Chapitre 6

Espaces de Lebesgue

Ce chapitre marque un tournant dans l'étude des propriétés de l'intégrale. Jusqu'à présent, on s'intéressait surtout à l'intégrale d'une fonction particulière. Peut-on donner un sens à l'intégrale de cette fonction ? peut-on en donner la valeur ? etc. Tout au plus, on a considéré des familles de fonctions dépendant d'un paramètre, et on a regardé la dépendance de l'intégrale par rapport à ce paramètre.

Dans ce chapitre le point de vue commence à changer. On s'intéresse aux propriétés de l'espace des fonctions intégrables dans sa globalité. C'est le point de départ de ce qu'on appelle l'analyse fonctionnelle. On va montrer ici qu'on peut utiliser l'intégrale pour définir une distance entre les fonctions. Pour cela, on repart simplement de l'interprétation initiale de l'intégrale comme « aire sous la courbe ». En effet, on tentera de définir la norme d'une fonction intégrable f par l'intégrale de $|f|$, c'est-à-dire l'aire délimitée par la courbe de f et « l'axe des abscisses ». Plus généralement, la distance entre deux fonctions sera l'aire délimitée par les courbes des deux fonctions.

On a dû introduire une nouvelle intégrale, mais ce travail va commencer à vraiment payer, puisque l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue lui-même héritera des bonnes propriétés de l'intégrale. Mais, car il y a toujours un mais, il va falloir encore travailler un peu et faire quelques concessions pour obtenir effectivement ces bonnes propriétés.

On va également introduire dès le premier paragraphe des variantes. On constatera par exemple par la suite que l'espace des fonctions de carrés intégrables est encore plus agréable que l'espace des fonctions intégrables lui-même. Toutes ces bonnes propriétés (qu'il faudra encore compléter dans des cours ultérieurs) fourniront les cadres de travail adéquats pour beaucoup de problèmes d'analyse.

6.1 Les Espaces de Lebesgue $\mathcal{L}^p$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. En plus de l'espace des fonctions intégrables, qu'on avait noté $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $\mathcal{L}^1(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), on introduit les espaces suivants :

Définition 6.1. Soit $p \in [1, +\infty[$. Étant donnée une fonction f mesurable de X dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), on note

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \in [0, +\infty].$$

Version du 10 septembre 2021

On note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $\mathcal{L}^p(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_p < +\infty.$$

Il est difficile d'anticiper l'intérêt d'une telle définition, mais au moins elle n'est pas très compliquée. On s'intéresse à l'intégrabilité de $|f|^p$ plutôt qu'à celle de $|f|$. Pourquoi pas...

Attention à la calligraphie ! Le $\mathcal{L}$ (« L rond », qui en écriture manuscrite ressemble plutôt à $\mathscr{L}$) ne doit pas être confondu avec un L droit tel qu'il apparaîtra un peu plus loin.

Exemple 6.2. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\alpha > 0$.

(i) Pour $x \geqslant 1$ on pose $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors f_α appartient à $\mathcal{L}^p([1, +\infty[)$ si et seulement si $\alpha p > 1$.

(ii) Pour $x \in]0, 1]$ on pose $g_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors g_α appartient à $\mathcal{L}^p(]0, 1])$ si et seulement si $\alpha p < 1$.

(iii) Pour $x > 0$ on pose $h_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors h_α n'appartient pas à $\mathcal{L}^p(]0, +\infty[)$.

Définition 6.3. Étant donnée une fonction f mesurable de X dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), on note [1]

$$\|f\|_\infty = \inf \{\rho \geqslant 0 \mid |f| \leqslant \rho \text{ presque partout}\} \quad \in [0, +\infty].$$

On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $\mathcal{L}^\infty(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_\infty < +\infty.$$

On dit alors que f est essentiellement bornée.

Lorsque la mesure μ est telle que $\varnothing$ est le seul ensemble de mesure nulle, les fonctions essentiellement bornées sont exactement les fonctions bornées, et dans ce cas, $\|f\|_\infty$ est simplement la borne supérieure de $|f|$. C'est par exemple le cas pour les suites.

Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on note

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $p \in [1, +\infty[$, et

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| .$$

C'est cohérent avec les définition précédentes si $\mathbb{N}$ est muni de la mesure de comptage. Ce cas particulier mérite une notation particulières.

Définition 6.4. Pour $p \in [1, \infty]$ on note $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Dans le cas général, le « sup essentiel » $\|f\|_\infty$ est la borne supérieure de $|f|$ à un ensemble de mesure nulle près. On autorise $|f|$ à dépasser $\|f\|_\infty$ sur un ensemble négligeable. En particulier, une fonction est essentiellement bornée si elle coïncide presque partout avec une fonction bornée.

1. Il est sous-entendu qu'on pose $\|f\|_\infty = +\infty$ dans le cas où aucun $\rho \geqslant 0$ n'est tel que $|f| \leqslant \rho$ presque partout.

Exemple 6.5. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$. Étant donné $\rho \geqslant 0$, on a $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}| \leqslant \rho$ presque partout, du fait que $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle. Cela prouve que

$$\|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\|_\infty = 0.$$

On conclut de la même façon en considérant la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

qui n'est pourtant pas bornée.

Pour $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$ la situation est différente. En effet, puisque $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est pas de mesure nulle, on a bien $\left|\mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}\right| \leqslant \rho$ presque partout (en fait, partout) pour tout $\rho \geqslant 1$, mais ce n'est plus le cas pour $\rho \in [0,1[$. En prenant l'infimum des ρ qui conviennent, on obtient que

$$\left\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}\right\|_\infty = 1.$$

Proposition 6.6. *Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$. Alors pour presque tout $x \in X$ on a $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$.*

On utilisera souvent cette proposition. En première lecture on ne voit pas forcément immédiatement la différence avec la définition même de $\|f\|_\infty$. Il s'agit ici de la subtile différence entre minimum et borne inférieure. On a définit $\|f\|_\infty$ comme étant la borne inférieure de l'ensemble des ρ vérifiant la propriété « $|f| \leqslant \rho$ presque partout ». Mais cela n'implique pas a priori que la propriété est vérifiée pour $\rho = \|f\|_\infty$. La proposition assure que c'est bien le cas, ce qui signifie qu'on peut en fait écrire

$$\|f\|_\infty = \min \{\rho \geqslant 0 \mid |f| \leqslant \rho \text{ presque partout}\}.$$

Démonstration. Le résultat est clair si $\|f\|_\infty = +\infty$. On suppose maintenant que f est essentiellement bornée. Pour $\rho \geqslant 0$ on note

$$A_\rho = \{x \in X \mid |f(x)| > \rho\}$$

C'est une partie mesurable de X, comme image réciproque de l'ouvert $]\rho, +\infty[$ par la fonction mesurable $|f|$. Soit $\rho > \|f\|_\infty$. Par définition de $\|f\|_\infty$, il existe $\tilde{\rho} \leqslant \rho$ tel que $\mu(A_{\tilde{\rho}}) = 0$. Puisque $A_\rho \subset A_{\tilde{\rho}}$, on a également $\mu(A_\rho) = 0$. Ainsi [2] A_ρ est de mesure nulle pour tout $\rho > \|f\|_\infty$. On observe ensuite que

$$A_{\|f\|_\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{\|f\|_\infty + \frac{1}{n}}.$$

Puisque $A_{\|f\|_\infty + \frac{1}{n}}$ est de mesure nulle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cela prouve que $\mu(A_{\|f\|_\infty}) = 0$. Autrement dit, on a bien $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle. □

Contrairement à ce que la notation suggère, les applications $\|\cdot\|_p$ pour $p \in [1, +\infty]$ ne sont en général pas des normes sur $\mathcal{L}^p(X)$! En effet, si f est une fonction mesurable sur X qui est nulle presque partout mais pas partout, alors on a

$$f \neq 0 \quad \text{et} \quad \|f\|_p = 0.$$

Cela contredit évidemment la définition d'une norme. C'est pénible.

2. Attention, c'est à nouveau une propriété qui n'est pas directement donnée par la définition de $\|f\|_\infty$.

On avait promis que cette nouvelle intégrale donnerait de bonnes propriétés pour les espaces de fonctions intégrables, et au final ce qui serait une norme naturelle n'est même pas une norme. Avec les fonctions continues, cette norme $\|\cdot\|_1$ ne définissait pas un espace complet, mais au moins c'était une norme.

Patience, le problème n'est pas si grave. On a déjà pris l'habitude d'oublier ce qui se passe sur un ensemble de mesure nulle. On va continuer de le faire, mais en toute rigueur, évidemment.

6.2 Inégalité de Hölder

Avant de s'attaquer à résoudre les problèmes des définitions précédentes, on va commencer par recenser ce qui fonctionne bien. On montre dans ce paragraphe que les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ sont des espaces vectoriels et que les applications $\|\cdot\|_p$ (puisqu'on ne peut pas parler de normes) vérifient sur $\mathcal{L}^p(X)$ l'inégalité triangulaire (notez que l'homogénéité est évidente). Ces propriétés sont déjà connues pour $p = 1$ et $p = +\infty$, mais elles ne sont pas triviales en général (on pourra se rappeler qu'il n'est déjà pas évident de vérifier que la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ vérifie bien l'inégalité triangulaire).

Pour cela, on va commencer par montrer l'inégalité de Hölder, qui sera extrêmement importante pour travailler dans les espaces $\mathcal{L}^p(X)$. On sait que le produit de deux fonctions intégrables n'est en général pas intégrable. Et même quand c'est le cas, on ne peut pas écrire des attrocités telles que « l'intégrale d'un produit est inférieure (ou pire, égale) au produit des intégrales » ! De même, les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ ne sont pas stables par produit (à part pour $p = +\infty$).

Par contre, le produit fg d'une fonction intégrable f et d'une fonction bornée g est intégrable, et son intégrale est inférieure ou égale au produit de l'intégrale de f et de la borne supérieure de g. En élargissant notre étude à tous les espaces $\mathcal{L}^p(X)$, on va pouvoir considérer des produits de fonctions de façon plus générale.

Définition 6.7. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. On dit que p et q sont des **exposants conjugués** si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(avec la convention naturelle $1/\infty = 0$).

Exemple 6.8. On note que 1 et $+\infty$ sont conjugués, tandis que 2 est conjugué à lui-même. Par exemple, l'exposant conjugué de 3 et $\frac{3}{2}$. Plus généralement, un exposant $p \in]1, 2[$ est toujours conjugué à un exposant $q \in]2, +\infty[$, et inversement.

Théorème 6.9 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugés. Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \, . \tag{6.1}$$

En particulier, pour $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Avec ce résultat, on commence à comprendre l'intérêt d'avoir introduit tous ces espaces $\mathcal{L}^p(X)$. On a là toute une famille de conditions suffisantes pour que le produit de deux fonctions soit intégrable. On n'ira pas beaucoup plus loin dans cette direction ici, mais il y a tout un tas d'autres résultats de ce genre où les espaces $\mathcal{L}^p(X)$, qui ne sont a priori pas très naturels, interviennent pour obtenir des conclusions très utiles. Et ce n'est qu'un aperçu de l'intérêt de ces espaces.

Démonstration. • Le produit fg est bien mesurable comme produit de deux fonctions mesurables. On commence par observer que la deuxième conclusion de la proposition est conséquence de la première. En effet, si f et g sont dans $\mathcal{L}^p(X)$ et $\mathcal{L}^q(X)$ respectivement, alors le produit $\|f\|_p \|g\|_q$ est fini, et (6.1) implique donc que fg est intégrable. Il suffit donc de montrer (6.1). Si f ou g est presque partout nulle, c'est également le cas pour le produit fg. Dans ce cas le membre de gauche dans (6.1) est nul, donc l'inégalité est bien vérifiée. On suppose maintenant que f et g ne sont pas presque partout nulles. Enfin, si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$, alors l'inégalité est encore automatiquement vraie. On peut donc maintenant supposer que ce n'est pas le cas.
• On suppose que $p = 1$ et $q = \infty$ (le cas $p = \infty$, $q = 1$, est analogue). Comme $|(fg)(x)| \leqslant |f(x)| \|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in X$ on a bien

$$\int_X |fg| \, d\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_X |f| \, d\mu.$$

• On considère maintenant le cas $p, q \in]1, \infty[$. Pour $x \in X$ on note

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}.$$

D'après l'inégalité de Young on a, pour tout $x \in X$,

$$|F(x)G(x)| \leqslant \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q}.$$

Tous ces termes définissent des fonctions mesurables. Après intégration, on obtient

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X |fg| \, d\mu = \int_X |FG| \, d\mu \leqslant \frac{1}{p} \int_X |F|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \int_X |G|^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où le résultat. □

On peut de la même façon considérer un produit de plus de deux fonctions. Le corollaire suivant se montre par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ (l'écrire pour $m = 3$ en guise d'exercice).

Corollaire 6.10. *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$ tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1.$$

Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Alors on a

$$\int_X |f_1 \dots f_m| \, d\mu \leqslant \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(X,\mathcal{M},\mu)}.$$

En particulier, si $f_1 \in \mathcal{L}^{p_1}(X, \mathcal{M}, \mu)$, ..., $f_m \in \mathcal{L}^{p_m}(X, \mathcal{M}, \mu)$, alors on a $f_1 \dots f_m \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

***Exercice* 1.** Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Montrer que pour toutes fonctions mesurables f et g de X dans $\mathbb{R}$ on a

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

En déduire que pour $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fg \in \mathcal{L}^r(X, \mathcal{M}, \mu)$.

6.3 Inégalité de Minkowski

Une première application de l'inégalité de Hölder est l'inégalité de Minkowski que l'on montre maintenant. Cette inégalité donne en particulier l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$.

Théorème 6.11 (Inégalité de Minkowski). *Soient $p \in [1, +\infty]$. Alors pour deux fonctions mesurables f et g on a*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \,. \tag{6.2}$$

En particulier, pour $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Démonstration. • Comme pour l'inégalité de Hölder, la seconde conclusion est conséquence de l'inégalité (6.2). On rappelle que la somme de deux fonctions mesurables est mesurable. En outre, l'inégalité (6.2) est claire si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_p = +\infty$. On suppose donc que f et g sont dans $\mathcal{L}^p(X)$. Enfin, puisque $|f + g| \leqslant |f| + |g|$, le résultat est clair pour $p = 1$ et $p = +\infty$.
• On suppose maintenant que $p \in]1, +\infty[$. Puisque

$$\|f+g\|_p \leqslant \||f|+|g|\|_p$$

et

$$\|\,|f|\,\|_p + \|\,|g|\,\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \,,$$

il suffit de considérer le cas où f et g sont à valeurs positives.
• Par convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}_+$ on a, pour tout $x \in X$,

$$\left(\frac{f(x)+g(x)}{2}\right)^p \leqslant \frac{f(x)^p + g(x)^p}{2}.$$

Ou encore

$$\big(f(x)+g(x)\big)^p \leqslant 2^{p-1}\big(f(x)^p + g(x)^p\big).$$

Cela prouve que $f + g$ est dans $\mathcal{L}^p(X)$. On note $h = f + g$. Si $\|h\|_p = 0$ l'inégalité de Minkowski est claire. On suppose donc que $\|h\|_p > 0$. On note $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de p. On a alors

$$\left\|h^{p-1}\right\|_q = \left(\int_X h^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X h^p\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|h\|_p^{p-1} < +\infty.$$

Par l'inégralité triangulaire dans $\mathcal{L}^1(X)$ puis l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
\|h\|_p^p = \|h^p\|_1 = \left\|fh^{p-1} + gh^{p-1}\right\|_1 &\leqslant \left\|fh^{p-1}\right\|_1 + \left\|gh^{p-1}\right\|_1 \\
&\leqslant \|f\|_p \left\|h^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p \left\|h^{p-1}\right\|_q \\
&\leqslant \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\,\|h\|_p^{p-1}\,.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en simplifiant par $\|h\|_p^{p-1}$. □

Pour $p \in [1, +\infty]$, il est facile de voir que pour $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$) on a $\|f\|_p \geqslant 0$ et $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\,\|f\|_p$, et on vient de vérifier l'inégalité triangulaire. Ainsi, le problème de définie positivité évoqué au paragraphe précédent est le seul problème pour avoir une norme. On parle alors de semi-norme.

Proposition 6.12. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel et l'application*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p(X,\mathcal{M},\mu) & \to & [0,+\infty[\\ f & \mapsto & \|f\|_p \end{array}\right.$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

6.4 Les Espaces de Lebesgue L^p

On a vu aux deux paragraphes précédents que les espaces de Lebesgue $\mathcal{L}^p(X)$, munis des applications $\|\cdot\|_p$, sont quasiment des espaces vectoriels normés. Le seul problème est que deux fonctions égales presque partout sont considérées comme étant à distance nulle, alors qu'elles ne sont pas nécessairement égales.

Une façon de s'en sortir est de considérer que deux fonctions presque partout égales sont en fait plus ou moins égales. Après tout, dès lors qu'il est question d'intégration, deux fonctions égales presque partout se comportent exactement de la même façon, donc on ne perd pas grand chose à les confondre[3].

Bien entendu, on ne peut pas décréter que deux fonctions différentes sont égales. Si on veut masquer la distinction entre deux fonctions presque partout égales et les identifier, le moyen rigoureux de procéder est de passer au quotient par rapport à cette relation d'égalité presque partout.

Définition 6.13. On considère sur l'espace des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$f \,\mathcal{R}\, g \quad \iff \quad f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x \in X.$$

On note alors $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'espace obtenu en quotientant $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Autrement dit, un élément de $L^p(X)$ est une classe d'équivalence d'éléments de $\mathcal{L}^p(X)$. Ce ne sont plus à proprement parler des fonctions. Par commodité on fera l'abus de notation de parler de fonctions de $L^p(X)$. Cela signifie qu'on parle en fait de n'importe quelle fonction dans une classe d'équivalence. Quand on donne une propriété d'une fonction de $L^p(X)$, il faut donc qu'elle soit valable pour n'importe quel représentant de la classe d'équivalence. Cela fonctionne avec l'intégrale. Les fonctions d'une même classe d'équivalence sont soit toutes intégrables, soit aucune ne l'est. Et si elles sont toutes intégrables, alors elles sont toutes la même intégrale. On peut donc parler de l'intégrale d'un élément de $L^1(X)$.

Plus généralement, si f et g sont égales presque partout, alors on a $\|f\|_p = \|g\|_p$, donc si on note $[f]$ ou $[g]$ la classe d'équivalence commune de f et g on peut poser

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p\,.$$

La définition est bien licite car elle ne dépend pas du choix d'un représentant. On définit ainsi une application de $L^p(X)$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit de la même façon la somme de deux éléments de $L^p(X)$, et la multiplication d'un élément de $L^p(X)$ et d'un scalaire. On vérifie que cela donne à $L^p(X)$ la propriété attendue :

Proposition 6.14. *L'espace $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ hérite de la stucture d'espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et de la semi-norme $\|\cdot\|_p$, qui est en fait une norme.*

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^p(X)$ tels que $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p. Alors on a $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ p.p. et $\lambda f_1 = \lambda f_2$ p.p. Ainsi, si on note $[f], [g] \in L^p(X)$ les classes d'équivalence des fonctions $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ on peut définir

$$[f] + [g] = [f + g], \quad \text{et} \quad \lambda[f] = [\lambda f].$$

On vérifie que cela munit $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ d'une structure d'espace vectoriel. De même, la semi-norme $\|\cdot\|_p$ définit une semi-norme sur $L^p(X)$. On obtient en fait une norme car si $\|[f]\|_p = 0$ on a $f = 0$ p.p. et donc $[f] = [0]$. □

3. En fait cela posera quand même des difficultés, mais tant pis, on s'adaptera le moment venu.

Remarque 6.15 (Remarque très très très importante). Lorsque l'on parle d'une « fonction » f de $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, cela n'a pas de sens de parler de la valeur de f en un point, puisque f représente toute une famille de fonctions qui n'ont pas la même valeur en ce point. Et ce n'est pas un problème qui ne se pose que sur un ensemble de mesure nulle. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ il existe deux représentants de f qui prennent des valeurs différentes en x_0, donc on ne peut pas parler de $f(x_0)$. C'est là toute la difficulté de travailler dans les espaces $L^p(X)$. On doit manipuler des « fonctions » sans plus jamais parler de la valeur de ces fonctions en un point. C'est complètement contraire à la définition mathématique d'une fonction, selon laquelle à tout élément de l'ensemble de départ on peut associer un unique élément de l'ensemble d'arrivée. C'est la mauvaise nouvelle de ce chapitre.

Pour l'inégalité de Hölder aucun problème, elle ne fait intervenir que des intégrales et passe sans aucune difficulté au quotient (à vérifier en exercice, pour vous assurer que vous avez bien compris ce que signifie ce passage au quotient).

Théorème 6.16 (Inégalité de Hölder, le retour)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugés. Alors pour $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fg \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

6.5 Théorème de Riesz-Fisher

Le chemin a été long et tortueux, mais nous voilà enfin arrivés là où nous voulions en venir ! Nous pouvons maintenant montrer que nous avons construit un espace complet de « fonctions » intégrables. Plus généralement, on montre que tous les espaces $L^p(X)$ sont complets. On commence par le cas $p = +\infty$ qui est le plus simple.

Proposition 6.17. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^\infty(X)$ telle que*

$$\|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0.$$

Alors il existe $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ telle que f_n converge vers f simplement presque partout et *dans $\mathcal{L}^\infty(X)$.*

Démonstration. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ on note

$$A_n = \{x \in X \mid |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$$

et

$$B_{n,m} = \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\} .$$

Ces ensembles sont mesurables et de mesures nulles, donc si on note

$$E = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m}\right),$$

on a également $E \in \mathcal{M}$ et $\mu(E) = 0$. Soit $x \in X \backslash E$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to 0]{} 0.$$

Ainsi la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, qu'on note $f(x)$. Pour $x \in E$ on pose $f(x) = 0$. Par définition, f_n converge donc simplement presque partout vers f. En outre, la fonction f ainsi définie est mesurable et pour tout $x \in X \backslash E$ on a

$$|f(x)| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} |f_n(x)| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty .$$

Puisque la suite $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cela prouve que $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$. De même on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty ,$$

donc

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Cela conclut la démonstration. □

On sait qu'une suite réelle ou complexe absolument convergente est convergente. C'est une conséquence de la complétude de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Ainsi, pour $p = +\infty$, la proposition suivante est directement conséquence de la précédente. Pour $p < +\infty$ on fait le cheminement inverse. On va d'abord montrer ce résultat pour en déduire ensuite la complétude de $L^p(X)$.

Proposition 6.18. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_p < +\infty.$$

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement presque partout et dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ vers une fonction $g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$. En outre on a

$$\|g\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_p . \tag{6.3}$$

Démonstration. Pour $x \in X$ on pose

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k(x)| .$$

Cela définit une fonction mesurable de X dans $[0, +\infty]$. Par le théorème de convergence monotone on a

$$\|G\|_p^p = \int_X \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |g_n| \right)^p d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \left(\sum_{k=0}^{n} |g_n| \right)^p d\mu = \lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} |g_n| \right\|_p^p .$$

Avec l'inégalité de Minkowski on obtient

$$\|G\|_p^p \leqslant \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \|g_n\|_p \right)^p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|g_n\| \right)^p .$$

Cela prouve que $G \in \mathcal{L}^p(X)$ et

$$\|G\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|g_k\|_p .$$

En particulier, cela prouve que G est presque partout finie. Ainsi il existe $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$ et $G(x) < +\infty$ pour tout $x \in X \setminus E$.

- Pour $x \in X \setminus E$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ est donc convergente. On peut alors définir

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) & \text{si } x \in X \setminus E, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

En particulier g est mesurable et $|g| \leqslant G$, ce qui assure que $g \in \mathcal{L}^p(X)$ et donne (6.3). Pour $n \in \mathbb{N}$ on a aussi

$$\left| g - \sum_{k=0}^{n} g_k \right| \leqslant G.$$

Comme G^p est intégrable et $\sum_{k=0}^{n} g_k$ converge simplement presque partout vers g, on a par le théorème de convergence dominée

$$\left\| g - \sum_{k=0}^{n} g_k \right\|_p^p = \int_X \left| g - \sum_{k=0}^{n} g_k \right|^p d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Cela prouve que $\sum_{k=0}^{n} g_k$ converge vers g dans $\mathcal{L}^p(X)$, ce qui conclut la démonstration. □

Avant d'énoncer la complétude des espaces $L^p(X)$, on montre le résultat suivant qui a son intérêt propre.

Proposition 6.19. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$. Alors il existe $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante tels que la sous suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers f simplement presque partout et dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

Démonstration. On construit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $j, m \geqslant n_k$ on a

$$\|f_j - f_m\|_p \leqslant 2^{-k}.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\|_p \leqslant 2^{-k}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$, de sorte que

$$f_{n_k} = f_{n_0} + \sum_{j=0}^{k-1} g_j.$$

D'après la Proposition 6.18 il existe $f \in \mathcal{L}^p(X)$ telle que f_{n_k} converge presque partout et dans $\mathcal{L}^p(X)$ vers f. □

Remarque 6.20. On peut construire une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p([0,1])$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{L}^p([0,1])$ mais qui ne converge ponctuellement en aucun point. Comme exemple on peut considérer les indicatrices des intervalles

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

avec $n \in \mathbb{N}$:

$$[0,1], [0,1/2], [1/2,1], [0,1/3], [1/3,2/3], [2/3,1], [0,1/4], \ldots$$

Par contre, ce que dit en particulier la Proposition 6.19 est que si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^p(X)$ converge simplement presque partout vers une fonction f *et* converge dans $\mathcal{L}^p(X)$ vers une fonction g, alors on a nécessairement $f = g$.

On a maintenant démontré tous les ingrédients nécessaires pour affirmer que les espaces $L^p(X)$ sont complets.

Théorème 6.21 (Théorème de Riesz-Fisher)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. L'espace de Lebesgue $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, muni de la norme $\|\cdot\|_p$, est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

Démonstration. Par la proposition 6.14 on sait déjà que $L^p(X)$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un espace vectoriel normé.

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(X)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère un représentant $\tilde{f}_n$ de f_n dans $\mathcal{L}^p(X)$. Alors il existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(X)$ tel que

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En effet, si $p = +\infty$, cela résulte de la Proposition 6.17. Si $p \in [1, +\infty[$ il existe d'après la Proposition 6.19 une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{L}^p(X)$ vers une certaine fonction f, et de façon générale une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente. Notant alors $f \in L^p(X)$ la classe d'équivalence de $\tilde{f}$, on a

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela prouve que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. □

On a montré que les espaces $L^p(X)$ sont des espaces de Banach, ce qui est déjà une structure très agréable pour faire de l'analyse. Il y a un cas particulier pour lequel on peut aller plus loin.

Corollaire 6.22. *L'espace de Lebesgue $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par*

$$\forall f, g \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu), \quad \langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu.$$

Bien entendu, pour cette définition, on a identifié f et g à des représentants dans $\mathcal{L}^2(X)$, et cette définition ne dépend pas du choix de tels représentants.

Cette structure particulière pour le cas $p = 2$ explique que l'espace $L^2(X)$ est si important en pratique, finalement plus que l'espace $L^1(X)$ qui semblait a priori plus naturel.

Remarque 6.23. En général, si $p \in [1, +\infty]\setminus\{2\}$, alors la norme $\|\cdot\|_p$ n'est associée à aucun produit scalaire, et donc $L^p(X)$ ne peut pas être vu comme un espace de Hilbert. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il suffit pour s'en convaincre d'essayer d'appliquer l'identité du parallèlogramme

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\big(\|f\|^2 + \|g\|^2\big)$$

avec $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $g = \mathbb{1}_{[1,2]}$.

6.6 Inclusions entre espaces de Lebesgue

On discute dans ce paragraphe des liens entre les différents espaces de Lebesgue. On a deux espaces naturels, à savoir l'espace des fonctions intégrables $\mathcal{L}^1(X)$ (ou la version quotient $L^1(X)$) et l'espace des fonctions essentiellement bornées $\mathcal{L}^\infty(X)$ (ou le quotient $L^\infty(X)$). On a l'espace $\mathcal{L}^2(X)$ (ou le quotient $L^2(X)$) des fonctions de carrés intégrables, qui jouera un rôle important du fait de sa structure d'espace de Hilbert. Et puis il y a tous les autres. Au final on se retrouve avec une infinité d'espaces, et même si la définition n'est pas très compliquée, il n'est pas si évident de bien les appréhender.

Un première question que l'on peut se poser est de savoir si on peut « ranger » ces espaces du plus petit au plus gros. Il est facile de voir à partir des exemples 6.2 ce n'est pas le cas. En effet, on peut faire les observations suivantes.

Exemple 6.24. (i) La fonction $x \mapsto x^{-1}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ est dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ mais pas dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$,

(ii) la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ est dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ mais elle n'est ni dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ ni dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$,

(iii) la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{4}}\mathbb{1}_{]0,1]}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ mais pas dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,

(iv) la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$ mais elle n'est ni dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ ni dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

De la même façon, pour tous $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \neq q$ on peut construire des fonctions qui sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^*)$ mais pas dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}_+^*)$, et inversement.

Cette mise en garde était sans doute la partie la plus importante de ce paragraphe. Le deuxième objectif est de montrer qu'il y a tout de même quelques cas particuliers pour lesquels les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ forment une famille monotone par rapport à p au sens de l'inclusion. Mais dans quel sens, croissante ou décroissante ? Et bien les deux cas sont possibles !

Dans tous ce paragraphe, on énonce les résultats dans les espaces $L^p(X)$. Pour les preuves, on identifie un élément de $L^p(X)$ à un représentant dans $\mathcal{L}^p(X)$, et on vérifie et fur et à mesure des énoncés et des preuves que tout est indépendant du choix d'un représentant (c'est-à-dire qu'on ne change rien en remplaçant un représentant par une fonction qui lui est égale presque partout).

Le premier cas où on peut ordonner les espaces $L^p(X)$ concerne les mesures finies. Cela inclut donc la mesure de Lebesgue sur les segments de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement sur les compacts de $\mathbb{R}^d$), mais aussi toutes les mesures de probabilités.

Proposition 6.25. *On suppose que $\mu(X) < +\infty$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Si $p < q$ alors pour toute fonction f mesurable sur X on a*

$$\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q . \tag{6.4}$$

En particulier,

$$L^q(X, \mathcal{M}, \mu) \subset L^p(X, \mathcal{M}, \mu). \tag{6.5}$$

Attention au sens de l'inégalité (6.4), qui est opposé au sens de l'inclusion (6.5). Mais c'est cohérent, la norme de L^q est la plus grande, donc la condition pour être dans L^q est plus restrictive, donc L^q est plus petit que L^p.

En cas de doute sur le sens de ces inégalités/inclusions, il suffit de bien avoir en tête le cas extrême $p = 1, q = +\infty$, par exemple pour la mesure de Lebesgue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on sait déjà qu'une fonction essentiellement bornée sera intégrable, c'est-à-dire $\mathcal{L}^\infty([a, b]) \subset \mathcal{L}^1([a, b])$, et on a une borne sur l'intégrale en fonction de la borne essentielle :

$$\forall f \in \mathcal{L}^\infty([a, b]), \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f| \, d\lambda \leqslant (b - a) \|f\|_\infty .$$

Tout cela est bien entendu cohérent avec le résultat de la proposition 6.25.

Démonstration. • Il suffit de montrer (6.4) pour obtenir (6.5). En effet, pour $f \in L^q(X)$ on a $\|f\|_q < +\infty$, donc (6.4) assure que $\|f\|_p < +\infty$, ce qui signifie que f est aussi dans $L^p(X)$.

Par ailleurs, l'inégalité (6.4) est claire si $\|f\|_q = +\infty$, ou si f est nulle presque partout. On peut supposer que $0 < \|f\|_q < +\infty$.

• Si $q = +\infty$ on a $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ presque partout, donc

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \leqslant \int_X \|f\|_\infty^p \, d\mu = \mu(X) \, \|f\|_\infty^p .$$

En prenant la puissance $1/p$ dans cette inégalité on obtient bien (6.4).

• On suppose maintenant que $q < +\infty$. D'après l'inégalité de Hölder appliquée avec les exposants conjugués $\frac{q}{p}$ et $\frac{q}{q-p}$ on a

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu \\ &\leqslant \left(\int_X |f|^q \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X 1^{\frac{q}{q-p}} \, d\mu \right)^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leqslant \mu(X)^{1-\frac{p}{q}} \, \|f\|_q^p . \end{aligned}$$

À nouveau, on conclut en prenant la puissance $1/p$ de cette inégalité. □

Avec la proposition précédente, on peut donc regrouper tous les espaces L^p dans un cadre plus général si on peut se ramener à un espace de mesure finie.

Définition 6.26. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. On note $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que pour tout compact K de Ω on a $f\mathbb{1}_K \in L^1(\Omega)$.

Puisque sur un compact K de $\mathbb{R}$ une fonction de L^p est intégrable, on a le résultat suivant.

Proposition 6.27. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $p \in [1, +\infty]$ on a*

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

On vient de décrire une situation où plus p est grand, plus l'espace $L^p(X)$ est petit. Il y a aussi des situations où plus p est grand, plus $L^p(X)$ est grand. Le cas typique est celui des suites, où de façon générale de tous les espaces munis d'une mesure de comptage.

On munit $\mathbb{N}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de comptage μ. Considérons une suite réelle ou complexe $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dire que a est intégrable par rapport à μ est équivalent à dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente. Cela implique en particulier que a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la suite a est en particulier bornée. Ainsi $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$. Mais ce n'est pas tout. Lorsque $|a_n| < 1$, et c'est le cas pour n assez grand si $a \in \ell^1(\mathbb{N})$, alors on a $|a_n|^2 < |a_n|$. Cela implique que $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$. Et d'autre part, comme précédemment, si $a \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors a_n tend vers 0 et donc $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Ainsi on a aussi $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 6.28. *Soient $p, q \in [1, +\infty[$. Si $p < q$ alors pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on a $\|u\|_q \leqslant \|u\|_p$. En particulier, $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.*

Démonstration. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^N$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n|^p \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|^p \leqslant \|u\|_p^p .$$

Ainsi $|u_n| \leqslant \|u\|_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis, par passage au supremum, $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_p$.

Soit maintenant $q \in]p, +\infty[$. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^q \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p |u_n|^{q-p} \leqslant \|u\|_\infty^{q-p} \|u\|_p^p \leqslant \|u\|_p^q .$$

Cela prouve que $\|u\|_q \leqslant \|u\|_p$. ☐

La Proposition 6.28 est en fait un cas particulier de la proposition suivante, que l'on peut omettre.

Proposition 6.29. *On suppose qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) \geqslant \mu_0$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Si $p < q$ alors pour toute fonction mesurable f sur X on a*

$$\|f\|_q \leqslant \mu_0^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p ,$$

et en particulier

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{M}, \mu).$$

Démonstration. • Comme pour la Proposition 6.25, l'inégalité sur les normes implique l'inclusion entre espaces de Lebesgue, et il suffit de montrer l'inégalité pour $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Enfin on note que l'hypothèse implique que $p < +\infty$.

• On considère d'abord le cas $q = +\infty$. Soit $M \geqslant 0$. On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f(x)| \geqslant M$ pour tout $x \in A$. Alors on a

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \geqslant \int_A |f|^p \, d\mu \geqslant \mu_0 M^p,$$

d'où

$$M \leqslant \mu_0^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p .$$

Cela prouve que $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ et

$$\|f\|_\infty \leqslant \mu_0^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p .$$

• Si $q \in]p, +\infty[$ on peut alors écrire

$$\|f\|_q^q = \int_X |f|^q \, d\mu = \int_X |f|^p |f|^{q-p} \, d\mu \leqslant \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p \leqslant \mu_0^{\frac{q-p}{p}} \|f\|_p^q .$$

On conclut en prenant la puissance $1/q$ dans cette inégalité. ☐

On revient à un cadre général. Comme on l'a vu, il n'y a pas de relation d'inclusion entre les espaces $L^p(X)$ qui serait valable en toutes circonstances. Néanmoins, on observe que dans les exemples 6.24 on n'a pas donné d'exemple de fonction qui serait dans $\mathcal{L}^1(X)$ et dans $\mathcal{L}^\infty(X)$ mais pas dans $\mathcal{L}^2(X)$. Ce n'est pas un hasard, une fonction qui est à la fois dans $\mathcal{L}^1(X) \cap \mathcal{L}^\infty(X)$ est en fait automatiquement dans $\mathcal{L}^2(X)$. Pour le montrer on note

$$\mathcal{A}_- = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_+ = \{x \in X \mid |f(x)| > 1\} .$$

Ce sont des ensembles mesurables, et $\mathcal{A}_+$ est nécessairement de mesure finie. On a alors

$$\begin{aligned}\int_X |f|^2 \, d\mu &= \int_{\mathcal{A}_-} |f(x)|^2 \, d\mu(x) + \int_{\mathcal{A}^+} |f(x)|^2 \, d\mu(x) \\ &\leqslant \int_{\mathcal{A}_-} |f(x)| \, d\mu(x) + \int_{\mathcal{A}_+} \|f\|_\infty^2 \, d\mu(x) \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

ce qui prouve que f est dans $\mathcal{L}^2(X)$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 6.30. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $p < q$ et $r \in [p, q]$. Alors pour toute fonction f mesurable sur X on a*

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$$

où $\theta \in [0, 1]$ est tel que

$$\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{r}.$$

En particulier,

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) \cap L^q(X, \mathcal{M}, \mu) \subset L^r(X, \mathcal{M}, \mu).$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'inégalité dans le cas $r \in]p, q[$. Si $q = +\infty$ on a $p = \theta r$ et on écrit directement

$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r \, d\mu = \int_X |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} \, d\mu \leqslant \|f\|_\infty^{(1-\theta)r} \int_X |f|^p \, d\mu \leqslant \|f\|_p^{\theta r} \|f\|_\infty^{(1-\theta)r}.$$

Sinon on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{p}{\theta r}$ et $\frac{q}{(1-\theta)r}$. Cela donne

$$\begin{aligned}\|f\|_r^r = \int_X |f|^r \, d\mu &= \int_X |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} \, d\mu \\ &\leqslant \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_X |f|^q \, d\mu \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}} \\ &\leqslant \|f\|_p^{\theta r} \|f\|_q^{(1-\theta)r}.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

6.7 Densité des fonctions continues à supports compacts

Dans ce paragraphe on se place sur $\mathbb{R}^d$, muni de la tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue.

Au début de ce cours, on a très largement élargi la notion de fonction intégrable, de sorte que l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ contient des fonctions très exotiques, et en particulier des fonctions très irrégulières. Il en est évidemment de même pour tous les espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On imagine bien qu'en pratique on rencontrera toute sortes de problèmes pour étudier ces espaces.

Ce qui va sauver pas mal de situations est que l'on va pouvoir approcher ces fonctions très irrégulières par des fonctions qui sont au contraire très régulières.

On note $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à supports compacts dans $\mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire continues et nulles en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^d$). Ce sont des fonctions qui sont dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ (plus précisément, ce sont des fonctions dans $\mathcal{L}^p(X)$, dont les classes d'équivalence sont donc dans $L^p(X)$) et qui, pour le coup, sont des fonctions assez agréables.

Le but de ce paragraphe est de montrer que $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. On donnera ensuite des exemples de résultats qui se démontrent en utilisant cette propriété.

On note tout de suite que le résultat ne peut pas être vrai dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, puisque si on considère (la classe d'équivalence de) la fonction constante égale à 1 alors

$$\forall \phi \in C_c^0(\mathbb{R}^d), \quad \|1 - \phi\|_\infty \geqslant 1.$$

Théorème 6.31. *Soit $p \in [1, +\infty[$. L'ensemble $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à supports compacts dans $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.*

Démonstration. On cherche à montrer que pour $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - \varphi\|_p \leqslant \varepsilon$.

• Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lambda(A) < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ contenant A et tel que $\lambda(U \backslash A) \leqslant (\varepsilon/3)^p$. On a alors

$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_U\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $B(n)$ la boule de centre 0 et de rayon n. Puisque $\mathbb{1}_U$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{1}_{U \cap B(n)}$ au sens de la convergence simple, et donc dans L^p par le théorème de convergence dominée, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si on note $V = U \cap B(n)$ alors

$$\|\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_V\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\varphi_k(x) = \min\big(1, k \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash V)\big).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est continue (et même lipschitzienne), nulle en dehors de V, et converge simplement vers $\mathbb{1}_V$ quand k tend vers $+\infty$. Par le théorème de convergence dominée on en déduit que $\|\mathbb{1}_V - \varphi_k\|_p$ tend vers 0, et en particulier il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\mathbb{1}_V - \varphi_k\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors

$$\|\mathbb{1}_A - \varphi_k\|_p \leqslant \varepsilon,$$

ce qui donne le résultat pour l'indicatrice d'une partie mesurable de mesure finie.

• Par l'inégalité triangulaire, on obtient que le résultat est encore valable pour toute fonction étagée nulle en dehors d'un ensemble de mesure finie.

• Soit maintenant $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On note $f = f_+ - f_-$ où f_+ et f_- sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et à valeurs positives (on a $\|f\|_p^p = \|f_+\|_p^p + \|f_-\|_p^p$). Il existe une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers f_+. Puisque chaque fonction f_n est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est forcément nulle en dehors d'un ensemble de mesure finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_+ - f_n|^p \leqslant |f_+|^p$, donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\|f_+ - f_n\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_+ - f_n\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Puisqu'il existe g_+ continue à support compact telle que $\|f_n - g_+\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, on obtient que $\|f_+ - g_+\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe g_- continue à support compact telle que $\|f_- - g_-\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $g = g_+ - g_-$ est continue à support compact et

$$\|f - g\|_p \leqslant \|f_+ - g_+\|_p + \|f_- - g_-\|_p \leqslant \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Remarques 6.32.
— Plus précisément, on a montré la densité de l'ensemble des fonctions lipschitziennes à supports compacts.
— Plus généralement le résultat est valable pour (X, d) espace métrique localement compact et séparable et μ une mesure borélienne sur X finies sur les compacts.
— Avec une démonstration analogue, on montre que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, l'ensemble des fonctions qui sont limites au sens de l'intégrale (norme L^1) d'une suite de fonctions en escalier est l'espace des fonctions Lebesgue-intégrables.

On donne maintenant des exemples d'applications du théorème 6.31. Le point commun de ces résultats est qu'on montre d'abord la propriété pour les fonctions continues à supports compacts et qu'on l'étend ensuite à tout $L^p(\mathbb{R}^d)$ par densité.

Proposition 6.33. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ est séparable (admet une partie dénombrable dense).*

Démonstration. • Pour $N \in \mathbb{N}$ on note Q_N l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{Q}$ constantes sur $\prod_{j=1}^d \left[\frac{k_j}{2^N}, \frac{k_j+1}{2^N}\right[$ pour tous $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$, et nulles en dehors de $[-2^N, 2^N]^d$. Comme Q_N est dénombrable pour tout $N \in \mathbb{N}$, $Q = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} Q_N$ l'est également. Montrons que Q est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
• Soit g une fonction continue à support compact. Il existe $R, M > 0$ tels que $|g| \leqslant M\mathbb{1}_{[-R,R]^d}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est uniformément continue, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$ et $x, y \in \left[\frac{k_j}{2^N}, \frac{k_j+1}{2^N}\right[$ on a

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut construire $\varphi \in Q$ telle que $|\varphi| \leqslant M\mathbb{1}_{[-R,R]^d}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$|g(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors

$$\|g - \varphi\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - \varphi(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{[-R,R]^d} \varepsilon^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (2R)^{\frac{d}{p}} \varepsilon.$$

• Soient maintenant $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\eta > 0$. D'après le Théorème 6.31, il existe $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - g\|_p \leqslant \frac{\eta}{2}$. Puis, d'après ce qui précède, il existe $\varphi \in Q$ telle que $\|g - \varphi\|_p \leqslant \frac{\eta}{2}$. On a alors $\|f - \varphi\|_p \leqslant \eta$, ce qui prouve que Q est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, et donc dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ par passage au quotient. □

On termine ce paragraphe avec une deuxième application utile du Théorème 6.31. On cherche à comparer une fonction avec sa translatée. Pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on note

$$\tau_y f : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x - y) \end{cases}$$

On s'attend à ce que $\tau_y f$ soit proche de f si y est petit, et c'est bien le cas pour tout $p \in [1, +\infty[$. À nouveau, il est clair que ce ne peut pas être le cas avec $p = +\infty$. En effet si on considère $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\tau_y f = \mathbb{1}_{[y,1+y]}$, donc $\|\tau_y f - f\|_\infty = 1$ pour tout y non nul, même petit.

Proposition 6.34. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors on a*

$$\|\tau_y f - f\|_p \xrightarrow[y \to 0]{} 0.$$

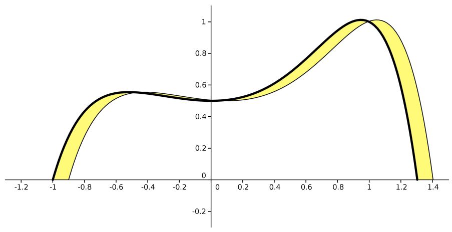

FIGURE 6.1 – Une fonction f et sa translaté. L'aire en jaune représente la distance dans $L^1(\mathbb{R})$ entre ces deux fonctions

Démonstration. • On commence par montrer le résultat dans le cas où f est continue à support compact. Soient $M \geqslant 0$ un majorant de $|f|$ et $R > 0$ tel que le support de f est inclus dans la boule $B(R)$ de centre 0 et de rayon R. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|y\| \leqslant 1$ on a alors

$$|\tau_y f - f| \leqslant 2M\mathbb{1}_{B(R+1)}$$

Par continuité de f, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\tau_y f(x) - f(x)|^p \xrightarrow[y \to 0]{} 0.$$

Par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\|\tau_y f - f\|_p \xrightarrow[y \to 0]{} 0.$$

• On montre maintenant le cas général. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 6.31 il existe g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ on a aussi

$$\|\tau_y f - \tau_y g\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - g(x-y)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après le cas précédent, il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|y\| \leqslant \delta$ on a $\|\tau_y g - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour un tel y on a donc

$$\|\tau_y f - f\|_p \leqslant \|\tau_y f - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - g\| + \|g - f\|_p \leqslant \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Remarque 6.35. La Proposition 6.34 dit précisément que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ fixée l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}^d & \to & L^p(\mathbb{R}^d) \\ y & \mapsto & \tau_y f \end{cases}$$

est continue en 0 (on peut vérifier que cela assure qu'elle est en fait continue sur tout $\mathbb{R}^d$).

6.8 Dualité dans les espaces L^p

Proposition 6.36. *Soit $g \in L^q(X)$. L'application*

$$\varphi_g : \begin{cases} L^p(X) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_X fg \, d\mu \end{cases}$$

est une forme linéaire sur $L^p(X)$ et

$$\|\varphi_g\|_{L^p(X)^*} = \|g\|_{L^p(X)}.$$

Démonstration. Soit $f \in L^p(X)$. D'après l'inégalité de Hölder le produit fg est intégrable (donc $\varphi_g(f)$ est bien défini) et

$$|\varphi_g(f)| \leqslant \int_X |fg| \, d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

En outre, l'application φ_g est bien linéaire par linéarité de la multiplication par g et de l'intégrale. Cela prouve que φ_g est une forme linéaire sur $L^p(X)$ et

$$\|\varphi_g\|_{L^p(X)^*} \leqslant \|g\|_q .$$

On définit maintenant une fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} |g(x)|^{q-2} g(x) & \text{si } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } g(x) = 0. \end{cases}$$

Comme

$$p(q-1) = pq\left(1 - \frac{1}{q}\right) = q,$$

$$\|f\|_p^p = \int_X |g|^{(q-1)p} \, d\mu = \int_X |g|^q \, d\mu = \|g\|_q^q .$$

En particulier, $f \in L^p(X)$. Or

$$\varphi_g(f) = \int_X |g(x)|^q \, d\mu = \|g\|_q^q ,$$

donc

$$\|\varphi_g\|_{L^p(X)^*} \geqslant \frac{\varphi_g(f)}{\|f\|_p} \geqslant \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|g\|_q .$$

□

Proposition 6.37. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. On considère l'application*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} L^q(X) & \to & L^p(X)^* \\ g & \mapsto & \varphi_g \end{array} \right.$$

Alors Φ est une application linéaire injective. En outre

(i) elle est surjective si $p \in [1, +\infty[$,

(ii) elle n'est pas surjective si $p = +\infty$.

Remarque 6.38. Si on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors

$$\varphi_g(f) = \int_X f\overline{g} \, d\mu,$$

et Φ est semi-linéaire.

6.9 Exercices

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(Y, \mathcal{N})$ un espace mesurable. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans Y et on considère sur $\mathcal{F}$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f\mathcal{R}g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x \in X.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$.

***Exercice* 3.** A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in [1,\infty]$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle dans $L^p(]0,1[)$? Dans $L^p([0,1])$? Dans $L^p(]1,\infty[)$? Dans $L^p(]0,\infty[)$?

***Exercice* 4.** Soit $p \in [1,+\infty]$. Soit $\lambda > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application Θ_λ qui à $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ associe
$$\Theta_\lambda u : x \mapsto \alpha u(\lambda x).$$
1. Montrer que Θ_λ définit bien une application de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.
2. Déterminer α pour que Θ_λ soit une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire que $\|\Theta_\lambda u\|_p = \|u\|_p$ pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$).

***Exercice* 5.** **1.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } -\frac{1}{n} \leqslant x < 0, \\ -n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

a. Montrer que f_n converge simplement vers 0 et que l'intégrale de f_n sur $\mathbb{R}$ tend vers 0.

b. Soit $p \in [1,+\infty[$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$.

2. Soit maintenant $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré quelconque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable de X dans $\mathbb{R}_+$ qui converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}_+$. On suppose que
$$\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f \, d\mu.$$

a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ on pose $g_n(x) = \min(f_n(x), f(x))$. Montrer qu'on a
$$|f_n - f| = f_n + f - 2g_n.$$

b. Étudier la limite éventuelle de $\int_X g_n \, d\mu$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Montrer que f_n tend vers f dans $L^1(X)$.

***Exercice* 6.** On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. Soit $\alpha > 0$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on note
$$\mu(A) = \alpha \int_{[0,1]\cap A} e^{-\alpha x} \, d\lambda(x) + e^{-\alpha}\delta_1(A)$$
et
$$\nu(A) = \int_{[0,+\infty[\cap A} e^{-\alpha x} \, d\lambda(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}\delta_k(A).$$
1. a. Montrer que μ et ν sont des mesures sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

b. Sont-elles finies ?

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = x$ et $g(x) = e^{\alpha x}$.

a. Montrer que f et g sont mesurables.

b. Sont-elles intégrables par rapports à μ ? par rapport à ν ? Si oui, calculer leurs intégrales.

***Exercice* 7.** Dans le chapitre sur les espaces de Lebesgue, où a-t-on utilisé le fait que $p \geqslant 1$?

***Exercice* 8.** Soit $p \in [1,+\infty[$.
1. Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle.
2. Montrer qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
3. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ est uniformément continue alors elle tend vers 0 en $+\infty$.

***Exercice* 9.** Soit f une fonction mesurable de $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\|f\|_\infty = \sup_{\substack{A\in\mathcal{M}\\ \mu(A)>0}} \inf_{x\in A} |f(x)| \,.$$

***Exercice* 10.** Soit $p \in [1, +\infty]$. On note

$$\Omega_p = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \,|\, f \geqslant 0 \text{ p.p.}\} \,.$$

Montrer que Ω_p est d'intérieur vide dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < +\infty$ et d'intérieur non vide si $p = +\infty$. *Indication : on pourra commencer par montrer qu'une fonction $f \in \Omega_p$ bornée n'est pas dans l'intérieur de Ω_p si $p < +\infty$.*

***Exercice* 11.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Montrer que pour $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $h \in L^r(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fgh \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et

$$\|fgh\|_{L^1(X,\mathcal{M},\mu)} \leqslant \|f\|_{L^p(X,\mathcal{M},\mu)} \|g\|_{L^q(X,\mathcal{M},\mu)} \|h\|_{L^r(X,\mathcal{M},\mu)} \,.$$

***Exercice* 12.** Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que

$$\forall \phi \in C^0_c(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} f\phi \, d\lambda = 0.$$

Montrer que $f = 0$ p.p.

***Exercice* 13.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^1(X, \mathcal{M}, \mu) \cap L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$. On suppose que cette suite est bornée dans $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ et converge dans $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ vers une fonction f. Montrer que f_n converge vers f dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

***Exercice* 14** (Inégalité de Hardy)**.** Soient $p \in]1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Pour $x > 0$ on note

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$

On cherche à montrer l'inégalité de Hardy

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \|f\|_p \,.$$

1. Montrer que $F(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.
2. On suppose que f est continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives.
 a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$F(x) = -xF'(x) + f(x).$$

 b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $A > 0$ on a

$$\frac{p-1}{p} \int_0^A F(x)^p \, dx \leqslant \int_0^A F(x)^{p-1} f(x)\, dx.$$

 c. Montrer l'inégalité de Hardy pour f continue à valeurs positives.
3. En déduire l'inégalité de Hardy pour f continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire l'inégalité de Hardy dans le cas général.
5. Montrer que la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale *(on pourra par exemple considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \mapsto x^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[1,n]}(x)$).*
6. Examiner les cas $p = 1$ et $p = \infty$.

***Exercice* 15.** Soit $p \in [1, \infty[$.

1. Donner une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ qui converge simplement presque partout vers une fonction g mais qui ne converge pas vers g dans L^p.

2. Donner une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ qui converge dans L^p vers une fonction f mais qui ne converge pas simplement presque partout vers f.

3. Montrer que si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ converge dans $L^p(\mathbb{R})$ vers une fonction f et converge simplement presque partout vers une fonction g, alors $f = g$ presque partout.