Geometrical methods in the normalization of germs of biholomorphisms

Jasmin Raissy

Dipartimento di Matematica "L. Tonelli"
Università di Pisa

Tesi di Dottorato

Teorema (–, 2009)

Sia f un germe di biolomorfismo di $(\mathbb{C}^n, O)$ formalmente linearizzabile e con parte lineare Λ diagonalizzabile. Se gli autovalori di Λ soddisfano la condizione di Brjuno ridotta, allora f è olomorficamente linearizzabile.

Teorema (–, 2009)

Sia f un germe di biolomorfismo di $(\mathbb{C}^n, O)$ formalmente linearizzabile e con parte lineare Λ diagonalizzabile. Se gli autovalori di Λ soddisfano la condizione di Brjuno ridotta, allora f è olomorficamente linearizzabile.

Definizione

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ soddisfano la condizione di Brjuno ridotta se

$$\sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{2^\nu} \widetilde{\omega}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(2^{\nu+1})^{-1} < +\infty, \quad \text{dove}$$

$$\widetilde{\omega}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(m) = \min_{\substack{2 \leq |Q| \leq m \\ Q \notin \mathrm{Res}_j(\lambda)}} \min_{1 \leq j \leq n} |\lambda^Q - \lambda_j|, \quad m \geq 2.$$

Definizione

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ soddisfano la condizione di Rüssmann se $\exists \Omega \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ t.c.:

- $k \leq \Omega(k) \leq \Omega(k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
- $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \log \Omega(k) < +\infty$, e
- $|\lambda^Q - \lambda_j| \geq \frac{1}{\Omega(|Q|)}$, $\forall j = 1, \ldots n$ e $\forall Q \in \mathbb{N}^n \setminus \mathrm{Res}_j(\lambda)$ con $|Q| \geq 2$.

Definizione

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ soddisfano la condizione di Brjuno ridotta se

$$\sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{2^\nu} \widetilde{\omega}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(2^{\nu+1})^{-1} < +\infty, \quad \text{dove}$$

$$\widetilde{\omega}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(m) = \min_{\substack{2 \leq |Q| \leq m \\ Q \notin \mathrm{Res}_j(\lambda)}} \min_{1 \leq j \leq n} |\lambda^Q - \lambda_j|, \quad m \geq 2.$$

Definizione

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ soddisfano la condizione di Rüssmann se $\exists \Omega \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ t.c.:

- $k \leq \Omega(k) \leq \Omega(k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
- $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \log \Omega(k) < +\infty$, e
- $|\lambda^Q - \lambda_j| \geq \frac{1}{\Omega(|Q|)}$, $\forall j = 1, \ldots n$ e $\forall Q \in \mathbb{N}^n \setminus \mathrm{Res}_j(\lambda)$ con $|Q| \geq 2$.

Definizione

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ soddisfano la condizione di Brjuno ridotta se

$$\sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{2^\nu} \widetilde{\omega}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(2^{\nu+1})^{-1} < +\infty, \quad \text{dove}$$

$$\widetilde{\omega}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(m) = \min_{\substack{2 \leq |Q| \leq m \\ Q \notin \mathrm{Res}_j(\lambda)}} \min_{1 \leq j \leq n} |\lambda^Q - \lambda_j|, \quad m \geq 2.$$

Condizione di Rüssmann $\Rightarrow$ Condizione di Brjuno ridotta

Teorema (–, 2009)

f germe di biolomorfismo di $(\mathbb{C}^n, O)$, con Λ diag. e t.c. gli autovalori di Λ hanno solo risonanze di livello s, $1 \leq s \leq n$. Allora

$$f \text{ è formalmente linearizzabile}$$
$$\Updownarrow$$

f ammette una varietà osculante di codimensione s tale che $f|_M$ è formalmente linearizzabile.

Teorema (–, 2009)

f germe di biolomorfismo di $(\mathbb{C}^n, O)$, con Λ diag. e t.c. gli autovalori di Λ hanno solo risonanze di livello s, $1 \le s \le n$. Allora

$$f \text{ è formalmente linearizzabile}$$
$$\Updownarrow$$

f ammette una varietà osculante di codimensione s tale che $f|_M$ è formalmente linearizzabile.

Definizione

Dato $1 \le s \le n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_r) \in (\mathbb{C}^*)^n$ ha solo risonanze di livello s se, dato $Q \in \mathbb{N}^n$ con $|Q| \ge 2$:

$$\lambda_1^{q_1} \cdots \lambda_s^{q_s} \mu_1^{q_{s+1}} \cdots \mu_r^{q_n} = \lambda_h \iff \sum_{p=1}^{s} q_p = 1 \text{ e } \mu_1^{q_{s+1}} \cdots \mu_r^{q_n} = 1$$

$$\lambda_1^{q_1} \cdots \lambda_s^{q_s} \mu_1^{q_{s+1}} \cdots \mu_r^{q_n} = \mu_j \iff q_1 = \cdots = q_s = 0 \text{ e } \mu_1^{q_{s+1}} \cdots \mu_r^{q_n} = \mu_j$$

Teorema (–, 2009)

f germe di biolomorfismo di $(\mathbb{C}^n, O)$, con Λ diag. e t.c. gli autovalori di Λ hanno solo risonanze di livello s, $1 \leq s \leq n$. Allora

$$f \text{ è formalmente linearizzabile}$$

$$\Updownarrow$$

f ammette una varietà osculante di codimensione s tale che $f|_M$ è formalmente linearizzabile.

Definizione

Dato $1 \leq s \leq n$, f ammette una varietà osculante M di codimensione s se $\exists$ un germe di varietà complessa f-invariante M in O, di codimensione s, tale che il fibrato normale N_M di M ammette una connessione olomorfa piatta, di tipo $(1, 0)$, che commuta con $df|_{N_M}$.

Teorema (–, 2009)

f germe di biolomorfismo di $(\mathbb{C}^n, O)$, con Λ diag. e t.c. gli autovalori di Λ hanno solo risonanze di livello s, $1 \leq s \leq n$. Allora

$$f \text{ è formalmente linearizzabile}$$

$$\Updownarrow$$

f ammette una varietà osculante di codimensione s tale che $f|_M$ è formalmente linearizzabile.

f ammette una varietà osculante M di codimensione s tale che $f|_M$ è olomorficamente linearizzabile se e solo se $\exists$ coordinate locali olomorfe $z = (x, y)$ in O adattate a M in cui f ha la forma

$$\begin{aligned} x_i' &= \lambda_i x_i + f_i^1(x, y) \ \text{ for } i = 1, \ldots, s, \\ y_j' &= \mu_j y_j + f_j^2(x, y) \ \text{ for } j = 1, \ldots, r, \end{aligned}$$

dove

$$\operatorname{ord}_x(f_i^1) \geq 2,$$
$$\operatorname{ord}_x(f_j^2) \geq 1,$$

per ogni $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, r$.

Azioni di Toro

Strategia

Azioni di Toro Normalizzazione Olomorfa

Azioni di Toro	Normalizzazione Olomorfa
Θ	$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Azioni di Toro	Normalizzazione Olomorfa
Θ	$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
$\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\theta^k)$	$\mathrm{Res}_j(\lambda)$

Grado torico

Definizione

Il grado torico di $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^n$ è il min $r \in \mathbb{N}$ t.c. $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}^*$ e $\exists \theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)} \in \mathbb{Z}^n$ t.c.

$$[\varphi] = \left[\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \theta^{(k)}\right] \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n,$$

dove $[\varphi]$ è l'unica classe in $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n$ t.c. $\lambda = e^{2\pi i [\varphi]}$.
$\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)}$ sono una r-upla di vettori torici associati a λ, con coefficienti torici $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Grado torico

Definizione

Il grado torico di $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^n$ è il min $r \in \mathbb{N}$ t.c. $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}^*$ e $\exists \theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)} \in \mathbb{Z}^n$ t.c.

$$[\varphi] = \left[\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \theta^{(k)}\right] \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n,$$

dove $[\varphi]$ è l'unica classe in $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n$ t.c. $\lambda = e^{2\pi i[\varphi]}$.
$\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)}$ sono una r-upla di vettori torici associati a λ, con coefficienti torici $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Poiché $[\varphi] = [\sum_{j=1}^{n} \varphi_j e_j]$, il grado torico è ben definito e $1 \leq r \leq n$.

Grado torico

Definizione

Il grado torico di $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^n$ è il min $r \in \mathbb{N}$ t.c. $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}^*$ e $\exists \theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)} \in \mathbb{Z}^n$ t.c.

$$[\varphi] = \left[\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \theta^{(k)} \right] \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n,$$

dove $[\varphi]$ è l'unica classe in $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n$ t.c. $\lambda = e^{2\pi i [\varphi]}$.
$\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)}$ sono una r-upla di vettori torici associati a λ, con coefficienti torici $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Poiché $[\varphi] = [\sum_{j=1}^{n} \varphi_j e_j]$, il grado torico è ben definito e $1 \leq r \leq n$.

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sono $\mathbb{Z}$-indipendenti,

Grado torico

Definizione

Il grado torico di $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^n$ è il min $r \in \mathbb{N}$ t.c. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}^*$ e $\exists \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(r)} \in \mathbb{Z}^n$ t.c.

$$[\varphi] = \left[\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \theta^{(k)} \right] \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n,$$

dove $[\varphi]$ è l'unica classe in $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n$ t.c. $\lambda = e^{2\pi i [\varphi]}$.
$\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(r)}$ sono una r-upla di vettori torici associati a λ, con coefficienti torici $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Poiché $[\varphi] = [\sum_{j=1}^{n} \varphi_j e_j]$, il grado torico è ben definito e $1 \leq r \leq n$.

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sono $\mathbb{Z}$-indipendenti,
- $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(r)}$ sono $\mathbb{Q}$-linearmente indipendenti.

Prima distinzione

Proposizione (–, 2009)

$\exists$ *una* r*-upla torica assoc. a* λ *con coeff.* $\mathbb{Z}$*-indipendenti con* 1

$$\Updownarrow$$

questo è vero per ogni r*-upla torica associata a* λ*.*

Prima distinzione

Proposizione (–, 2009)

$\exists$ *una r-upla torica assoc. a* λ *con coeff.* $\mathbb{Z}$*-indipendenti con* 1

$$\Updownarrow$$

questo è vero per ogni r-upla torica associata a λ*.*

- Caso Torsion-free: $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $\mathbb{Z}$-indipendenti

Prima distinzione

Proposizione (–, 2009)

$\exists$ una r-upla torica assoc. a λ con coeff. $\mathbb{Z}$-indipendenti con 1

$$\Updownarrow$$

questo è vero per ogni r-upla torica associata a λ.

- Caso Torsion-free: $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $\mathbb{Z}$-indipendenti
- Caso con Torsione: $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $\mathbb{Z}$-dipendenti

Prima distinzione

Proposizione (–, 2009)

$\exists$ *una r-upla torica assoc. a* λ *con coeff.* $\mathbb{Z}$*-indipendenti con* 1

$$\Updownarrow$$

questo è vero per ogni r-upla torica associata a λ*.*

- Caso Torsion-free: $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $\mathbb{Z}$-indipendenti
- Caso con Torsione: $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $\mathbb{Z}$-dipendenti

Nel caso con torsione possiamo sempre ridurci a considerare solo r-uple toriche ridotte, i.e., $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(r)}$ con coeff. $1/m, \beta_2, \ldots, \beta_r$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $m, \eta_1^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}$ coprimi, dove isoliamo nel primo coefficiente torico la dipendenza con 1 ($\beta_2, \ldots, \beta_r$ sono $\mathbb{Z}$-indipend. con 1); $\eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(r)}$ sono detti vettori torici torsion-free ridotti assoc. a λ.

Caso Torsion-free

$\forall$ r-upla di vettori torici $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)}$ associati a λ

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\theta^{(k)}) \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

Caso Torsion-free

$\forall$ r-upla di vettori torici $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(r)}$ associati a λ

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\theta^{(k)}) \quad \forall\, j = 1, \dots, n$$

e

$$\lambda_j = \lambda_h \Longrightarrow \theta_j^{(k)} = \theta_h^{(k)} \ \forall\, k = 1, \dots, r.$$

Caso Torsion-free

$\forall$ r-upla di vettori torici $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)}$ associati a λ

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\theta^{(k)}) \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

e

$$\lambda_j = \lambda_h \Longrightarrow \theta_j^{(k)} = \theta_h^{(k)} \ \forall\, k = 1, \ldots, r.$$

Teorema (–, 2009)

f nel caso torsion-free è olomorficamente normalizzabile

$$\Updownarrow$$

f commuta con un'azione olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, O)$, $r = \mathrm{tordeg}(\lambda)$, tale che le colonne di Θ formano una r-upla di vettori torici associati a λ.

Caso con Torsione

$\forall$ r-tupla torica ridotta $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(r)}$ associata a λ si ha

$$\bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}) \supseteq \mathrm{Res}_j(\lambda) \supseteq \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}). \tag{1}$$

Caso con Torsione

$\forall$ r-tupla torica ridotta $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(r)}$ associata a λ si ha

$$\bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}) \supseteq \mathrm{Res}_j(\lambda) \supseteq \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}). \tag{1}$$

Abbiamo i seguenti sottocasi:

- Torsione Impura: per una r-upla torica ridotta ($\Rightarrow \forall$) si ha

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

Caso con Torsione

$\forall$ r-tupla torica ridotta $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(r)}$ associata a λ si ha

$$\bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}) \supseteq \mathrm{Res}_j(\lambda) \supseteq \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}). \qquad (1)$$

Abbiamo i seguenti sottocasi:

- Torsione Impura: per una r-upla torica ridotta ($\Rightarrow \forall$) si ha

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- Torsione Pura: la prima inclusione è stretta, e

Caso con Torsione

$\forall$ r-tupla torica ridotta $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(r)}$ associata a λ si ha

$$\bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}) \supseteq \mathrm{Res}_j(\lambda) \supseteq \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}). \tag{1}$$

Abbiamo i seguenti sottocasi:

- Torsione Impura: per una r-upla torica ridotta ($\Rightarrow \forall$) si ha

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)}) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- Torsione Pura: la prima inclusione è stretta, e *o*
  - λ è semplificabile: $\exists$ una r-upla torica ridotta, detta semplice, t.c. $\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(k)})$ $\forall j$,

Caso con Torsione

$\forall$ r-tupla torica ridotta $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(r)}$ associata a λ si ha

$$\bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^{+}(\eta^{(k)}) \supseteq \mathrm{Res}_j(\lambda) \supseteq \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^{+}(\eta^{(k)}). \qquad (1)$$

Abbiamo i seguenti sottocasi:

- Torsione Impura: per una r-upla torica ridotta ($\Rightarrow \forall$) si ha

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=2}^{r} \mathrm{Res}_j^{+}(\eta^{(k)}) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- Torsione Pura: la prima inclusione è stretta, e *o*
  - λ è semplificabile: $\exists$ una r-upla torica ridotta, detta semplice, t.c. $\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_j^{+}(\eta^{(k)})$ $\forall j$, *o*
  - λ non è semplificabile: $\forall$ r-upla torica ridotta, $\exists j$ t.c. entrambe le inclusioni in (1) sono strette.

Caso di Torsione Impura

Teorema (–, 2009)

f nel caso di torsione impura è olomorficamente normalizzabile

$$\Updownarrow$$

f commuta con un'azione olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^{r-1}$ su $(\mathbb{C}^n, O)$, $r = \mathrm{tordeg}(\lambda)$, tale che le colonne di Θ sono i vettori torici torsion-free ridotti di una r-upla ridotta associata a λ.

Caso di Torsione Pura

λ semplificabile

Teorema (–, 2009)

f nel caso di torsione pura t.c. λ è semplificabile è olomorficamente normalizzabile

$$\Updownarrow$$

Caso di Torsione Pura

λ semplificabile

Teorema (–, 2009)

f nel caso di torsione pura t.c. λ è semplificabile è olomorficamente normalizzabile

$$\Updownarrow$$

- *df_O diagonalizzabile: f commuta con un'azione olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, O)$, $r = \mathrm{tordeg}(\lambda)$, tale che le colonne di Θ formano una r-upla semplice ridotta di vettori torici associati a λ;*

Caso di Torsione Pura

λ semplificabile

Teorema (–, 2009)

f nel caso di torsione pura t.c. λ è semplificabile è olomorficamente normalizzabile

$$\Updownarrow$$

- *df_O diagonalizzabile: f commuta con un'azione olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, O)$, $r = \mathrm{tordeg}(\lambda)$, tale che le colonne di Θ formano una r-upla semplice ridotta di vettori torici associati a λ;*
- *df_O non diagonalizzabile: se $\lambda_j = \lambda_h \Rightarrow \eta_j^{(1)} = \eta_h^{(1)}$, allora stesso enunciato di sopra.*

Caso di Torsione Pura

λ non semplificabile

Proposizione (–, 2009)

f nel caso di torsione pura t.c. λ non è semplificabile. Se f commuta con un'azione olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, O)$, $r = \mathrm{tordeg}(\lambda)$, tale che le colonne di Θ formano una r-upla ridotta di vettori torici associati a λ, allora f è olomorficamente normalizzabile.

Caso di Torsione Pura

λ non semplificabile

Proposizione (–, 2009)

f nel caso di torsione pura t.c. λ non è semplificabile. Se f commuta con un'azione olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, O)$, $r = \operatorname{tordeg}(\lambda)$, tale che le colonne di Θ formano una r-upla ridotta di vettori torici associati a λ, allora f è olomorficamente normalizzabile.

Proposizione (–, 2009)

f nel caso di torsione pura t.c. λ non è semplificabile. Se f è olomorficamente normalizzabile, allora f commuta con un'azione olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^{r-1}$ su $(\mathbb{C}^n, O)$, $r = \operatorname{tordeg}(\lambda)$, tale che le colonne di Θ sono i vettori torici torsion-free ridotti di una r-upla ridotta associata a λ.

Osservazioni finali

- metodo algoritmico per calcolare le risonanze

Osservazioni finali

- metodo algoritmico per calcolare le risonanze
- esempi di ciascun caso

Osservazioni finali

- metodo algoritmico per calcolare le risonanze
- esempi di ciascun caso $\Longrightarrow$ classificazione consistente

Osservazioni finali

- metodo algoritmico per calcolare le risonanze
- esempi di ciascun caso $\Longrightarrow$ classificazione consistente
- la torsione non è sufficiente a misurare la differenza tra germi di campi vettoriali olomorfi e germi di biolomorfismi

Osservazioni finali

- metodo algoritmico per calcolare le risonanze
- esempi di ciascun caso $\Longrightarrow$ classificazione consistente
- la torsione non è sufficiente a misurare la differenza tra germi di campi vettoriali olomorfi e germi di biolomorfismi
- esempio di tecniche per costruire azioni di toro

Grazie!

Torsione

Écalle, nel 1992, ha introdotto la seguente nozione quantitativa di torsione.

Definizione

La *torsione* di $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^n$ è l'unico intero positivo τ tale che

$$\frac{1}{\tau}\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap \left(\mathbb{Z} \bigoplus_{1 \le j \le n} \left(\frac{\log(\lambda_j)}{2\pi i} \mathbb{Z} \right) \right).$$

Torsione

Écalle, nel 1992, ha introdotto la seguente nozione quantitativa di torsione.

Definizione

La *torsione* di $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^n$ è l'unico intero positivo τ tale che

$$\frac{1}{\tau}\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap \left(\mathbb{Z} \bigoplus_{1 \le j \le n} \left(\frac{\log(\lambda_j)}{2\pi i}\mathbb{Z} \right) \right).$$

Lemma (–, 2009)

$\lambda \in (\mathbb{C}^*)^n$ *è torsion-free* $\iff$ *la sua torsione è* 1

Costruzione di Azioni di Toro

Teorema (–, 2009)

Sia f come sopra e tale che commuti con un insieme integrabile di campi vettoriali olomorfi $X_1, \ldots, X_m$, $1 \leq m \leq n$. Allora f commuta con un'azione olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, O)$, dove $r = \mathrm{tordeg}(X_1)$, e le colonne della matrice dei pesi formano una r-upla di vettori torici associati a X_1.

Dove, se $1 \leq m \leq n$, f commuta con un insieme integrabile di campi vettoriali olomorfi se $\exists X_1, \ldots, X_m$ t.c.

$$df(X_j) = X_j \circ f$$

$\forall j = 1, \ldots, m$ che sono integrabili, i.e.,

- $X_1, \ldots, X_m$ germi di c.v. olom. di $(\mathbb{C}^n, O)$, $X_j(O) = 0$, ordine$(X_j) = 1$, $[X_j, X_k] = 0$ $\forall j, k$, e $X_1 \wedge \cdots \wedge X_m \not\equiv 0$;
- $\exists g_1, \ldots, g_{n-m}$ germi di funzioni olomorfe di $(\mathbb{C}^n, O)$ t.c. $X_j(g_k) = 0$ $\forall j, k$, e $dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{n-m} \not\equiv 0$.

Costruzione di Azioni di Toro

Grado torico di un campo vettoriale

Scrivendo $X = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \cdots$, il grado torico di X è il min $r \in \mathbb{N}$ t.c. $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}^*$ e $\exists \theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)} \in \mathbb{Z}^n$ t.c.

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \theta^{(k)}.$$

Esempi

Esempio (Caso Torsion-free)

$$\left[\sqrt{2}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+2i\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right]\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^3$$

Esempio (Caso con Torsione)

$$\left[\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+2i\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right]\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^3$$

Esempio (Caso con Torsione Impura)

$$\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\sqrt{2}\begin{pmatrix}-12\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\sqrt{3}\begin{pmatrix}0\\5\\2\\0\end{pmatrix}\right]\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^4$$

ha grado torico 3.

Esempio (Caso con Torsione Impura)

$\mathrm{Res}_1^+(\eta^{(2)}) = \{(q_1, q_2, q_3, 12(q_1 - 1)) \in \mathbb{N}^4 \mid 13q_1 + q_2 + q_3 \geq 14\}$
$\mathrm{Res}_2^+(\eta^{(2)}) = \{(q_1, q_2, q_3, 12q_1) \in \mathbb{N}^4 \mid 13q_1 + q_2 + q_3 \geq 2\}$
$\mathrm{Res}_3^+(\eta^{(2)}) = \mathrm{Res}_2^+(\eta^{(2)})$
$\mathrm{Res}_4^+(\eta^{(2)}) = \{(q_1, q_2, q_3, 12q_1 + 1) \in \mathbb{N}^4 \mid 13q_1 + q_2 + q_3 \geq 1\}$,

e

$\mathrm{Res}_1^+(\eta^{(3)}) = \{(q_1, 0, 0, q_4) \in \mathbb{N}^4 \mid q_1 + q_4 \geq 2\}$
$\mathrm{Res}_2^+(\eta^{(3)}) = \{(q_1, 1, 0, q_4) \in \mathbb{N}^4 \mid q_1 + q_4 \geq 1\}$
$\mathrm{Res}_3^+(\eta^{(3)}) = \{(q_1, 0, 1, q_4) \in \mathbb{N}^4 \mid q_1 + q_4 \geq 1\}$
$\mathrm{Res}_4^+(\eta^{(3)}) = \mathrm{Res}_1^+(\eta^{(3)})$.

$$\forall P = (p, 0, 0, 12p) \text{ con } p \geq 1 \quad \langle P, \eta^{(1)} \rangle = 12p \in 3\,\mathbb{Z}.$$

Allora è facile verificare che per $j = 1, \ldots, 4$

$$\mathrm{Res}_j([\varphi]) = \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(2)}) \cap \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(3)}).$$

Esempi

Esempio (Caso con Torsione Pura Semplificabile)

$$[\varphi] = \left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\6\\0\\0\end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\5\end{pmatrix} \right] \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^4,$$

ha grado torico 3. Abbiamo $\mathrm{Res}_j^+(\eta^{(1)}) = \emptyset$, per $j = 1, \dots, 4$, e non è difficile verificare che

$$\mathrm{Res}_2(\lambda) = \{(0, 1, 5q, q) \mid q \in \mathbb{N}^*\} \neq \emptyset$$

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(2)}) \cap \mathrm{Res}_j^+(\eta^{(3)}) \;\; j = 1, 3, 4.$$

Esempi

Esempio (Caso con Torsione Pura Semplificabile)

Tuttavia, possiamo scrivere

$$[\varphi] = \left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-5\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\6\\0\\0\end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\5\end{pmatrix}\right],$$

e, con questa rappresentazione, abbiamo, per $j = 1, \ldots, 4$

$$\mathrm{Res}_j(\lambda) = \bigcap_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_j^+(\xi^{(k)}).$$

Esempi

Esempio (Caso con Torsione Pura Non Semplificabile)

$$\left[\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}\right]\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^2,$$

ha grado torico 2 e torsione 7. Abbiamo

$$\mathrm{Res}_1^+(\eta^{(2)})=\{(6h+1,h)\mid h\geq 1\},\quad \mathrm{Res}_2^+(\eta^{(2)})=\{(6h,h+1)\mid h\geq 1\},$$

$$\mathrm{Res}_1^+(\eta^{(1)})\cap\mathrm{Res}_1^+(\eta^{(2)})=\mathrm{Res}_2^+(\eta^{(1)})\cap\mathrm{Res}_2^+(\eta^{(2)})=\emptyset,$$

quindi

$$\mathrm{Res}_1^+(\eta^{(2)})\supset\mathrm{Res}_1(\lambda)=\{(42h+1,7h)\mid h\geq 1\}\supset\mathrm{Res}_1^+(\eta^{(1)})\cap\mathrm{Res}_1^+(\eta^{(2)})$$

$$\mathrm{Res}_2^+(\eta^{(2)})\supset\mathrm{Res}_2(\lambda)=\{(42h,7h+1)\mid h\geq 1\}\supset\mathrm{Res}_2^+(\eta^{(1)})\cap\mathrm{Res}_2^+(\eta^{(2)}).$$

Inoltre, è facile verificare che λ non è semplificabile.