

Chapitre 3

Ensembles dénombrables

3.1 Cardinal

Lorsque l'on veut dénombrer les éléments d'un ensemble fini (par exemple, si on veut savoir combien de pommes contient un panier, ou combien de rayures a Arthur le glomorphe à rayures), on établit une bijection entre un ensemble d'entiers et l'ensemble en question. On attribue le nombre 1 à une pomme, le nombre 2 à une autre, le nombre 3 à une troisième, et ainsi de suite, jusqu'à finalement attribuer un entier n à la dernière pomme. On a alors défini une bijection entre l'ensemble des pommes du panier et l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Cette bijection n'est pas unique s'il y a au moins deux pommes, mais l'entier n que l'on obtient est toujours le même. On dit alors qu'il y a n pommes dans le panier. Lorsque l'on est plus jeune, et que l'on doit encore compter sur ses doigts, on établit en fait une bijection entre l'ensemble des pommes et un ensemble de doigts. Dans tous les cas, on a compté en établissant une bijection entre l'ensemble étudié et un ensemble de référence bien compris.

Imaginons maintenant que ces pommes soient destinées au goûter d'un groupe d'enfants. Si on peut donner exactement une pomme à chaque enfant (chacun reçoit exactement une pomme, et aucune pomme ne reste à la fin), alors même si on ne sais pas combien on avait de pommes et combien il y a d'enfants, on peut dire qu'il y avait exactement autant de pommes qu'il n'y a d'enfants.

Ces notions sont intuitivement claires tant qu'on ne manipule que des ensembles finis. Comparer le nombre d'éléments pour des ensembles infinis peut par contre amener quelques surprises. . .

Définition 3.1. On dit que deux ensembles E et F qu'ils ont même **cardinal** s'il existe une bijection de E dans F . Dans ce cas on écrira

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(F).$$

Théorème 3.2 (Théorème de Cantor-Bernstein). *Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors il existe une bijection de E dans F .*

Démonstration. Soit f une injection de E dans F et g une injection de F dans E . On note

$$\tilde{F} = g(F) \subset E.$$

On peut alors voir g comme une bijection de F dans \tilde{F} . On maintenant $E_0 = E \setminus \tilde{F}$ puis, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$E_{n+1} = (g \circ f)(E_n).$$

Pour $x \in E$ on note

$$h(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x) & \text{si } x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela définit une bijection de E dans \tilde{F} . $g^{-1} \circ h$ est alors une bijection de E dans F . \square

3.2 Ensembles finis - Ensembles infinis

Lemme 3.3. *Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. S'il existe une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ alors $n \leq p$.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. Si $p = 0$ alors $n = 0$, car il n'existe pas d'application d'un ensemble non vide dans l'ensemble vide. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $p - 1$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et on suppose qu'il existe une injection ι de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Si $n = 0$ alors on a bien $n \leq p$. On suppose maintenant que $n \geq 1$. On considère la permutation π de $\llbracket 1, p \rrbracket$ qui échange $\iota(n)$ et p , et laisse invariants les autres éléments. Alors $\pi \circ \iota$ est une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ qui envoie n sur p . Par restriction, elle induit une injection de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p - 1 \rrbracket$. Par hypothèse de récurrence on a alors $n - 1 \leq p - 1$, et donc $n \leq p$. D'où le résultat. \square

Corollaire 3.4. *Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\llbracket 1, n \rrbracket$ est en bijection avec $\llbracket 1, p \rrbracket$. Alors $n = p$.*

Définition 3.5. Soit E un ensemble.

- (i) Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que E est de cardinal n (ou qu'il a n éléments) si E est en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$. Un tel n est nécessairement unique.
- (ii) On dit que E est fini s'il est de cardinal n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On dit que E est infini s'il n'est pas fini.

Il est intuitivement clair qu'une partie d'un ensemble fini est elle-même finie, de cardinal plus petit. Si l'on se réfère à la définition précédente, ce n'est plus complètement évident.

Proposition 3.6. *Soient E un ensemble fini et A une partie de E . Alors A est un ensemble fini et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$.*

Démonstration. • On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que le résultat est vrai pour $E = \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $n = 0$, la seule partie de l'ensemble vide est l'ensemble vide lui-même, donc le résultat est immédiat. On suppose le résultat vrai pour $E = \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit alors A une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $B = A \setminus \{n\}$. B est alors une partie de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Par hypothèse de récurrence, B est fini et $\text{Card}(B) \leq n - 1$. Si $n \notin A$, alors $A = B$ et le résultat est vrai. Sinon, on note p le cardinal de B et on considère une bijection $\tilde{\varphi}$ de B dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. On définit alors une bijection φ de A dans $\llbracket 1, p + 1 \rrbracket$ en posant

$$\varphi(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x) & \text{si } x \in B, \\ p + 1 & \text{si } x = n. \end{cases}$$

On obtient que A est fini de cardinal $p + 1$, qui est bien inférieur ou égal à n .

• On considère maintenant le cas général. On note $n = \text{Card}(E)$ et on considère une bijection ψ de E dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Si A est une partie de E , alors $\psi(A)$ est une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi $\psi(A)$ est lui-même en bijection avec $\llbracket 1, p \rrbracket$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$. Cela prouve que A est fini de cardinal $p \leq n$. \square

Proposition 3.7. Soient F et G deux ensembles finis disjoints. Alors $F \sqcup G$ est fini et

$$\text{Card}(F \sqcup G) = \text{Card}(F) + \text{Card}(G).$$

Démonstration. On note $n = \text{Card}(F)$ et $p = \text{Card}(G)$. Soient f une bijection de F dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et g une bijection de G dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Pour $x \in F \sqcup G$ on note

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in F, \\ g(x) + n & \text{si } x \in G. \end{cases}$$

Cela définit une bijection de $F \sqcup G$ dans $\llbracket 1, n + p \rrbracket$. Cela prouve que $F \sqcup G$ est fini de cardinal $n + p$. \square

Proposition 3.8. Soient E un ensemble fini et A une partie de E . Alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ si et seulement si $A = E$.

Démonstration. On sait que A et $E \setminus A$ sont finis. On suppose que $E \setminus A$ n'est pas vide. Alors $\text{Card}(E \setminus A) > 0$. Puisque

$$\text{Card}(A) + \text{Card}(E \setminus A) = \text{Card}(E),$$

on obtient que $\text{Card}(A) < \text{Card}(E)$. Par contraposée, si $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ alors $A = E$. La réciproque est claire. \square

Proposition 3.9. Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F .

- (i) On suppose que F est fini et que f est injective. Alors E est fini et $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$, avec égalité si et seulement si f est bijective.
- (ii) On suppose que E est fini et que f est surjective. Alors F est fini et $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$, avec égalité si et seulement si f est bijective.

Démonstration. (i) Comme f est injective, elle réalise une bijection de E dans $f(E)$. Comme $f(E)$ est une partie de F , c'est un ensemble fini, de cardinal inférieur ou égal à celui de F , avec égalité si et seulement si $f(E) = F$, c'est-à-dire si et seulement si f est surjective.

(ii) Pour $y \in F$ on note $g(y)$ l'un des antécédents de y par f (toujours possible puisque f est surjective). Cela définit une application g injective de F dans E . En outre g est surjective si et seulement si f est injective. On conclut alors en appliquant la première propriété à g . \square

La proposition suivante dit en quelque sorte que \mathbb{N} , et les ensembles qui sont en bijection avec \mathbb{N} , sont les « plus petits » ensembles infinis.

Proposition 3.10. Soit E un ensemble infini. Alors il existe une injection de \mathbb{N} dans E .

Démonstration. On construit par récurrence une injection φ de \mathbb{N} dans E . Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir défini $\varphi(k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Puisque la partie $\{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$ de E est finie, elle n'est pas égale à E . On peut donc considérer

$$\varphi(n) \in E \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}.$$

Cela définit par récurrence une application de \mathbb{N} dans E . Cette application est bien injective. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il existe $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n < p$ et $\varphi(n) = \varphi(p)$, on obtient une contradiction avec la définition de $\varphi(p)$. \square

3.3 Ensembles dénombrables

Définition 3.11. On dit d'un ensemble qu'il est dénombrable s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .

En particulier, un ensemble fini est considéré comme dénombrable. Certains auteurs définissent les ensembles dénombrables comme étant les ensemble en bijection avec \mathbb{N} , auquel cas les ensembles finis ne sont pas dénombrables.

Exemple 3.12. L'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs est dénombrable, car l'application $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à n associe

$$\varphi(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

est bijective.

On remarque que si E est un ensemble dénombrable, alors il existe une injection de E dans \mathbb{N} (car une bijection vers une partie de \mathbb{N} définit en particulier une injection vers \mathbb{N}). La réciproque est vraie et sera très utile en pratique.

Proposition 3.13. *Soit E un ensemble.*

- (i) *S'il existe une injection de E dans un ensemble dénombrable, alors E est dénombrable.*
- (ii) *S'il existe une surjection d'un ensemble dénombrable dans E , alors E est dénombrable.*

Démonstration. Comme tous les ensembles finis sont dénombrables, il suffit de considérer le cas où E est infini.

On suppose qu'il existe une injection φ de E dans un ensemble dénombrable F . Comme F est dénombrable, il existe une injection ψ de F dans \mathbb{N} . La composée $\psi \circ \varphi$ est alors une injection de E dans \mathbb{N} . Comme E est infini, il existe par ailleurs une injection de \mathbb{N} dans E d'après la Proposition 3.10. D'après le Théorème de Cantor-Bernstein, on obtient qu'il existe une bijection de E dans \mathbb{N} , et donc que E est dénombrable.

On suppose maintenant qu'il existe une surjection φ d'un ensemble dénombrable F vers E . Pour $x \in E$ on considère un antécédent $f(x)$ de x par φ . Cela définit une application f de E dans F qui est injective. D'après la première propriété, on en déduit que E est dénombrable. \square

On remarque qu'on a montré dans la démonstration qu'un ensemble infini dénombrable est en fait en bijection avec \mathbb{N} . Comme conséquence immédiate de la première propriété de la Proposition 3.13 on obtient qu'une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Proposition 3.14. (i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Plus généralement, \mathbb{N}^k est dénombrable pour tout $k \in \mathbb{N}$. Plus généralement encore, un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

(ii) \mathbb{Q} est dénombrable.

(iii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables. Alors la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.

Démonstration. • On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n, p) & \mapsto & 2^n(2p + 1) \end{cases}$$

Soient (n_1, p_1) et (n_2, p_2) dans \mathbb{N}^2 tels que $\varphi(n_1, p_1) = \varphi(n_2, p_2)$. On suppose par exemple que $n_1 \geq n_2$ (le cas $n_2 \geq n_1$ est analogue). On a alors

$$2^{n_1 - n_2}(2p_1 + 1) = 2p_2 + 1.$$

Comme le membre de droite est impair, le membre de gauche l'est également, ce qui implique que $n_1 - n_2 = 0$. On obtient alors $p_1 = p_2$, et donc $(n_1, p_1) = (n_2, p_2)$. Cela prouve que φ est injective, et donc que \mathbb{N}^2 est dénombrable.

• On montre ensuite par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que \mathbb{N}^k est dénombrable. Les cas $k = 1$ et $k = 2$ sont déjà connus. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $k \geq 2$. Il existe alors une injection φ_k de \mathbb{N}^k dans \mathbb{N} et une injection φ_2 de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} . Pour (n_1, \dots, n_{k+1}) on pose alors

$$\varphi_{k+1}(n_1, \dots, n_{k+1}) = \varphi_2(\varphi_k(n_1, \dots, n_k), n_{k+1}) \in \mathbb{N}.$$

On vérifie alors que φ_{k+1} est une injection de \mathbb{N}^{k+1} dans \mathbb{N} , ce qui prouve que \mathbb{N}^{k+1} est dénombrable. D'où le résultat par récurrence.

• Soient maintenant $k \in \mathbb{N}^*$ et A_1, \dots, A_k des ensembles dénombrables. Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ il existe une bijection φ_j de \mathbb{N} dans A_j . L'application

$$\begin{cases} \mathbb{N}^k & \rightarrow & A_1 \times \dots \times A_k \\ (n_1, \dots, n_k) & \mapsto & (\varphi_1(n_1), \dots, \varphi_k(n_k)) \end{cases}$$

est alors une bijection. Puisque \mathbb{N}^k est dénombrable, cela prouve que $A_1 \times \dots \times A_k$ est dénombrable.

• Tout $r \in \mathbb{Q}$ s'écrit sous la forme $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, donc l'application

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ (p, q) & \mapsto & \frac{p}{q} \end{cases}$$

est donc surjective. Puisque $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable (d'après la propriété précédente), cela prouve que \mathbb{Q} est dénombrable.

• Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère une bijection φ_n de \mathbb{N} dans A_n . L'application

$$\begin{cases} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & A \\ (n, p) & \mapsto & \varphi_n(p) \end{cases}$$

est alors surjective, et donc A est dénombrable puisque \mathbb{N}^2 l'est. \square

Théorème 3.15 (Théorème de Cantor). *Soit E un ensemble. Alors E et $\mathcal{P}(E)$ n'ont pas même cardinal.*

Démonstration. Soit φ une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. On considère la partie de E définie par

$$A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) = A$. Si $x \in A$ alors $x \notin \varphi(x) = A$, ce qui est absurde. Si $x \notin A$, alors $x \in \varphi(x) = A$, ce qui est tout autant absurde. Ainsi on obtient par l'absurde que φ n'est pas surjective, et donc pas bijective. Ainsi il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$. \square

Corollaire 3.16. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Proposition 3.17. (i) *Soit X un ensemble ayant au moins deux éléments. Alors l'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans X n'est pas dénombrable.*

(ii) $[0, 1]$ est indénombrable.

Démonstration. • On considère $(x_0, x_1) \in X^2$ avec $x_0 \neq x_1$. On considère l'application φ qui à une partie A de \mathbb{N} associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \begin{cases} x_0 & \text{si } n \notin A, \\ x_1 & \text{si } n \in A. \end{cases}$$

Cela définit une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $X^{\mathbb{N}}$. Si $X^{\mathbb{N}}$ était dénombrable, on aurait une injection de $X^{\mathbb{N}}$ dans \mathbb{N} , et donc une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans \mathbb{N} , ce qui est absurde.

• On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \{0, 1\}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2a_n}{3^{n+1}}. \end{cases}$$

Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \leq \frac{2}{3} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^n} \leq 1.$$

Ainsi la fonction Φ est bien définie (et à valeurs dans $[0, 1]$). Montrons que Φ est injective. Supposons par l'absurde qu'il existe deux suites différentes $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ telle que $\Phi(a) = \Phi(b)$. On note

$$N = \min \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}.$$

On peut par exemple supposer que $a_N = 0$ et $b_N = 1$. Notant $S = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2a_k}{3^{k+1}}$ on a alors

$$\Phi(b) \geq S + \frac{2}{3^{N+1}}.$$

et

$$\Phi(a) \leq S + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{2a_k}{3^{k+1}} \leq S + \frac{1}{3^{N+1}}.$$

D'où $\Phi(a) \neq \Phi(b)$. D'où la contradiction. Ainsi il existe une injection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (indénombrable) dans $[0, 1]$. Cela prouve que $[0, 1]$ est indénombrable. \square

Corollaire 3.18. *Tout intervalle non trivial de \mathbb{R} (en particulier \mathbb{R} lui-même) est indénombrable.*

3.4 Exercices

Exercice 1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont dénombrables :

- (i) $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$,
- (ii) $\{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$,
- (iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$,
- (iv) $\{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- (v) l'ensemble des nombres premiers,
- (vi) l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est presque nulle s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ pour tout $n \geq N$. On dit qu'elle est stationnaire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_m$ pour tous $n, m \geq N$.

1. Montrer que l'ensemble des suites presque nulles à valeurs dans \mathbb{N} est dénombrable.
2. L'ensemble des suites stationnaires à valeurs dans \mathbb{N} est-il dénombrable ?

Exercice 3. Soit E un ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est fini ou indénombrable.

Exercice 4. Soit A un ensemble et $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'intervalles de \mathbb{R} ouverts, non vides, et deux à deux disjoints. Montrer que A est dénombrable.

Exercice 5. 1. Soit U un ouvert de \mathbb{R} .

a. Soit $x \in U$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x \in \left] q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right[\subset U.$$

b. Montrer que U est union dénombrable d'intervalles ouverts.

2. On munit \mathbb{R}^d d'une norme quelconque. Montrer que tout ouvert de \mathbb{R}^d est union dénombrable de boules ouvertes de \mathbb{R}^d . Même question en remplaçant « boule ouverte » par « boule fermée ».

Exercice 6. On dit d'un réel x qu'il est algébrique s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{k=0}^d a_k x^k = 0.$$

Montrer qu'il existe des réels qui ne sont pas algébriques.

Exercice 7. 1. Montrer que \mathbb{R}^d s'écrit comme union dénombrable de parties compactes.

2. Soient $(\mathcal{V}_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts de \mathbb{R}^d telle que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_j$. Montrer qu'il existe une suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de J tels que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{j_n}$. Autrement dit, de tout recouvrement ouvert de \mathbb{R}^d on peut extraire un recouvrement dénombrable.