

TD n° 4 : Nombres complexes

Exercice 4.1. (Forme cartésienne, forme trigonométrique, représentation géométrique)

1. Donner le module et l'argument de zz' , $z'\bar{z}$, $\frac{z}{z'}$, ainsi que $z'\bar{z}^2$ en fonction de ceux de z et de z' .
2. Mettre sous forme polaire (ou trigonométrique) les nombres complexes suivants et les représenter géométriquement :

$$z_1 = i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = \frac{1}{2 + 2i}, \quad z_5 = \frac{1 - i}{1 + i}$$

3. Écrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\pi}, \quad z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_3 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

4. Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Quelle est la partie réelle de $x + iy$?

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. A-t-on $\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z)$?

Exercice 4.2. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

$$z_1 = 1 + \cos(\theta) - i \sin(\theta), \quad z_2 = 1/z_1, \quad z_3 = 1 + i \tan(\alpha), \quad z_4 = \frac{z_3}{z_3}$$

$$z_5 = 1 + i \cot(\alpha), \quad z_6 = \frac{\cos(x) - i \sin(x)}{\sin(x) - i \cos(x)}$$

Exercice 4.3. Représenter les ensembles

$$\{\exp(1 + it), t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \{\exp(t + i), t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 4.4. 1. Calculer $(2 + i)^3$.

2. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de $2 + 11i$.

Exercice 4.5. Démontrer que $e^{ix} - 1 = e^{ix/2}(2i \sin x/2)$. Donner une formule analogue pour $e^{ix} + 1$ et la démontrer.

Exercice 4.6. 1. Déterminer le module, un argument, les parties réelles et imaginaires de

$$e^{2+3i}; \quad e^{i(2+3i)}; \quad e^z; \quad e^{iz}; \quad e^{\bar{z}}; \quad e^{1/z}$$

où $z = x + iy$.

2. Résoudre l'équation

$$e^z = 1 + i$$

On donnera *toutes* les solutions, et on les exprimera sous forme polaire et cartésienne.

3. Même question avec

$$e^z = 12e^{i\frac{\pi}{13}}$$

Exercice 4.7. 1. On note $Z = 3 - 4i$.

- a. Donner le module de chacune des racines carrées de Z .

- b. Calculer explicitement les racines carrées de Z et confirmer la réponse à la question précédente.

2. Mêmes questions avec $Z = 8 + 6i$.

Exercice 4.8. 1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $-3 - 4i$.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - z(1 + 4i) - 3 + 3i = 0$

Exercice 4.9. 1. Mettre le nombre complexe $e^{i\pi/6}$ sous forme cartésienne et calculer ses racines carrées.

2. En déduire que

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

3. Utiliser la même méthode pour déterminer $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 4.10. (Autre méthode pour déterminer des racines carrées.) Soit z un nombre complexe n'appartenant pas à \mathbb{R}_- et soit $u = z + |z|$.

1. Montrer que $\operatorname{Re}(u) > 0$.

2. Montrer que $u^2 = 2\operatorname{Re}(u)z$.

3. Écrire z comme fonction de u et en déduire une expression simple des racines carrées de z .

4. Application : Trouver les racines carrées de $15 - 8i$.

Exercice 4.11. Les nombres suivants sont-ils des racines n -èmes de l'unité ? Si oui, préciser pour quelle valeur de n . Si non, expliquer pourquoi.

$$z_1 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}; \quad z_2 = \frac{4 - i}{1 + 2i}; \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{13}}; \quad z_4 = e^{\frac{i}{2}}$$

Exercice 4.12. 1. Soit $Z = \frac{-1}{(\sqrt{3}+i)^2}$. Mettre Z sous forme trigonométrique.

2. $\frac{Z}{|Z|}$ est-elle une racine n -ème de l'unité ? Si oui, préciser n .

3. Résoudre $z^4 = Z$. Combien cette équation admet-elle de solutions ? Les représenter dans le plan complexe. Quelle figure géométrique obtient-on ? Expliquer.

Exercice 4.13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Trouver toutes les solutions de $z^n = 1$ (utiliser l'écriture trigonométrique de z).

2. Soit a, b deux nombres complexes non nuls tels que $a^n = b^n$. Que dire de a/b (c-à-d de quelle forme est-il) ?

3. Représenter graphiquement tous les z solutions de l'équation $z^4 = (1 + i)^4$.

4. Résoudre $(z + i)^n = (z - i)^n$. Vérifier que les solutions sont réelles.

5. Résoudre directement l'équation $(z + i)^4 = (z - i)^4$ et retrouver les résultats précédents.

Exercice 4.14. 1. Développer $(\cos x + i \sin x)^3$. En déduire une expression de $\sin(3x) - \cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\frac{\sin(3x)}{\sin x}$ comme polynômes en $\sin x$ et $\cos x$.

3. Peut-on les exprimer comme polynômes en $\sin x$? comme polynômes en $\cos x$? Si oui, donner l'expression correspondante.

4. Linéariser $\cos^3 x \sin x$.

Exercice 4.15. Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$. Quand a-t-on égalité ?

2. Soient $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application $f : D \rightarrow D, z \mapsto \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$ est bien définie et que c'est une bijection vérifiant $f(C) = C$.

Exercice 4.16. (Entiers de Gauss) On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $m + ni$, avec $m, n \in \mathbb{Z}$. On munit $\mathbb{Z}[i]$ de l'addition et de la multiplication comme dans \mathbb{C} .

1. Vérifier que ces opérations sont « internes » à $\mathbb{Z}[i]$.

2. Quelles propriétés vérifient-elles ? $\mathbb{Z}[i]$ est-il un corps ? Dessiner l'ensemble correspondant dans le plan d'Argand-Cauchy.

3. Quel est le plus petit corps contenant \mathbb{Z} et i contenu dans \mathbb{C} ?