $x \in X$ on note

$$S(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) & \text{si } x \in X\backslash E, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Alors $S$ est mesurable et $S_n$ converge simplement presque partout vers $S$, et pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ on a

$$|S_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(x)| \, .$$

D'après le théorème de convergence dominée on obtient alors

$$\int_X S \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_X f_k \, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_X f_k \, d\mu.$$

En outre, cette dernière série est bien (absolument) convergente puisque

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left| \int_X f_k \, d\mu \right| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_X |f_k| \, d\mu < +\infty. \qquad \square$$

## 5.4 Intégrales à paramètre

On s'intéresse dans cette partie aux intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre. Alors que dans la section précédente les fonctions dépendaient d'un paramètre entier $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse maintenant aux fonctions dépendant d'un paramètre continu.

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : X \times I \to \mathbb{C}$. Lorsqu'elle est bien définie, on s'intéresse à la fonction $F : I \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(y) = \int_X f(x, y) \, d\mu(x). \tag{5.6}$$

En guise d'exemple, on considérera la fonction Gamma. Pour $s > 0$ on pose

$$\Gamma(s) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{s-1} e^{-x} \, dx. \tag{5.7}$$

Le but de ce paragraphe est d'étudier la régularité de telles fonctions définies par une intégrale. En passant, on discutera le lien entre les intégrales de Riemann généralisées et l'intégration au sens de Lebesgue.

### 5.4.1 Limites et continuité pour des intégrales à paramètre

On commence par discuter le théorème de convergence dominée pour des fonctions dépendant d'un paramètre continu. On les obtient simplement à partir des versions usuelles via la caractérisation séquentielle des limites. Cela permet d'étudier des limites pour des fonctions de la forme (5.6). On en déduira alors les propriétés de régularité.

**Théorème 5.39** (Théorème de convergence dominée)**.** *Soient $y_0 \in \overline{I}$ et $\ell : X \to \mathbb{C}$. On suppose que*

*(i) la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est mesurable pour tout $y \in I$ et $\ell$ est mesurable,*

*(ii) pour $\mu$-presque tout $x \in X$ on a*

$$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0]{} \ell(x),$$

*(iii) il existe $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $y \in I$ on a, pour $\mu$-presque tout $x \in X$,*

$$|f(x,y)| \leqslant g(x). \tag{5.8}$$

*Alors $F$ est bien définie sur $I$, $\ell$ est intégrable sur $X$, et on a*

$$F(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} \int_X \ell(x)\, d\mu(x).$$

On note que dans ce théorème $y_0$ peut également être $+\infty$ ou $-\infty$.

*Démonstration.* D'après (i) et (iii), l'application $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $X$ pour tout $y \in I$, donc la fonction $F$ est bien définie. En outre, par passage à la limite dans (5.8), on a $|\ell(x)| \leqslant g(x)$ pour presque tout $x \in X$, donc $\ell$ est également intégrable. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $I$ qui tend vers $y_0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et presque tout $x \in X$ on a

$$|f(x,y_n)| \leqslant g(x).$$

D'autre part $f(x,y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell(x)$ pour presque tout $x$, donc par le théorème de convergence dominée on a

$$F(y_n) = \int_X f(x,y_n) d\mu(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_X \ell(x)\, d\mu(x).$$

On conclut par le critère séquentiel des limites. □

La continuité n'étant rien d'autre qu'une proprité sur les limites, on en déduit immédiatement un résultat de continuité sous l'intégrale.

**Théorème 5.40** (Théorème de continuité sous l'intégrale)**.** *On suppose que*

*(i) pour tout $y \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est mesurable,*

*(ii) pour $\mu$-presque tout $x \in X$ la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue,*

*(iii) il existe $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $y \in I$ on a, pour $\mu$-presque tout $x \in X$,*

$$|f(x,y)| \leqslant g(x).$$

*Alors $F$ est bien définie et est continue sur $I$.*

*Démonstration.* Soit $y_0 \in I$. D'après le théorème de convergence dominée appliqué avec $\ell : x \mapsto f(x,y_0)$, on obtient que $F$ est bien définie et est continue en $y_0$. Ceci étant valable pour tout $y_0 \in I$, $f$ est continue sur $I$. □

*Remarque* 5.41. Les théorèmes 5.39 et 5.40 sont en fait valables en remplaçant l'intervalle $I$ (muni de la topologie usuelle) par n'importe quel espace métrique.

*Exemple* 5.42. On considère la fonction Gamma (5.7). Pour tout $s > 0$ la fonction $x \mapsto x^{s-1}e^{-x}$ est continue (et donc borélienne) et à valeurs positives. Soient $a, b > 0$ tels que $a < b$. Pour $x > 0$ et $s \in [a, b]$ on a

$$\left|x^{s-1}e^{-x}\right| \leqslant g(x) = \begin{cases} x^{a-1}e^{-x} & \text{si } x \leqslant 1, \\ x^{b-1}e^{-x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La fonction $g$ est continue sur $]0, +\infty[$, on a $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{a-1}$ et, par croissance comparée, $g(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(e^{-\frac{x}{2}})$. La fonction $g$ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de continuité sous l'intégrale, $\Gamma$ est continue sur $[a, b]$. Ceci étant valable pour tout segment de $]0, +\infty[$, on obtient que $\Gamma$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On peut également donner une version continue sur théorème de convergence monotone.

**Théorème 5.43.** *On suppose que $I = [a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in ]a, +\infty]$. On suppose que pour tout $x \in X$ la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est positive et croissante sur $[a, b[$ et on note $\ell(x) \in [0, +\infty] = \lim_{y\to b} f(x, y)$. Alors $\ell$ est mesurable sur $X$ et*

$$\int_X f(x, y)\, d\mu(x) \xrightarrow[y\to b]{} \int_X \ell(x)\, d\mu(x).$$

On a un énoncé analogue si $I$ est de la forme $]a, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in [-\infty, b[$ et $y$ tend vers $a$. Dans ce cas il faut que les fonctions $y \mapsto f(x, y)$ soit décroissantes.

On peut également obtenir une conclusion analogue si l'hypothèse n'est valable que pour presque tout $x \in X$.

*Démonstration.* Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[a, b[$ qui croit vers $b$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n(x) = f(x, y_n)$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers $\ell$. Par le théorème 5.25 on a

$$\int_X f(x, y_n)\, d\mu(x) = \int_X f_n(x)\, d\mu(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X \ell(x)\, d\mu(x).$$

On conclut par le critère séquentiel des limites. □

*Exemple* 5.44. On revient sur l'exemple de la fonction Gamma et on s'intéresse aux limites en 0 et en $+\infty$. Pour $x > 1$ la fonction $s \mapsto x^{s-1}e^{-x}$ est positive et croit vers $+\infty$, donc par le théorème de convergence monotone on a

$$\Gamma(s) \geqslant \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\, dx \xrightarrow[s\to+\infty]{} +\infty.$$

De même, pour $x \in ]0, 1[$ la fonction $s \mapsto x^{s-1}e^{-x}$ est positive, décroissante, et tend vers $+\infty$ en 0. On obtient

$$\Gamma(s) \geqslant \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\, dx \xrightarrow[s\to 0]{} +\infty$$

(si $s_n > 0$ décroît vers 0 alors $x^{s_n-1}e^{-x}$ croît vers $\frac{e^x}{x}$ pour tout $x \in ]0, 1[$). On note que dans ce dernier cas on peut conclure directement en écrivant

$$\Gamma(s) \geqslant e^{-1}\int_0^1 x^{s-1}\, dx = \frac{e^{-1}}{s} \xrightarrow[s\to 0]{} +\infty.$$

### 5.4.2 Interlude : lien avec les intégrales de Riemann généralisées

Avant de poursuivre l'étude des intégrales à paramètres, on utilise les résultats de passage à la limite pour faire le lien entre les intégrales de Riemann généralisées et les intégrales de Lebesgue sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in ]a, +\infty]$ (on pourrait de la même façon considérer un intervalle ouvert à gauche). On considère une fonction $f$ continue (par morceaux) sur $[a, b[$. Pour tout $x \in ]a, b[$, l'intégrale de $f$ sur le segment $[a, b]$ est bien définie, que ce soit au sens de Riemann ou de Lebesgue, et les deux intégrales coïncident. On dit que l'intégrale de $f$ sur $[a, b[$ (au sens de Riemann) est convergente si la limite

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt$$

existe, et dans ce cas on note

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

cette limite. Pour l'intégrale au sens de Lebesgue il n'y a pas de passage à la limite, la définition 5.14 a un sens directement sur $[a, b[$, et selon si $f$ vérifie ces conditions elle sera dite intégrable sur $[a, b[$ ou non. Le lien entre ces deux intégrales est le suivant.

**Proposition 5.45.** *Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in ]a, +\infty]$ et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente (au sens de Riemann) si et seulement si $f$ est intégrable sur $[a, b[$ (au sens de Lebesgue), et dans ce cas la valeur de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'intégrale (au sens de Lebesgue) de $f$ sur $[a, b[$.*

*Démonstration.* Pout tout $x \in [a, b[$ la fonction $t \mapsto \mathbb{1}_{[a,x]}(t)\,|f(t)|$ est mesurable sur $[a, b[$ et pour tout $t \in [a, b[$ la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{[a,x]}(t)\,|f(t)|$ est positive et croît vers $|f(t)|$, donc par le théorème de convergence monotone on a

$$\int_a^x |f(t)|\,dt = \int_{[a,b[} \mathbb{1}_{[a,x]}\,|f|\,d\lambda \xrightarrow[x \to b]{} \int_{[a,b[} |f|\,d\lambda.$$

D'où la première assertion.

On suppose maintenant que $f$ est effectivement intégrable sur $[a, b[$. La fonction $t \mapsto \mathbb{1}_{[a,x]}(t)f(t)$ est mesurable pour tout $x \in [a, b[$ et converge simplement vers $f(t)$ quand $x$ tend vers $b$. En outre pour tout $x \in [a, b[$ on a

$$\left|\mathbb{1}_{[a,x]}(t)f(t)\right| \leqslant |f(t)|\,,$$

et $|f|$ est intégrable sur $[a, b[$. D'après le théorème de convergence dominée on a alors

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_{[a,b[} \mathbb{1}_{[a,x]} f\,d\lambda \xrightarrow[x \to b]{} \int_{[a,b[} f\,d\lambda. \qquad \square$$

Comme pour l'intégrale sur un segment, comme les deux valeurs coïncident on pourra noter $\int_a^b f(t)\,dt$ l'intégrale de $f$ sur $[a, b[$.

Ce résultat ne prend pas en compte les intégrales dites semi-convergente dans le cadre de l'intégration de Riemann. On rappelle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente. C'est par exemple le cas pour l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt.$$

Ainsi la fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue, alors qu'on avait pu donner un sens à son intégrale au sens de Riemann. Est-on en train de perdre quelque chose en utilisant l'intégrale de Lebesgue plutôt que l'intégrale de Riemann ? Non. L'intégrale de $f$ entre 1 et $x$ admet une limite quand $x$ tend vers $+\infty$, et cette assertion est encore vraie si l'intégrale entre 1 et $x$ est comprise au sens de Lebesgue. Il n'y a donc aucun scrupule à avoir à oublier l'intégrale de Riemann au profit de l'intégrale de Lebesgue.

D'ailleurs, ces intégrales semi-convergentes sont relativement rares, donc ces questions ne se posent pas vraiment en pratique.

### 5.4.3 Théorème de dérivation sous l'intégrale

Après en avoir étudié la continuité, on s'intéresse maintenant à la dérivabilité d'une intégrale à paramètre. On utilise à nouveau la notation (5.6).

**Théorème 5.46** (Théorème de dérivation sous l'intégrale)**.** *On suppose que*

*(i) pour tout $y \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable,*

*(ii) pour $\mu$-presque tout $x \in X$ la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est de classe $C^1$,*

*(iii) il existe $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour $\mu$-presque tout $x \in X$ on a*

$$\forall y \in I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leqslant g(x).$$

*Alors $F$ est bien définie, elle est de classe $C^1$ sur $I$ et pour $y \in I$ on a*

$$F'(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, d\mu(x).$$

*Démonstration.* Soit $y_0 \in I$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $I$ qui tend vers $y_0$ et telle que $y_n \neq y_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in X$ on note

$$h_n(x) = \frac{f(x,y_n) - f(x,y_0)}{y_n - y_0}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(X \backslash A) = 0$ et $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable pour tout $x \in A$. Ainsi pour $x \in A$ on a

$$h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0).$$

On note

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in X\backslash A, \end{cases}$$

de sorte que $h_n(x) \to h(x)$ pour presque tout $x$. Il existe $B \subset A$ tel que $\mu(X\backslash B) = 0$ et (iii) est vérifiée pour $x \in B$. Par le théorème des accroissements finis on a pour $x \in B$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|h_n(x)| \leqslant \sup_{y\in I} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leqslant g(x).$$

Par le théorème de la convergence dominée on obtient que $h$ est intégrable sur $X$ et

$$\frac{F(y_n) - F(y_0)}{y_n - y_0} = \int_X h_n(x)\, d\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X h(x)\, d\mu(x).$$

Cela prouve que $F$ est dérivable en $y_0$ de dérivée

$$F'(y_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\, d\mu(x).$$

En appliquant le théorème de continuité sous l'intégrale à $F'$, on obtient alors que $F$ est de classe $C^1$ sur $I$. $\square$

*Remarque* 5.47. On peut remplacer $C^1$ par dérivable dans l'hypothèse (ii) et dans la conclusion du théorème 5.46.

*Exemple* 5.48. On revient sur l'exemple de la fonction $\Gamma$. Soient $a, b \in ]0, +\infty[$ tels que $a < b$. Pour tous $x > 0$ et $s \in ]a, b[$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x, s)\right| = \left|\ln(x) x^{s-1} e^{-x}\right| \leqslant g(x),$$

où on a noté

$$g(x) = \begin{cases} |\ln(x)|\, x^{a-1} e^{-x} & \text{si } x \in ]0, 1], \\ \ln(x) x^{b-1} e^{-x} & \text{si } x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

Comme précédemment on obtient que $g$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (à détailler). Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on obtient que $\Gamma$ est dérivable sur $]a, b[$ et pour tout $x \in ]a, b[$ on a

$$\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} \ln(x) x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$

Ceci étant valable pour tous $a, b > 0$, cela prouve que $\Gamma$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$ et l'expression de $\Gamma'$ est bien valable sur ce domaine.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$ et $s \in ]a, b[$ on a

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial s^k}(x, s)\right| = \left|\ln(x)^k x^{s-1} e^{-x}\right| \leqslant g_k(x),$$

où on a noté

$$g_k(x) = \begin{cases} |\ln(x)|^k\, x^{a-1} e^{-x} & \text{si } x \in ]0, 1], \\ \ln(x)^k x^{b-1} e^{-x} & \text{si } x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

En appliquant successivement le même raisonnement à toutes les dérivées, on obtient que $\Gamma$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$ on a

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} \ln(x)^k x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$

Dans les exemples on a utilisé le résultat suivant.

**Lemme 5.49.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f$ est continue (respectivement dérivable) sur $I$ si et seulement si elle est continue (respectivement dérivable) sur tout segment de $I$.*

## 5.5 Intégrales multiples

Le but du théorème de Fubini est d'exprimer l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables en fonction d'intégrales d'une seule variable. En effet, tous les calculs que l'on sait faire jusqu'à présent (calcul explicite via une primitive, intégration par parties, etc.) sont des résultats pour une fonction d'une seule variable. Le but du théorème de Fubini est de se ramener à ce cadre plus agréable.

Avant d'énoncer des théorèmes généraux, il faut introduire les structures adéquates. Si on veut ramener une intégrale sur $X \times Y$ à des intégrales simples sur $X$ et $Y$, il faut que la structure d'espace mesuré sur $X \times Y$ soit compatible avec celles sur $X$ et $Y$. Par exemple, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est construite à partir des mesures des rectangles, celle sur $\mathbb{R}$ à partir des mesures des intervalles, et la mesure d'un rectangle est exactement le produit des mesures de ses deux côtés (qui sont des intervalles de $\mathbb{R}$). C'est ce schéma que l'on va reproduire dans le cas général.

### 5.5.1 Produits d'espaces mesurables

Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables.

**Définition 5.50.** On appelle **rectangle mesurable** de $X_1 \times X_2$ un ensemble de la forme $A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in \mathcal{M}_1$ et $A_2 \in \mathcal{M}_2$. On appelle **tribu produit** et on note $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ la tribu de $X_1 \times X_2$ engendrée par les rectangles mesurables :

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = \sigma\big(\{A_1 \times A_2, (A_1, A_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2\}\big).$$

**Proposition 5.51.** *On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Plus généralement, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$.*

*Démonstration.* Soit $A_1$ un ouvert de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{N}(A_1)$ l'ensemble des parties $A_2$ de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \times A_2$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{N}(A_1)$ contient en particulier tous les ouverts de $\mathbb{R}$. On vérifie par ailleurs que $\mathcal{N}(A_1)$ est une tribu de $\mathbb{R}$, ce qui assure que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}(A_1)$.

Soit maintenant $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{M}(A_2)$ l'ensemble des parties $A_1$ de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour $A_1$ ouvert de $\mathbb{R}$ on a $A_2 \in \mathcal{N}(A_1)$ donc $A_1 \in \mathcal{M}(A_2)$. On vérfie comme précédemment que $\mathcal{M}(A_2)$ est une tribu de $\mathbb{R}$, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(A_2)$.

On a montré que $A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tous $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est une tribu de $\mathbb{R}^2$ contenant tous les rectangles mesurables, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Inversement, tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est union dénombrable de rectangles mesurables (exercice), ce qui prouve que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^2$, et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables. On note $X = X_1 \times X_2$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. Pour $A \subset X$ et $x_1 \in X_1$ on notera dans ce cours

$$A(x_1, \cdot) = \{x_2 \in X_2 \,|\, (x_1, x_2) \in A\} \subset A_2.$$

Pour $x_2 \in X_2$ on notera également

$$A(\cdot, x_2) = \{x_1 \in X_1 \,|\, (x_1, x_2) \in A\} \subset A_1.$$

*Exemple* 5.52. On note $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\big\}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a alors

$$D(x, \cdot) = \begin{cases} ]-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}[ & \text{si } |x| < 1, \\ \varnothing & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Étant donnée une fonction $f$ de $X$ dans un ensemble $Y$ quelconque, on note pour $x_1 \in X_1$ (et c'est une notation plus standard)

$$f(x_1, \cdot) : \left\{ \begin{array}{ccc} X_2 & \to & Y \\ x_2 & \mapsto & f(x_1, x_2). \end{array} \right.$$

De même, pour $x_2 \in X_2$ on considère

$$f(\cdot, x_2) : \left\{ \begin{array}{ccc} X_1 & \to & Y \\ x_1 & \mapsto & f(x_1, x_2). \end{array} \right.$$

**Proposition 5.53.** *(i) Soit $A \in \mathcal{M}$. Alors pour $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$ on a*

$$A(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_2 \quad \textit{et} \quad A(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_1.$$

*(ii) Soit $f$ une fonction mesurable de $X$ dans un ensemble mesurable $Y$. Alors pour $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$ les fonctions $f(x_1, \cdot) : X_2 \to Y$ et $f(\cdot, x_2) : X_1 \to Y$ sont mesurables.*

*Démonstration.* • Soit $x_1 \in X_1$. On note

$$\mathcal{M}_2(x_1) = \{A \in \mathcal{M} \,|\, A(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_2\}.$$

Pour $A_1 \in \mathcal{M}_1$ et $A_2 \in \mathcal{M}_2$ on a

$$(A_1 \times A_2)(x_1, \cdot) = \begin{cases} A_2 & \text{si } x_1 \in A_1, \\ \varnothing & \text{si } x_1 \notin A_1. \end{cases}$$

Dans tous les cas on a $(A_1 \times A_2)(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_2$, donc $\mathcal{M}_2(x_1)$ contient les rectangles mesurables de $X$. On vérifie par ailleurs que $\mathcal{M}_2(x_1)$ est une tribu de $X$, et on obtient bien que $\mathcal{M}_2(x_1) = \mathcal{M}$. De même $A(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_1$ pour tous $x_2 \in X_2$ et $A \in \mathcal{M}$.
• Soient $x_1 \in X_1$ et $B$ une partie mesurable de $Y$. On note $f_{x_1} = f(x_1, \cdot)$. Puisque $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, on obtient que

$$f_{x_1}^{-1}(A) = \left\{x_2 \in X_2 \,|\, (x_1, x_2) \in f^{-1}(A)\right\} = (f^{-1}(A))(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_2.$$

Cela prouve que $f_{x_1}$ est mesurable. On montre de même que $f(\cdot, x_2)$ est mesurable de $X_1$ dans $Y$ pour tout $x_2 \in X_2$. □

### 5.5.2 Mesure produit

Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On note $X = X_1 \times X_2$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$.

**Théorème 5.54.** *On suppose que $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ sont $\sigma$-finis. Alors il existe une unique mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $(X, \mathcal{M})$ telle que*

$$\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \forall A_2 \in \mathcal{M}_2, \quad (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2). \tag{5.9}$$

*En outre pour $A \in \mathcal{M}$ les fonctions $x_1 \mapsto \mu_2(A(x_1, \cdot))$ et $x_2 \mapsto \mu_1(A(\cdot, x_2))$ sont mesurables (de $X_1$ dans $[0, +\infty]$ et de $X_2$ dans $[0, +\infty]$, respectivement) et on a*

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{X_1} \mu_2(A(x_1, \cdot))\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A(\cdot, x_2))\, d\mu_2(x_2). \tag{5.10}$$

*Démonstration.* • On commence par vérifier l'unicité. On suppose que $m_1$ et $m_2$ sont deux mesures sur $X \times Y$ qui vérifient (5.9). Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, respectivement, telles que $\bigcup A_n = X$, $\bigcup B_n = Y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \subset A_{n+1}$, $\mu(A_n) < \infty$, $B_n \subset B_{n+1}$ et $\nu(B_n) < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $E_n = A_n \times B_n$. Pour $F \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note

$$m_1^n(F) = m_1(F \cap E_n) \quad \text{et} \quad m_2^n(F) = m_2(F \cap E_n),$$

puis

$$\mathcal{C}_n = \{F \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \,|\, m_1^n(F) = m_2^n(F)\}.$$

On note $\mathcal{R}$ la famille des rectangles mesurables de $X \times Y$. $\mathcal{R}$ est une famille stable par intersection finie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $\mathcal{C}_n$ contient $\mathcal{R}$. Montrons que $\mathcal{C}$ est une classe monotone. Comme $m_1(E_n) = m_2(E_n)$ on a $X \times Y \in \mathcal{C}_n$. Soient $F_1, F_2 \in \mathcal{C}_n$ avec $F_1 \subset F_2$. Alors on a

$$m_1^n(F_2 \backslash F_1) = m_1(E_n \cap F_2) - m_1(E_n \cap F_1) = m_2(E_n \cap F_2) - m_2(E_n \cap F_1) = m_2^n(F_2 \backslash F_1),$$

donc $F_2 \backslash F_1 \in \mathcal{C}_n$. Enfin si $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'élements de $\mathcal{C}_n$ on a

$$m_1^n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu_1(E_n \cap F_m) = \lim_{m\to\infty} \mu_2(E_n \cap F_m) = m_2^n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m\right).$$

D'après le lemme des classes monotones, on obtient que $\mathcal{C}_n$ est la tribu engendrée par $\mathcal{R}$, c'est-à-dire $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Ainsi pour tout $F \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$m_1(E_n \cap F) = m_2(E_n \cap F).$$

A la limite $n \to \infty$ on obtient

$$m_1(F) = m_2(F).$$

D'où l'unicité.

- Soit $A \in \mathcal{M}$. D'après la proposition 5.53 la fonction $x_1 \mapsto \mu_2(E(x_1, \cdot))$ est bien définie sur $X_1$. Montrons qu'elle est mesurable. Supposons dans un premier temps que $\mu_2$ est une mesure finie. On note

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M} \,|\, x_1 \mapsto \mu_2(E(x_1, \cdot)) \text{ est mesurable}\}.$$

La famille $\mathcal{C}$ contient les rectangles mesurables de $X$, qui forment une famille stable par intersection finie. En outre on peut vérifier que $\mathcal{C}$ est une classe monotone. D'après le lemme des classes monotones, on obtient que $\mathcal{C} = \mathcal{M}$.

Si $\mu_2$ n'est pas finie, on considère une suite croissante $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de $X_2$ telles que $\bigcup B_n = X_2$, et pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $A_2 \in \mathcal{M}_2$ on note $\mu_{2,n}(B) = \nu(B_n \cap A_2)$. Par le raisonnement précédent on obtient que la fonction $x_1 \mapsto \mu_{2,n}(A(x_1, \cdot))$ est mesurable pour tout $A \in \mathcal{M}$. Par passage à la limite on obtient que

$$x_1 \mapsto \mu_2(A(x_1, \cdot)) = \lim_{n\to+\infty} \mu_{2,n}(A(x_1, \cdot))$$

est également mesurable.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on peut poser

$$\mu(A) = \int_{x_1 \in X_1} \mu_2(A(x_1, \cdot))\, d\mu_1(x_1).$$

Pour $A_1 \in \mathcal{M}_1$ et $A_2 \in \mathcal{M}_2$ on a bien

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int_{x_1 \in X_1} \mathbb{1}_{A_1}(x_1)\mu_2(A_2)\, d\mu_1(x_1) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Reste à vérifier que $\mu$ est bien une mesure. On a bien $\mu(\varnothing) = 0$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints, alors pour tout $x_1 \in X_1$ les $A_n(x_1, \cdot)$ sont également deux à deux disjoints et on a par le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \int_{x_1 \in X_1} \mu_2\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)(x_1, \cdot)\right) d\mu_1(x_1)\\
&= \int_{x_1 \in X_1} \mu_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n(x_1, \cdot)\right) d\mu_1(x_1)\\
&= \int_{x_1 \in X_1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2\left(A_n(x_1, \cdot)\right) d\mu_1(x_1)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x_1 \in X_1} \mu_2\left(A_n(x_1, \cdot)\right) d\mu_1(x_1)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

Cela prouve l'existence.

- On montre de la même façon que l'on peut poser, pour tout $A \in \mathcal{M}$,

$$\tilde{\mu}(A) = \int_{x_2 \in X_2} \mu_1(A(\cdot, x_2))\, d\mu_2(x_2),$$

et que cela définit une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ vérifiant (5.9). Par unicité on obtient que $\mu$ et $\tilde{\mu}$ sont égales, ce qui conclut la démonstration. $\square$

*Exemple* 5.55. On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors $\lambda \otimes \lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

*Remarque* 5.56. Le résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas que les espaces mesurés sont $\sigma$-finis. Considérons par exemple $X_1 = \mathbb{R}$ muni de la mesure de comptage $\mu_1$, $X_2 = \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue $\lambda$, et $A = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Alors on a

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(A(x_1, \cdot))\, d\mu_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{x_1\})\, d\mu_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\mu_1(x_1) = 0,$$

tandis que

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_1(A(\cdot, x_2))\, d\lambda(x_2) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x_2\})\, d\lambda(x_2) = \int_{\mathbb{R}} 1\, d\lambda(x_2) = +\infty.$$

*Remarque* 5.57. De la même façon on peut définir le produit d'un nombre fini quelconque de mesures. Par exemple, $\lambda \otimes (\lambda \otimes \lambda) = (\lambda \otimes \lambda) \otimes \lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$.

*Exemples.* • On considère le triangle $T = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, x + y \leqslant 1\right\}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda_1(T(x, \cdot)) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin [0,1], \\ [0, 1-x] & \text{si } x \in [0,1], \end{cases}$$

d'où

$$\lambda_2(T) = \int_0^1 (1-x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

- On considère le disque $D$ ouvert de centre 0 et de rayon 1. Pour $y \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda_1(D(\cdot, y)) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y \notin ]-1,1[, \\ ]-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}[ & \text{si } y \in ]-1,1[, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda_2(D) &= \int_{y=-1}^{1} 2\sqrt{1-y^2}\, dy \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \cos(\theta)\, d\theta \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1 + \cos(2\theta)\big)\, d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

*Exemple* 5.58. Soit $f$ une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0,+\infty]$. On note

$$E(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}.$$

Alors $E(f)$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de $[-\infty, 0]$ par la fonction mesurable $F : (x,y) \mapsto y - f(x)$. En outre pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(E(f))(x,\cdot) = [0, f(x)].$$

On a donc

$$\lambda_2(E(f)) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1([0,f(x)])\, d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda_1(x).$$

### 5.5.3 Théorèmes de Fubini

Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On note $X = X_1 \times X_2$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

**Théorème 5.59** (Théorème de Fubini-Tonelli)**.** *On suppose que* $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ *et* $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ *sont* $\sigma$*-finis. Soit* $f$ *une fonction* mesurable *de* $(X, \mathcal{M})$ *dans* $[0,+\infty]$.

(i) *Les fonctions*

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2) \quad \text{et} \quad x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

*sont bien définies et mesurables sur* $X_1$ *et* $X_2$*, respectivement, à valeurs dans* $[0,+\infty]$.

(ii) *On a*

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2). \tag{5.11}$$

*Démonstration.* • Pour $x_1 \in X$ la fonction $f(x_1,\cdot)$ est mesurable de $X_2$ dans $[0,+\infty]$ d'après la Proposition 5.53. On note alors

$$F_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1,\cdot)\, d\mu_2.$$

• Soient $A \in \mathcal{M}$ et $f = \mathbb{1}_A$. Pour $x_1 \in X_1$ on a $F_1(x_1) = \mu_2(A(x_1,\cdot))$. D'après le Théorème 5.54, la fonction $F_1$ est mesurable sur $X_1$ et on a

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} F_1\, d\mu_1. \tag{5.12}$$

• Soit maintenant $f$ une fonction étagée sur $X$ à valeurs positives. Par linéarité de l'intégrale on obtient que $F_1$ est mesurable et (5.12) est encore vérifiée.
• Dans le cas général, on considère une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers $f$. Par le théorème de convergence monotone on a pour tout $x_1 \in X$

$$F_1(x_1) = \int_{X_2} \lim_{n\to+\infty} f_n(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2) = \lim_{n\to+\infty} \int_{X_2} f_n(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2).$$

$F_1$ est donc mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_X f_n\, d\mu = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f_n(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1).$$

D'après le théroème de convergence monotone (appliqué trois fois) on obtient bien

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)\,d\mu_1(x_1).$$

- On procède ensuite de la même façon en échangeant les rôles de $X_1$ et $X_2$, ce qui conclut la démonstration. □

**Corollaire 5.60.** *Soit $f$ une fonction mesurable de $(X,\mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x_1 \in X_1$ la fonction $|f(x_1,\cdot)|$ est mesurable sur $X_2$, la fonction $x_1 \mapsto \int_{X_2} |f(x_1,\cdot)|\,d\mu_2$ est mesurable sur $X_1$, et on a*

$$f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{M},\mu) \iff \int_{X_1}\left(\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_2(x_2)\right)\,d\mu_1(x_1) < +\infty.$$

*On a un résultat analogue en échangeant les rôles de $X_1$ et $X_2$.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le Théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$. □

**Théorème 5.61** (Théorème de Fubini-Lebesgue)**.** *On suppose que $(X_1,\mathcal{M}_1,\mu_1)$ et $(X_2,\mathcal{M}_2,\mu_2)$ sont $\sigma$-finis. Soit $f$ une fonction* intégrable *de $(X,\mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}$.*

(i) *La fonction $f(x_1,\cdot)$ est intégrable sur $X_2$ pour presque tout $x_1 \in X_1$, et la fonction $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$ (définie $\mu_1$-presque partout) est intégrable sur $X_1$. De même, $f(\cdot,x_2)$ est intégrable sur $X_1$ pour presque tout $x_2 \in X_2$, et la fonction $x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1)$ (définie $\mu_2$-presque partout) est intégrable sur $X_2$.*

(ii) *On a*

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)\,d\mu_1(x_1) = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1)\right)\,d\mu_2(x_2).$$

On a un énoncé analogue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, on le prouve en appliquant ce théorème aux fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

*Démonstration.* On note $f = f_+ - f_-$ où $f_+$ et $f_-$ sont mesurables à valeurs positives. D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_+(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)\,d\mu_1(x_1) = \int_X f_+\,d\mu < +\infty \tag{5.13}$$

et un résultat analogue pour $f_-$. En particulier il existe $E \in \mathcal{M}_1$ tel que $\mu_1(E) = 0$ et pour tout $x \in X_1 \backslash E$ on a

$$\int_{X_2} f_+(x_1,y_2)\,d\mu_2(x_2) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{X_2} f_-(x_1,y_2)\,d\mu_2(x_2) < +\infty.$$

En particulier, $f(x_1,\cdot)$ est intégrable sur $X_2$ pour tout $x \in X\backslash E$. La fonction $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1,\cdot)\,d\mu_2$ est alors intégrable comme différence de deux fonctions intégrables (obtenues en remplaçant $f$ par $f_+$ et $f_-$). En soustrayant les égalités (5.13) pour $f_+$ et $f_-$ on obtient

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)\,d\mu_1(x_1).$$

On obtient des propriétés analogues en échangeant le rôle de $X_1$ et $X_2$, ce qui conclut la démonstration. □

*Exemple* 5.62. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions localement intégrables sur $I$ (intégrables sur tout segment de $I$). Soient $\alpha, \beta \in I$. Pour $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_{[\alpha,x]} f(t)\,dt & \text{si } x \geqslant \alpha, \\ -\int_{[x,\alpha]} f(t)\,dt & \text{si } x < \alpha. \end{cases}$$

On définit de même $G$ par

$$G(x) = \int_\beta^x g(t)\,dt.$$

On peut vérifier (exercice) que $F$ et $G$ sont continues sur $I$. Si $f$ et $g$ sont continues alors $F$ et $G$ sont des primitives de $f$ et $g$.

Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Pour $x, y \in [a,b]$ on pose $h(x,y) = f(x)g(y)\mathbb{1}_{y \leqslant x}$. La fonction $h$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. En outre on a par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_{[a,b]^2} |h(x,y)|\,dx\,dy \leqslant \int_{[a,b]} |f(x)|\,|g(y)|\,dx\,dy = \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)\left(\int_a^b |g(y)|\,dy\right) < +\infty,$$

donc $h$ est intégrable sur $[a,b]^2$. On a d'une part

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_a^b h(x,y)\,dy\right) dx &= \int_a^b f(x)\left(\int_a^x g(y)\,dy\right) dx \\ &= \int_a^b f(x)(G(x) - G(a))\,dx \\ &= \int_a^b f(x)G(x)\,dx - G(a)(F(b) - F(a)) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_a^b h(x,y)\,dx\right) dy &= \int_a^b (F(b) - F(y))g(y)\,dy \\ &= -\int_a^b F(y)g(y)\,dy + F(b)(G(b) - G(a)). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini-Lebesgue ces deux quantités coïncident, donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s)G(s)\,ds - \int_a^b F(s)g(s)\,ds &= (F(b) - F(a))G(a) + F(b)(G(b) - G(a)) \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a). \end{aligned}$$

C'est la formule d'intégration par parties bien connue lorsque $f$ et $g$ sont continues.

## 5.6 Changements de variables

On montre dans ce paragraphe la formule de changement de variables. Le but est de ré-écrire une intégrale sous la forme d'une autre intégrale, idéalement plus simple. La transformation revient à regarder la même quantité dans de nouvelles coordonnées (mathématiquement, cela donne une nouvelle fonction à intégrer, sur un nouveau domaine). Cela est particulièrement pertinant quand le problème (ici, domaine d'intégration et fonction à intégrer) présente certaines symétries.

La formule abstraite est relativement facile à obtenir. La part essentielle du travail qu'il reste à effectuer ici est de voir ce qu'elle donne concrètement dans le cas d'un changement de variable donné par un $C^1$-difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^d$.

### 5.6.1 Formule abstraite

On commence par rappeler des définitions et propriétés en partie déjà vues en exercice. Étant donnée une fonction $\varphi$ d'un espace mesuré $X$ vers un ensemble $Y$, il y a une structure naturelle d'espace mesuré sur $Y$ obtenue à partir de la structure sur $X$ via la correspondance donnée par $X$.

**Proposition-Définition 5.63.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $Y$ un ensemble et $\varphi$ une fonction de $X$ dans $Y$.

(i) La famille
$$\mathcal{N} = \left\{ B \in \mathcal{P}(Y) \,|\, \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{M} \right\}$$
est une tribu sur $Y$, appelée tribu image de $\mathcal{M}$ par $f$.

(ii) La fonction $\varphi$ est alors mesurable de $(X, \mathcal{M})$ dans $(Y, \mathcal{N})$.

(iii) Pour $B \in \mathcal{N}$ on note $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. Cela définit une mesure $\nu$ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{N})$, appelée mesure image de $\mu$ par $f$.

(iv) Si $\varphi$ est une bijection, $\mathcal{M}$ et $\mu$ sont alors les tribu et mesure images de $\mathcal{N}$ et $\nu$ par $\varphi^{-1}$.

On note que, pour ces définitions, la fonction $\varphi$ n'est pas nécessairement bijective (elle peut être ni injective, ni surjective).

En probabilité, il est quasiment systématique de commencer par considérer une loi $X$ de l'univers $\Omega$ vers un ensemble plus simple, typiquement une partie de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{R}$. A tel point qu'on étudie souvent la loi $X$ sans même se préoccuper de qui était l'univers $\Omega$ au départ. On étudie alors la mesure image sur cet ensemble simple plutôt que la mesure de probabilité d'origine sur $\Omega$. Dans ce cas, on ne donne en général pas de nouveau nom à la mesure image. Si $\mathbb{P}$ est la mesure d'origine sur $\Omega$ et $B$ est une partie de $\mathbb{N}$ ou un borélien de $\mathbb{R}$ on note $\mathbb{P}(X \in B)$ plutôt que $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

*Exemple* 5.64. On revient sur l'exemple du jet de deux dets évoqué au chapitre 4 ( **(voir Exercice exo-deux-des)**) . On observe que la mesure $\nu$ sur $[\![2, 12]\!]$ a précisément été définie comme étant la mesure image de la mesure uniforme sur $[\![1, 6]\!]^2$.

**Théorème 5.65** (Théorème abstrait de changement de variables)**.** *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \mu)$ deux espaces mesurés et $\varphi$ une fonction de $X$ dans $Y$. On suppose que $\mathcal{N}$ et $\nu$ sont la tribu et la mesure image de $\mathcal{M}$ et $\mu$ par $\varphi$.*

*(i) Soit $f : Y \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors $f \circ \varphi$ est mesurable sur $X$ on a*
$$\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

*(ii) Soit $f : Y \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors $f$ est intégrable sur $Y$ si et seulement si $(f \circ \varphi)$ est intégrable sur $X$, et dans ce cas on a*
$$\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

La démonstration est laissée en exercice.

### 5.6.2 Cas de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue

Soient $U$ et $V$ deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^d$.

**Définition 5.66.** On appelle difféomorphisme de classe $C^1$ de $U$ dans $V$ une bijection $\varphi : U \to V$ de classe $C^1$ dont la réciproque $\varphi^{-1} : V \to U$ est également de classe $C^1$.

*Remarque* 5.67. Si $\tilde{U}$ est un ouvert inclus dans $U$ et $\tilde{V}$ est l'image de $\tilde{U}$ par $\varphi$, alors $\varphi$ réalise un $C^1$-difféomorphisme de $\tilde{U}$ dans $\tilde{V}$.

On considère un $C^1$-difféomorphisme $\varphi$ de $U$ dans $V$. On note $\psi : V \to U$ sa bijection réciproque. On munit $V$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(V)$ et de la mesure de Lebesgue $\lambda$. On note $\mathcal{M}$ la tribu image de $\mathcal{B}(V)$ et $\lambda_\varphi$ la mesure image de $\lambda$ par $\psi = \varphi^{-1}$. Autrement dit, $\mathcal{B}(V)$ est la tribu image de $\mathcal{M}$ par $\varphi$ et $\lambda$ est la tribu image de $\lambda_\varphi$ par $\varphi$.

D'après la formule de changement de variable, si $f$ est une fonction intégrable de $V$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U (f \circ \varphi) \, d\lambda_\varphi.$$

Le but de ce paragraphe est d'identifier la tribu $\mathcal{M}$ et la mesure $\lambda_\varphi$ sur $U$. La tribu $\mathcal{M}$ est, sans surprise, la tribu borélienne sur $U$. C'est la mesure $\lambda_\varphi$ qui demandera plus d'efforts.

**Proposition 5.68.** *La tribu image $\mathcal{M}$ de $\mathcal{B}(V)$ par le $C^1$-difféomorphise $\psi$ est $\mathcal{B}(U)$.*

*Démonstration.* Si $O$ est un ouvert de $U$ alors $\psi^{-1}(O)$ est un ouvert et donc un borélien de $V$, d'où $O \in \mathcal{M}$. Ainsi $\mathcal{M}$ est une tribu de $U$ contenant les ouverts, donc $\mathcal{B}(U) \subset \mathcal{M}$. Soit $B \in \mathcal{M}$ et $A = \psi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(V)$. Comme $\psi = \varphi^{-1}$ est bijective on a $B = \varphi^{-1}(A)$. Ainsi $B$ est l'image réciproque du borélien $A$ par la fonction continue $\varphi$, donc $B \in \mathcal{B}(U)$. Cela prouve que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(U)$, et donc $\mathcal{M} = \mathcal{B}(U)$. □

On cherche maintenant à identifier la mesure $\lambda_\varphi$ sur $(U, \mathcal{B}(U))$. On rappelle que $\lambda_\varphi$ est définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(U), \quad \lambda_\varphi(A) = \lambda(\psi^{-1}(A)) = \lambda(\varphi(A)).$$

Autrement dit, on cherche à comprendre comment l'application $\varphi$ dilate ou contracte les ensembles. Commençons par considérer quelques exemples simples.

*Exemples* 5.69. On considère le cas $U = V = \mathbb{R}^2$ et $A = [a, b] \times [c, d]$, pour différentes applications $\varphi$. [Faire des dessins]

— Pour $\alpha > 0$ et $\varphi : x \mapsto \alpha x$, on a $\varphi(A) = [\alpha a, \alpha b] \times [\alpha c, \alpha d]$ et donc $\lambda(\varphi(A)) = \alpha^2 \lambda(A)$. En dimension $d$, on aurait un facteur multiplicatif égal à $\alpha^d$. De même, pour $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)$ on a $\lambda(\varphi(A)) = \alpha_1 \alpha_2 \lambda(A)$.

— On considère l'application $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$. Alors on a $\varphi(A) = [c, d] \times [a, b]$ et $\lambda(\varphi(A)) = \lambda(A)$.

— Pour $\beta \in \mathbb{R}$ on considère l'application $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + \beta x_1)$. On a alors

$$\varphi(A) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leqslant x_1 \leqslant b, c + \beta x_1 \leqslant y \leqslant d + \beta x_1] \right\}.$$

On a alors

$$\lambda(\varphi(A)) = \int_a^b \big( (d + \beta x_1) - (c + \beta x_1) \big) \, dx_1 = \int_a^b (d - c) \, dx_1 = \lambda(A).$$

On observe que le coefficient $\beta$ ne joue aucun rôle. En fait, $\varphi$ ne fait que déplacer les « tranches verticales » de $A$, ce qui ne change pas son aire.

En fait, comparer le volume de $\varphi(A)$ à celui de $A$ est relativement simple dans le cas où $\varphi$ est une application linéaire. On a un outil qui fait précisément cela, il s'appelle déterminant de $\varphi$. C'est l'occasion de faire un détour par l'algèbre linéaire, le temps de montrer la proposition suivante.

**Proposition 5.70.** *On suppose que $\varphi$ est un isomorphisme linéaire sur $\mathbb{R}^d$. Alors pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\lambda(\varphi(A)) = |\det(\varphi)| \, \lambda(A). \tag{5.14}$$

*Démonstration.* • Comme $\varphi$ est linéaire, la mesure $\lambda_\varphi$ est, comme $\lambda$, une mesure invariante par translation et finie sur les bornés. D'après le théorème d'unicité pour la mesure de Lebesgue, cela implique qu'il existe une constante $C_\varphi$ telle que $\lambda_\varphi = C_\varphi \lambda$. Montrons que $C_\varphi = |\det(\varphi)|$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un borélien $A$ de $\mathbb{R}^d$ de mesure non nulle et vérifiant (5.14). On note $M \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
• On suppose que $M$ est orthogonale ($MM^\mathsf{T} = \mathsf{I}_n$). Alors $\varphi$ laisse invariantes les boules euclidiennes, et donc $C_\varphi = 1 = \det(M)$.
• On suppose maintenant que $M$ est symétrique définie positive. Alors il existe $P$ orthogonale et $D$ diagonale à coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ strictement positifs telles que $M = PDP^{-1}$. On note $K = [0,1]^d$ et $A = PK$. Alors on a

$$\lambda(A) = \lambda(PK) = \lambda(K) = 1$$

et

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi(A)) &= \lambda(MPK) = \lambda(PDK) = \lambda(DK) = \lambda\big([0,\alpha_1] \times \cdots \times [0,\alpha_d]\big) = \alpha_1 \dots \alpha_d = \det(D)\\ &= \det(M) = |\det(M)|\,.\end{aligned}$$

• Dans le cas général, on écrit $M = RS$ avec $S = \sqrt{M^\mathsf{T} M}$ symétrique définie positive et $R = MS^{-1}$ orthogonale (c'est la décomposition polaire de $M$). Alors pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lambda(\varphi(A)) = \lambda(RSA) = \lambda(SA) = \det(S)\lambda(A) = |\det(M)|\,\lambda(A),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Après l'algèbre linéaire, on utilise maintenant un argument de calcul différentiel. En général, une fonction quelconque n'est évidemment pas un isomophisme linéaire. Mais, une application de classe $C^1$ sur $U$ est par définition proche, au voisinage de chacun des points de $U$, d'une application affine, c'est-à-dire la composée d'une application linéaire (dont on vient d'expliciter l'action sur les volumes) et d'une translation (qui préserve les volumes) :

$$\varphi(x) \simeq f(x_0) + (d_x\varphi)(x - x_0), \quad x \simeq x_0.$$

Évidemment, il convient de quantifier tout cela proprement. On commence par regarder ce qu'il se passe au voisinage d'un point de $U$ fixé, puis on sommera les contributions pour avoir un résultat global.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$ on note $B(x,r)$ la boule (ouverte) de centre $x$ et de rayon $r$. Pour $x \in U$ on note $|J\varphi(x)|$ la valeur absolue du déterminant Jacobien de $\varphi$ en $x$.

**Lemme 5.71.** *Soit $K \subset U$ un compact. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $r_0 > 0$ tel que pour $x \in K$ et $r \in ]0, r_0]$ on a*

$$(1+\varepsilon)^{-d}\,|J\varphi(x)|\,\lambda(B(x,r)) \leqslant \lambda(\varphi(B(x,r))) \leqslant (1+\varepsilon)^d\,|J\varphi(x)|\,\lambda(B(x,r)).$$

Ce lemme dit que si on ne regarde que ce qui se passe dans un petit voisinage du point $x$, alors $\varphi$ dilate les volumes quasiment comme le ferait l'application différentielle $d_x\varphi(x)$, de sorte que $\lambda(\varphi(B(x,r)))$ est très proche de $|J\varphi(x)|\,\lambda(B(x,r))$.

*Démonstration.* • Pour $x_0, x \in U$ on note[1]

$$\varphi_{x_0}(x) = \varphi(x_0) + d_{x_0}\varphi(x - x_0).$$

1. Il s'agit de l'application affine par laquelle on approche $\varphi$ au voisinage de $x_0$

On montre qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour $x_0 \in K$ et $r \in ]0, r_0]$ on a

$$\varphi_{x_0}\big(B(x_0, (1+\varepsilon)^{-1} r)\big) \subset \varphi\big(B(x_0, r)\big) \subset \varphi_{x_0}\big(B(x_0, (1+\varepsilon) r)\big).$$

On pourra alors conclure avec la proposition précédente.

- Montrons la seconde inclusion. On cherche à montrer que si $r_0 > 0$ est assez petit, alors pour $x_0 \in K$ et $x \in B(x_0, r_0)$ on peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi_{x_0}(\tilde{x}),$$

avec $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\|\tilde{x} - x_0\| \leqslant (1+\varepsilon) \|x - x_0\| .$$

- Pour $x_0, x \in U$ on note

$$\zeta_{x_0}(x) = \varphi(x) - \varphi_{x_0}(x).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi_{x_0}(x) + \zeta_{x_0}(x) \\
&= \varphi(x_0) + d_{x_0}\varphi(x - x_0) + \zeta_{x_0}(x) \\
&= \varphi(x_0) + d_{x_0}\varphi\big(x + (d_{x_0}\varphi)^{-1}\zeta_{x_0}(x) - x_0\big) \\
&= \varphi_{x_0}(\tilde{x}),
\end{aligned}$$

où on a noté

$$\tilde{x} = x + (d_{x_0}\varphi)^{-1}\zeta_{x_0}(x).$$

- Comme $\varphi$ est de classe $C^1$, la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\zeta_{x_0}(x) = \big(\varphi(x) - \varphi(x_0)\big) - d_{x_0}\varphi(x - x_0) = \int_0^1 \big(d_{x_0 + t(x - x_0)}\varphi - d_{x_0}\varphi\big)(x - x_0)\, dt.$$

On considère $r_0 > 0$ tel que

$$K_1 = \overline{\bigcup_{x \in K} B(x, r_0)} \quad \subset U.$$

Comme l'application $x_0 \mapsto (d_{x_0}\varphi)^{-1}$ est continue sur le compact $K_1$, il existe $M \geqslant 1$ tel que $\left\|(d_x\varphi)^{-1}\right\| \leqslant M$ pour tout $x \in K_1$. D'autre part l'application $x \mapsto d_x\varphi$ est uniformément continue sur $K_1$, donc quitte à prendre $r_0 > 0$ plus petit on peut de plus supposer que pour tous $x_0 \in K$ et $x \in B(x_0, r_0)$ on a

$$\|d_x\varphi - d_{x_0}\varphi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$

$r_0 > 0$ étant ainsi fixé, pour $x_0 \in K$ et $x \in B(x_0, r_0)$ on a

$$\|\zeta_{x_0}(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \|x - x_0\| .$$

D'où

$$\|\tilde{x} - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \left\|(d_{x_0}\varphi)^{-1}\right\| \|\zeta_{x_0}(x)\| \leqslant (1+\varepsilon) \|x - x_0\| ,$$

ce qui prouve que

$$\varphi\big(B(x_0, r)\big) \subset \varphi_{x_0}\big(B(x_0, (1+\varepsilon) r)\big).$$

- On montre maintenant que pour $r$ assez petit et $x_0 \in K$ on a

$$\varphi^{-1}(\varphi_{x_0}(B(x_0, (1+\varepsilon)^{-1} r))) \subset B(x_0, r). \tag{5.15}$$

En appliquant $\varphi$, cela prouvera que

$$\varphi_{x_0}\big(B(x_0,(1-\varepsilon)r)\big) \subset \varphi\big(B(x_0,r)\big)$$

et conclura la démonstration.

- Quitte à réduire $r_0 > 0$, on peut supposer que pour tout $x_0 \in K$ on a $\varphi_{x_0}(B(x_0,r_0)) \subset V$ et

$$K_2 = \overline{\bigcup_{x \in K_1} B(\varphi(x), \varepsilon r_0)} \subset V.$$

Quitte à choisir $M$ plus grand, on peut alors supposer que pour tout $y \in K_2$ on a

$$\left\| d_y \varphi^{-1} \right\| \leqslant M.$$

Pour $x \in B(x_0, r_0)$ on a

$$\varphi^{-1}(\varphi_{x_0}(x)) - x = \varphi^{-1}(\varphi_{x_0}(x)) - \varphi^{-1}(\varphi(x)) = -\int_0^1 d_{\varphi(x)-s\zeta_{x_0}(x)}\varphi^{-1}(\zeta_{x_0}(x))\, ds,$$

et donc

$$\left\|\varphi^{-1}(\varphi_{x_0}(x)) - x\right\| \leqslant \varepsilon \left\|x - x_0\right\|.$$

Ainsi

$$\left\|\varphi^{-1}(\varphi_{x_0}(x)) - x_0\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|x - x_0\right\|,$$

ce qui prouve (5.15) et donc la proposition. □

**Proposition 5.72.** *Pour tout $A \in \mathcal{B}(U)$ on a*

$$\lambda(\varphi(A)) = \int_A |J\varphi| \, d\lambda = \int_A |J\varphi(x)| \, dx.$$

*Démonstration.* Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des pavés de la forme

$$\prod_{j=1}^d \left[\frac{k_j}{2^n}, \frac{k_j+1}{2^n}\right[$$

avec $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$. Pour un tel pavé $P$ on note $x_P$ son centre :

$$x_P = \left(\frac{2k_1+1}{2^{n+1}}, \dots, \frac{2k_d+1}{2^{n+1}}\right).$$

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P_0 \in \mathcal{Q}_{n_0}$ tels que $\overline{P_0} \subset U$. Soit $\varepsilon \in ]0,1]$. On considère $n \geqslant n_0$ tel que d'une part le lemme précédent (appliqué avec la norme infinie) est vrai pour $K = \overline{P_0}$ et $r_0 = 2^{-n}$, et d'autre part

$$(1-\varepsilon)\,|J\varphi(u)| \leqslant |J\varphi(v)| \leqslant (1+\varepsilon)\,|J\varphi(u)|$$

pour tous $u, v \in \overline{P_0}$ tels que $\|u - v\| \leqslant 2^{-n}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lambda(\varphi(P_0)) &= \sum_{\substack{P \in \mathcal{Q}_n \\ P \subset P_0}} \lambda(\varphi(P)) \\
&\leqslant (1+\varepsilon)^d \sum_{\substack{P \in \mathcal{Q}_n \\ P \subset P_0}} |J\varphi(x_P)|\, \lambda(P) \\
&\leqslant (1+\varepsilon)^{d+1} \sum_{\substack{P \in \mathcal{Q}_n \\ P \subset P_0}} \int_P |J\varphi(x)| \, dx \\
&\leqslant (1+\varepsilon)^{d+1} \int_{P_0} |J\varphi(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

De même on a
$$\lambda(\varphi(P_0)) \geqslant (1-\varepsilon)^{d+1} \int_{P_0} |J\varphi(x)| \, dx.$$
Ces deux inégalités étant valables pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que
$$\lambda(\varphi(P_0)) = \int_{P_0} |J\varphi(x)| \, dx.$$
Pour $A \in \mathcal{B}(U)$ on pose
$$\mu(A) = \int_A |J\varphi(x)| \, dx.$$
Cela définit bien une mesure sur $(U, \mathcal{B}(U))$, à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Les mesures $\lambda_\varphi$ et $\mu$ coïncident alors sur les pavés dans $\mathcal{Q}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ dont l'adhérence est contenue dans $U$. Ces pavés sont stables par intersection finies et ils engendrent les boréliens de $U$ (comme dans $\mathbb{R}^d$, on peut vérifier que tout ouvert de $U$ est union dénombrable de tels pavés). En outre si on note $E_n$ l'union de ces pavés contenus dans $U \cap \{x \mid \|x\| \leqslant n\}$, alors $\mu(E_n) < \infty$ et $\nu(E_n) < \infty$. D'après le résultat d'unicité des mesures, on obtient que $\lambda_\varphi = \mu$, ce qui conclut la démonstration. □

En combinant le théorème 5.65, la proposition 5.68, la proposition 5.72 et la proposition 5.23 (sur les mesures définies par une densité) on a montré le résultat suivant :

**Théorème 5.73** (Théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^d$)**.** *Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ (munis de leurs tribus boréliennes et de la mesure de Lebesgue $\lambda$), et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme de classe $C^1$.*

*(i) Soit $f : V \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors $(f \circ \varphi) \, |J\varphi|$ est une fonction mesurable sur $U$ et on a*
$$\int_V f(y) \, d\lambda(y) = \int_U f(\varphi(x)) \, |J\varphi(x)| \, d\lambda(x).$$

*(ii) Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors $(f \circ \varphi) \, |J\varphi|$ est une fonction mesurable sur $U$. En outre $f$ est intégrable sur $V$ si et seulement si $(f \circ \varphi) \, |J\varphi|$ est intégrable sur $U$ et dans ce cas on a*
$$\int_V f(y) \, d\lambda(y) = \int_U f(\varphi(x)) \, |J\varphi(x)| \, d\lambda(x).$$

On termine ce paragraphe en comparant ce résultat avec la formule usuelle de changement de variable connue en dimension 1. On rappelle que si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, $\varphi$ est une fonction de classe $C^1$ de $[a, b]$ dans un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et si $f$ est une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$ on a
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx. \tag{5.16}$$

Les deux différences sont les suivantes. Pour le Théorème 5.65, le changement de coordonnées $\varphi$ doit être une bijection, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour (5.16). D'autre part, le déterminant jacobien de $\varphi$ (qui n'est autre que la dérivée de $\varphi$ en dimension 1) vient avec une valeur absolue au Théorème 5.65, alors que ce n'était pas le cas pour (5.16). Ces différences sont toutes deux dues à la même cause : l'intégrale de Lebesgue est basée sur une mesure qui donne aux ensembles une taille mais pas d'orientation, alors qu'en dimension 1 on fait la différence entre l'intégrale de $a$ à $b$ et l'intégrale de $b$ à $a$. Il est possible de tenir compte de l'orientation en dimension supérieure en intégrant non plus des fonctions sur des espaces mesurables, mais des formes différentielles (mais ce n'est pas l'objet de ce chapitre).

À ce stade, il n'est pas dramatique de ne pas saisir en profondeur les subtilités liées à ces questions d'orientation, mais il est crucial d'avoir bien en tête les différences entre (5.16) et le théorème 5.65 afin de ne pas tout mélanger au moment de les appliquer.

### 5.6.3 Exemples importants de changements de variables

On introduit maintenant des changements de variables particulièrement utiles. En fonction des symétries du problème étudié, ces changements de variables peuvent permettre de considérablement simplifier l'expression des intégrales à calculer. On a déjà discuté les changemement de variables affines. On introduit ici les coordonnées polaires, en dimension 2, et en dimension 3 les coordonnées cylindriques et sphériques.

On commence par les coordonnées polaires. Il faut vérifier que la fonction $\varphi$ correspondante est bien un $C^1$-difféomorphisme. Pour cela on note

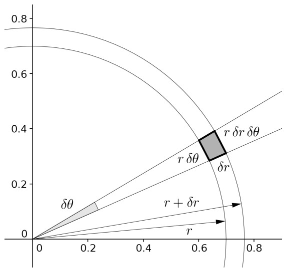
$$\mathcal{D}_- = \mathbb{R}_- \times \{0\} = \{(x,0), x \leqslant 0\}.$$

**Proposition 5.74** (Coordonnées polaires)**.** *L'application*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[ & \to & \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{D}_- \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

*est un $C^1$-difféomorphisme. En outre pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$ on a*

$$J\Phi(r,\theta) = r.$$




*Démonstration.* On commence par observer que $\Phi$ est une fonction de classe $C^1$, car chaque coordonnée est le produit de deux fonctions usuelles régulières. Vérifions que $\Phi$ est bien une bijection. Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$ on a

$$\|\Phi(r,\theta)\| = r,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, si $(r_1,\theta_1),(r_2,\theta_2) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$ sont tels que $\Phi(r_1,\theta_1) = \Phi(r_2,\theta_2)$ on a nécessairement $r_1 = r_2$. On a alors $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ et $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$, ce qui implique [2] que $\theta_1 = \theta_2$. Cela prouve l'injectivité de $\Phi$. Soit maintenant $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{D}_-$. On note $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Si $y = 0$ on note $\theta = 0$. Si $y > 0$ on note

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{r}\right),$$

2. Notez qu'une seule de ces deux égalités n'aurait pas suffit pour conclure

et si $y < 0$ on note $\theta = -\arccos\left(\frac{x}{r}\right)$. Dans tous les cas on a bien $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$ et $\Phi(r,\theta) = (x,y)$. Cela assure que $\Phi$ est surjective.

Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$ on calcule

$$J\Phi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

En particulier, la différentielle de $\Phi$ est inversible en tout point de $\mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$. D'après le théorème de l'inversion globale, on obtient que $\Phi$ est bien un $C^1$-difféomorphisme de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{D}_-$. □

Si l'expression de la fonction $\Phi$ définissant les coordonnées polaires ne surprendra personne, les ensembles de départ et d'arrivée peuvent interpeler. Pourquoi ne pas considérer un changement de variable tel que l'ouvert d'arrivée $V$ soit $\mathbb{R}^2$ tout entier ? Premier point, si on inclus $r = 0$ dans l'ensemble de départ, alors pour tout $\theta$ on aura $\Phi(0,\theta) = 0$, de sorte que $\Phi$ n'est plus injective. Il n'est pas non plus possible d'avoir $\Phi$ d'image $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Si $\Phi$ est par exemple définie sur $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi]$ (qui, soit dit en passant, n'est pas un ouvert), alors sa réciproque ne sera pas continue. En effet, les points

$$\big(\cos(\pi-\varepsilon), \sin(\pi-\varepsilon)\big) \quad \text{et} \quad \big(\cos(\pi+\varepsilon), \sin(\pi+\varepsilon)\big)$$

sont très proches pour $\varepsilon > 0$ petit, tandis que leurs antécédents par $\Phi$,

$$(1, \pi-\varepsilon) \quad \text{et} \quad (1, -\pi+\varepsilon),$$

ne le sont pas. En utilisant cette observation, il est facile de montrer rigoureusement qu'on ne peut pas avoir un $C^1$-difféomorphisme $\Phi$ dont l'image serait $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. C'est pourquoi on se contente d'une définition de $\Phi$ dont l'image est tronquée d'une demi-droite. On verra qu'en pratique ce n'est pas un véritable problème, du fait qu'une telle demi-droite est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^2$. On note toutefois que le choix de retrancher la demi-droite $\mathcal{D}_-$ est arbitraire, et on aurait pu enlever n'importe quelle autre demi-droite issue de 0.

Le passage aux coordonnées polaires est agréable quand la frontière du domaine d'intégration s'exprime plus facilement comme courbe paramétrée en polaire et/ou que la fonction à intégrer présente une symétrie radiale. On commence par un exemple simple.

*Exemple* 5.75. Soit $R > 0$. On veut calculer $\lambda(D_R)$, où $D_R$ est le disque centré en 0 et de rayon $R$. On note $\tilde{D}_R = D_R \backslash \mathcal{D}_-$. Puisque $\mathcal{D}_-$ est de mesure de Lebesgue nulle, on a $\lambda(D_r) = \lambda(\tilde{D}_R)$. L'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ réalise un $C^1$-difféomorphisme de $]0,R[\times]-\pi,\pi[$ dans $\tilde{D}$, donc par le théorème de changement de variable on a

$$\lambda(D) = \lambda(\tilde{D}) = \int_{\tilde{D}} 1\, d\lambda = \int_{[0,R]\times]-\pi,\pi[} r\, d\lambda(r,\theta).$$

L'application $(r,\theta) \mapsto r$ est intégrable (car continue et bornée) sur $[0,R]\times]-\pi,\pi[$, donc par le théorème de Fubini (l'une ou l'autre des deux versions, puisque par ailleurs on a une fonction à valeurs positives) on obtient

$$\lambda(D) = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^{R} r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2}{2}\, d\theta = \pi R^2.$$

On s'intéresse maintenant à l'équivalent des intégrales de Riemann en dimension 2.

*Exemple* 5.76. On note $D$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on note $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. La fonction $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ est continue et donc mesurable sur $\mathbb{R}^2 \backslash D$. En outre elle prend des valeurs positives. En passant aux coordonnées polaires on calcule

$$\int_{\mathbb{R}^2\backslash D} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^\alpha}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\,dr.$$

Cela prouve que $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2\backslash D$ si $\alpha > 2$ et n'est pas intégrable si $\alpha \leqslant 2$.

De même, la fonction $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ est continus sur $D\backslash\{0\}$ et en passant aux coordonnées polaires on obtient

$$\int_D \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}}\,dr.$$

Ainsi, $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ est intégrable sur $D$ si $\alpha < 2$ et n'est pas intégrable si $\alpha \geqslant 2$.

En particulier, la fonction $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ n'est jamais intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

On continue avec un exemple avec une intégrale généralisée. Ce calcul est peut-être la méthode la plus simple pour obtenir l'intégrale d'une Gaussienne, il est donc utile de le retenir.

*Exemple* 5.77. On cherche à calculer

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$$

(on rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$). D'après le théorème de Fubini (idem on peut utiliser les deux versions) et le fait que $\mathcal{D}_-$ est de mesure nulle on a

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right)dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}_-} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

En passant aux coordonnées polaires, puis en utilisant à nouveau le théorème de Fubini, on obtient

$$I^2 = \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr = \pi.$$

D'où

$$I = \sqrt{\pi}.$$

On termine avec un exemple où le changement de variable à effectuer n'est pas évident. Vu le domaine d'intégration, on est tenté de choisir les coordonnées polaires centrée au point (1,0). Mais la fonction à intégrer suggère plutôt les coordonnées polaires usuelles.

*Exemple* 5.78. On calcule

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2-2x < 0\right\}.$$

On note que $D$ est ouvert et donc borélien comme image réciproque de $]-\infty, 0[$ par la fonction continue $(x,y) \mapsto x^2+y^2-2x$. On observe que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x,y) \in D \quad\Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 < 1.$$

Ainsi $D$ est le disque ouvert de centre (1,0) et de rayon 1. Pour $(r,\theta) \in ]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ on note $\phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On cherche $\phi^{-1}(D)$. On a

$$\phi(r,\theta) \in D \iff r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2 - 2r\cos(\theta) < 0 \iff r^2 < 2r\cos(\theta) \iff r < 2\cos(\theta).$$

Ainsi on a $D = \phi(\tilde{D})$ où

$$\tilde{D} = \left\{ (r,\theta) \in ]0,2[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[ \;\middle|\; r < 2\cos(\theta) \right\}.$$

Par le théorème de changement de variables et le théorème de Fubini on obtient

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, d\lambda(x,y) = \int_{\tilde{D}} r^2 d\lambda(r,\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\cos(\theta)} r^2\, dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos(\theta)^3}{3}\, d\theta$$
$$= \dots = \frac{32}{9}.$$

Le principe des coordonnées cylindriques est assez simple. On découpe le domaine d'intégration (en dimension 3) en « tranches » selon l'une des variables. Chaque tranche est alors une partie de $\mathbb{R}^2$, sur laquelle on utilise les coordonnées polaires.

**Proposition 5.79** (Coordonnées cylindriques)**.** *L'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[\times\mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}^3 \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r,\theta,z) & \mapsto \quad (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \end{cases}$$

*est un $C^1$-difféomorphisme. En outre pour tout $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$ on a*

$$J\Phi(r,\theta,z) = r.$$

La preuve et la discussion sur les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes que pour les coordonnées polaires, on n'y revient pas en détail.

*Exemple* 5.80. On note

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 < e^{-|x|} \right\}.$$

$A$ est un ouvert et donc un borélien de $\mathbb{R}^3$. Il présente manifestement une symétrie de révolution autour de l'axe des $x$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la tranche correspondante (dans les variables $y$ et $z$) est le disque de centre 0 et de rayon $e^{-\frac{|x|}{2}}$. Le volume de $A$ est donc

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_{x\in\mathbb{R}} \pi e^{-|x|}\, dx = 2\pi.$$

Enfin on termine avec les coordonnées sphériques, adaptées aux problèmes ayant des symétries radiales en dimension 3.

**Proposition 5.81** (Coordonnées sphériques)**.** *L'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[ & \to \quad \mathbb{R}^3 \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r,\theta,\varphi) & \mapsto \quad \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{cases}$$

*est un $C^1$-difféomorphisme. En outre pour tout $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a*

$$J\Phi(r,\theta,\varphi) = r^2\cos(\varphi).$$

*Démonstration.* On vérifie le calcul du jacobien. Pour $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\begin{aligned}\det \operatorname{Jac} \Phi(r, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= r^2\big(\sin(\varphi) \times \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi) \times \cos^2(\varphi)\big) \\ &= r^2\cos(\varphi) \neq 0. \end{aligned}$$

□

*Exemple* 5.82. Comme précédemment, on retrouve facilement le volume de la boule ouverte $B_R$ de centre 0 et de rayon $R$. En passant au coordonnées sphérique et en appliquant le théorème de Fubini on calcule

$$\operatorname{Vol}(B_R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r^2 \cos(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

En guise d'exercice, on peut retrouver ce résultat en utilisant les coordonnées cylindriques (on pourra vérifier au passage qu'elles sont évidemment moins bien adapté à ce contexte). Soit $z \in \mathbb{R}$. Si $|z| \geqslant R$ alors on n'a $(x, y, z) \in B_R$ pour aucun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (la tranche correspondante est vide). On suppose maintenant que $|z| < R$. Alors pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y, z) \in B_R \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < R^2 - z^2.$$

La tranche correspondante est le disque de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$. En utilisant les coordonnées polaires, on obtient que l'air de cette tranche est égale à $\pi(R^2 - z^2)$. Ainsi le volume de $B_R$ est donné par

$$\operatorname{Vol}(B_R) = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\, dz = \pi\left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

On termine avec les intégrales de Riemann en dimension 3 :

*Exemple* 5.83. On note $B$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$. Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ on note $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^3 \backslash B$ si et seulement si $\alpha > 3$ et elle est intégrable sur $B$ si et seulement si $\alpha < 3$.

## 5.7 Exercices

### 5.7.1 Définition de l'intégrale

***Exercice* 2.** Soient $\mu_1$ et $\mu_2$ deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. Pour $A \in \mathcal{M})$ on pose $\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$.
**1.** Montrer que cela définit une mesure $\mu$ sur $(X, \mathcal{M})$.
**2.** Soit $f$ une fonction mesurable de $X$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est intégrable pour la mesure $\mu$ si et seulement si elle l'est pour les mesures $\mu_1$ et $\mu_2$, et que dans ce cas on a

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu_1 + \int_X f\, d\mu_2.$$

***Exercice* 3.** Montrer la proposition 5.21.

***Exercice* 4.** Montrer la proposition 5.20.

***Exercice* 5.** Montrer le théorème 5.65.

***Exercice* 6.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f$ une fonction intégrable de $X$ dans $\mathbb{R}$.
**1.** Montrer que pour tout $a > 0$ on a

$$\mu\big( \{x \in X \mid |f(x)| \geqslant a\} \big) \leqslant \frac{1}{a} \int_X |f| \, d\mu.$$

**2.** Montrer que

$$a\mu\big( \{x \in X \mid |f(x)| \geqslant a\} \big) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0.$$

***Exercice* 7.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f$ une fonction intégrable de $X$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu(A) \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \int_A |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

***Exercice* 8.** Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$\int_0^x f(t) \, dt = 0.$$

Montrer que $f = 0$ presque partout.

### 5.7.2 Passage à la limite sous l'intégrale

***Exercice* 9.** Étudier la limite éventuelle quand $n$ tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n} \, dx.$$

***Exercice* 10.** Soit $f$ une fonction borélienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{[0,1]} e^{nx} f \, d\lambda(x) \leqslant M.$$

**1.** Montrer que $f = 0$ p.p.
**2.** On suppose de plus que $f$ est continue. Montrer que $f = 0$.

***Exercice* 11.** Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-n \sin(x)^2} f(x) \, dx.$$

***Exercice* 12.** Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} \, dx.$$

***Exercice* 13.** Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} \, dx.$$

***Exercice* 14.** **1.** Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx.$$

**2.** En déduire que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{1+n} = \ln(2).$$

***Exercice* 15.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt.$$

***Exercice* 16.** Soit $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs. En utilisant le vocabulaire de la théorie de l'intégration, redémontrer le fait que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}.$$

***Exercice* 17.** Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbb{R}_+$.
**1.** Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite simple, qu'on notera $f$.
**2.** On suppose que $f_0$ est intégrable. Montrer que

$$\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f\,d\mu.$$

**3.** Montrer que la conclusion n'est plus valable si on retire l'hypothèse que $f_0$ est intégrable.

***Exercice* 18.** Étudier la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx.$$

***Exercice* 19.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$ tels que la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$$

converge simplement vers 0 pour tout $x\in[a,b]$. On veut montrer que $a_n$ et $b_n$ tendent vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.
**1.** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe $\varphi_n\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = r_n\cos(nx+\varphi_n),$$

où $r_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$.
**2.** On suppose pour cette question que la fonction $x\mapsto r_n\cos(nx+\varphi_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[a,b]$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Montrer que $r_n\to 0$ quand $n\to 0$.
**3.** On suppose que $r_n$ ne tend pas vers 0. Montrer qu'il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers qui tend vers $+\infty$ et telle que

$$\int_a^b \cos(n_kx+\varphi_{n_k})^2\,dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

**4.** Montrer que

$$\int_a^b \cos(nx+\varphi_n)^2\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b-a}{2}$$

et conclure.

**Exercice 20.** On cherche à montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^n}.$$

**1.** Montrer que les deux membres de l'égalité sont bien définis.
**2.** Pour $p, q \in \mathbb{N}$ on note $I(p,q) = \int_0^1 x^p \ln(x)^q\,dx$.
 a. Montrer que l'intégrale $I(p,q)$ est bien définie pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
 b. Calculer $I(p,0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
 c. En déduire la valeur de $I(p,q)$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
**3.** En développant $\frac{1}{x^x}$ en série, montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} I(n,n).$$

**4.** Conclure.

### 5.7.3 Intégrales à paramètres

**Exercice 21.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$). Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_{[a,x]} f\,d\lambda & \text{si } x \geqslant a, \\ -\int_{[x,a]} f\,d\lambda & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Montrer que $F$ est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 22.** On considère les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

**1.** Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
**2.** Montrer que la fonction $h(x) = g(x) + f^2(x)$ est constante.
**3.** Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**Exercice 23.** **1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ est convergente. On note alors $\varphi(x)$ sa valeur.
**2.** Montrer que cela définit une fonction $\varphi$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
**3.** Montrer que $\varphi'(x) = -\frac{x\varphi(x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
**4.** En déduire (avec l'exercice précédent) que $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

**Exercice 24.** Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} dt.$$

**1.** Montrer que $\psi$ est bien définie sur $[0, +\infty[$.
**2.** Montrer que $\psi$ est continue sur $[0, +\infty[$
**3.** Montrer que $\psi$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$.
**4.** Calculer $\psi(0)$ et étudier la limite de $\psi$ en $+\infty$.
**5.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\psi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds$.
**6.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\int_0^{+\infty} \psi'(x)dx = -2\left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds\right)^2$.
**7.** En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

***Exercice* 25.** Pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ on pose

$$f(t, x) = \cosh\left(\frac{t}{1+x}\right) - 1.$$

**1.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $f(t, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On note alors

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, \cdot)\, d\lambda = \int_0^{+\infty} f(t, x)\, dx.$$

**2.** Montrer que la fonction $F$ et continue et dérivable, et donner une expression de $F'$.

***Exercice* 26. 1.** Montrer que pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}\sin(t)}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On note alors

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}\sin(t)}{t}\, dt.$$

**2.** Montrer que $F$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

**3.** Étudier la limite éventuelle de $F$ en 0.

### 5.7.4 Intégrales multiples

***Exercice* 27.** Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables. Montrer qu'en général l'ensemble des rectangles mesurables de $X_1 \times X_2$ n'est pas une tribu.

***Exercice* 28.** Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables.
**1.** Montrer que $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est la plus petite tribu sur $X_1 \times X_2$ qui rende mesurables les projections canoniques

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \to & X_1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \to & X_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{array} \right.$$

**2.** Soient $(Y, \mathcal{N})$ un espace mesurable et $f$ une fonction de $(Y, \mathcal{N})$ dans $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$. Montrer que $f$ est mesurable si et seulement si $\pi_1 \circ f : (Y, \mathcal{N}) \to (X_1, \mathcal{M}_1)$ et $\pi_2 \circ f : (Y, \mathcal{N}) \to (X_2, \mathcal{M}_2)$ le sont.

***Exercice* 29.** Soient $X_1$ et $X_2$ deux espaces topologiques, munis de leurs tribus boréliennes.
**1.** Montrer que $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) \subset \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$.
**2.** Montrer que si $X_1$ et $X_2$ sont des espaces métriques séparables, alors $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) = \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$.

***Exercice* 30.** Soient $\mu_1$ et $\mu_2$ deux mesures $\sigma$-finies non nulles sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathbb{R}^2 \backslash \Delta) = 0,$$

où on a noté $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.
**1.** Montrer que $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
**2.** Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont tels que $\mu_1(A_1) > 0$ et $\mu_2(A_2) > 0$ alors $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.
**3.** En ré-écrivant l'égalité $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathbb{R}^2 \backslash \Delta) = 0$, montrer que pour $\mu_1$-presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mu_2(\mathbb{R} \backslash \{x\}) = 0$.
**4.** En déduire qu'il existe $a_2 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 > 0$ tels que $\mu_2 = \alpha_2 \delta_{a_2}$.
**5.** Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in ]0, +\infty]$ tels que $\mu_1 = \alpha_1 \delta_a$ et $\mu_2 = \alpha_2 \delta_a$.

**_Exercice_ 31.** Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$ et calculer leurs mesures de Lebesgue.

(i) $T = \big\{(x, y) \in [0, 1]^2 \,|\, x + y \leqslant 1\big\}$.

(ii) $C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| + |y| < 1\big\}$.

(iii) Le disque de centre 0 et de rayon 1.

(iv) Le disque de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$.

(v) $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leqslant e^{-|y|}\big\}$.

**_Exercice_ 32.** Pour $(x, y) \in [0, 1]^2$ on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

**1.** Montrer que cela définit une fonction borélienne de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$.
**2.** Calculer (en justifiant)

$$\int_{x=0}^{1} \left( \int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{y=0}^{1} \left( \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

*Indication : on pourra dériver par rapport à $y$ l'expression $y/(x^2 + y^2)$.*
**3.** Commenter.

**_Exercice_ 33** (Intégrales sur des rectangles)**.** Après en avoir justifié l'existence, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{[-1,1]\times[1,2]} \frac{x^2}{y}\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\,dx\,dy,$$

$$I_3 = \int_{[3,7]\times[-2,2]} \frac{x}{\sqrt{1+xy+x^2}}\,dx\,dy.$$

**_Exercice_ 34.** On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$. Calculer

$$I_1 = \int_D 1\,dx\,dy, \quad I_2 = \int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad I_3 = \int_D xy(x+y)\,dx\,dy.$$

**_Exercice_ 35.** Calculer $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

**1.** $f(x, y) = x + y$, $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \geqslant x \geqslant 0,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$,
**2.** $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^3}$, $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3 > x > 1,\ y > 2,\ x + y < 5\}$,
**3.** $f(x, y) = \cos(xy)$, $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2 \geqslant x \geqslant 1,\ 0 \leqslant xy \leqslant 2\}$,
**4.** $f(x, y) = x$, $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geqslant 0,\ x - y + 1 \geqslant 0,\ x + 2y - 4 \leqslant 0\}$,
**5.** $f(x, y) = xy$, $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy + x + y \leqslant 1\}$.

**_Exercice_ 36.** Calculer l'intégrale de la fonction $(x, y) \mapsto e^{x+y}$ sur le domaine

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x+y| < 1, |x-y| < 1\big\}.$$

**_Exercice_ 37.** Calculer les aires des domaines suivants :
$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4 - x^3\}$,
$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ -\sin(x) \leqslant y \leqslant \sin(x)\}$,
$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geqslant 0,\ x - y + 1 \geqslant 0,\ y \leqslant -x^2 + 2x + 1\}$.

***Exercice* 38.** On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y \in [0,1],\ x^2 + y^2 \geqslant 1\}$. Calculer

$$I = \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

***Exercice* 39.** Calculer

$$\iiint_D x\, dx\, dy\, dz, \quad \text{où} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1\}.$$

***Exercice* 40.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

**1.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
**2.** Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
**3.** Vérifier que $f$ est mesurable à valeurs positives. Calculer $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy$.

***Exercice* 41.** **1.** On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ de la forme

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times \{n\}),$$

où $A_n$ est un borélien de $\mathbb{R}_+$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
a. Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$.
b. Montrer que $\mathcal{M}$ est la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
**2.** a. Soit $\nu$ une mesure finie sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Montrer qu'il existe une unique mesure finie $\mu$ sur $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}, \mathcal{M})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\mu(A \times \{n\}) = \int_A e^{-x} \frac{x^n}{n!}\, d\nu(x).$$

b. Exprimer $\mu(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N})$ en fonction de $\nu(\mathbb{R}_+)$.
**3.** a. On suppose que $\nu$ est la mesure de Dirac $\delta_0$ en 0. Montrer que $\mu$ est la mesure produit de la mesure de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}_+$ et de la mesure de Dirac en 0 sur $\mathbb{N}$.
b. On suppose que $\nu$ est la somme des mesures de Dirac en 0 et en 2 : $\nu = \delta_0 + \delta_2$. En considérant pour tout $n$ le quotient

$$\frac{\mu(\{0\} \times \{n\})}{\mu(\{0,2\} \times \{n\})},$$

montrer que $\mu$ n'est pas la mesure produit d'une mesure sur $\mathbb{R}_+$ avec une mesure sur $\mathbb{N}$.
**4.** On revient au cas général (en particulier, $\mu$ n'est pas nécessairement une mesure produit). Exprimer l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}} e^{inx}\, d\mu(x,n)$$

en fonction d'une intégrale sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à $\nu$.

**5.** a. On a $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_+ \times \{n\}$ donc $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ est dans $\mathcal{M}$. Soit

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times \{n\} \in \mathcal{M}.$$

On a
$$(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N})\backslash A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}_+\backslash A_n) \times \{n\} \in \mathcal{M},$$
car $\mathbb{R}_+\backslash A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient maintenant $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe une suite $(A_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ tels que
$$A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{k,n} \times \{n\}\,.$$
On a alors
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,n}\right) \times \{n\}\,.$$
Comme $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela prouve que $\bigcup A_k \in \mathcal{M}$, et donc que $\mathcal{M}$ est une tribu.

b. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On a
$$A \times B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \{n\}\,,$$
avec $A_n = A$ si $n \in \mathcal{P}(B)$ et $A_n = \varnothing$ sinon. Cela prouve que $A \times B \in \mathcal{M}$. Ainsi $\mathcal{M}$ est une tribu de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ qui contient tous les rectangles mesurables. On a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{M}$. Soit maintenant $A \in \mathcal{M}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ telle que $A = \bigcup A_n \times \{n\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \times \{n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{P}(n)$, et donc $A \in \mathcal{M}$. Cela prouve que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Finalement on a bien $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N})$
**6.**

### 5.7.5 Changements de variables

***Exercice* 42.** En passant aux coordonnées polaires, calculer l'aire du domaine
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 3 \text{ et } y > 0\right\}$$
(et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu).

***Exercice* 43.** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x,\, 0 \leqslant y, 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy.$$

***Exercice* 44.** Calculer $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, où on a noté $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

***Exercice* 45.** On considère le domaine $D$ borné délimité par les droites d'équations $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$. Calculer l'intégrale $\iint_D (x + y)\,dx\,dy$
**1.** par calcul direct,
**2.** en effectuant le changement de variable $(u,v) = (x + y, x - y)$.

***Exercice* 46.** Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0\}$.

***Exercice* 47.** Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ dans les cas suivants :

**1.** $f(x,y,z) = \cos x$, $\quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$,
**2.** $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 4,\, 0 \leqslant z \leqslant 2\}$.

***Exercice* 48.** Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x,y) \mapsto (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$ sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\}$, où $b > a > 0$. On pourra effectuer le changement de variables $u = xy$, $v = y^2 - x^2$.

***Exercice* 49.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et $0 < c < d$. On note

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax^2 \leqslant y \leqslant bx^2 \text{ et } c \leqslant xy \leqslant d\}.$$

Calculer l'aire de $D$ (en justifiant tous les arguments, on pourra effectuer le changement de variable $u = y/x^2$, $v = xy$).

***Exercice* 50.** Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que le *centre de gravité* de $D$ est le point $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$ défini par

$$(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \left( \iint_D x \, dx \, dy, \iint_D y \, dx \, dy \right).$$

**1.** Déterminer le centre de gravité du disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
**2.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le trapèze $D_k \subset \mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,k)$. Déterminer le centre de gravité $(x_G, y_G)$ de $D_k$.
**3.** Considérons l'application affine $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$\varphi(x,y) = (x + 3y, x - y) + (2,3).$$

Soit $(x'_G, y'_G)$ le centre de gravité du domaine $\varphi(D)$. Montrer que $(x'_G, y'_G) = \varphi(x_G, y_G)$.
**4.** Plus généralement, montrer que pour toute application affine (inversible) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, le centre de gravité de $\varphi(D)$ est $\varphi(x_G, y_G)$.
**5.** Déduire de la question précédente que si $D$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées alors son centre de gravité est l'origine.

***Exercice* 51.** Soient $a$ et $b$ des réels positifs. On définit le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leqslant 1\}$.
**1.** Calculer $\iint_D (2x^3 - y) dxdy$.
**2.** Calculer les coordonnées du centre de gravité de $D$.

***Exercice* 52.** Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Calculer le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ d'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} < 1.$$

***Exercice* 53.** Soient $r > 0$ et $a > 0$. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le volume (tore solide) obtenu par révolution autour de l'axe des $z$ de

$$A = \{(y,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \,|\, (y-a)^2 + z^2 < r^2\}.$$