

Feuille TD 1

Exercice 1. (Somme d'Abel) Soient $(u_n), (v_n)$ des suites de nombres complexes. On pose $S_k^m = v_k + \dots + v_m$.

(1) Montrer que pour $m < n$, on a

$$\sum_{k=m}^n u_k v_k = u_m S_m^n + \sum_{k=m+1}^n (u_k - u_{k-1}) S_k^n.$$

(2) Si de plus (u_n) est réelle et décroissante vers 0, et que la suite des sommes partielles $\sum_1^k v_n$ est bornée, en déduire que la série de terme général $u_n \cdot v_n$ est convergente.

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$$

et montrer que la série converge pour tout z tel que $z \neq 1$ et $|z| = 1$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Exercice 4. Soit D un domaine (i.e. ouvert connexe non vide) de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe sur D . Démontrer que si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in D$ alors f est constante sur D . En déduire que si $|f|$ est constante sur D alors f est constante sur D .

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U . Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?

$$z \mapsto \overline{f(z)} \text{ sur } U, \quad z \mapsto \overline{f(\bar{z})} \text{ sur } \bar{U} = \{z \mid \bar{z} \in U\}, \quad z \mapsto f(\bar{z}) \text{ sur } \bar{U}.$$

Exercice 6. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. On pose $u := \Re f$ et $v := \Im f$.

- (1) On suppose que $u = \Re f(z) \equiv c$ est constante sur Ω . Démontrer que f est constante sur Ω .
- (2) On suppose qu'il existe des nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et que pour tout $z = x + iy \in \Omega$,

$$a \cdot u(x, y) + b \cdot v(x, y) + c = 0.$$

Que peut-on dire de f ? Interpréter géométriquement cette condition et appliquer la question précédente.

- (3) Même question si on suppose qu'il existe des nombres réels $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$a \cdot u^2(x, y) + b \cdot v^2(x, y) = 1.$$

Exercice 7. Soit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

- (1) Montrer que la fonction \exp est définie sur \mathbb{C} et continue.
- (2) Montrer que la fonction \exp est holomorphe sur \mathbb{C} et donner sa dérivée.
- (3) Démontrer que \exp est indéfiniment \mathbb{C} -dérivable sur \mathbb{C} et calculer ses dérivées complexes successives.
- (4) Déterminer toutes les fonctions \mathbb{C} -dérivables f sur \mathbb{C} à valeurs dans \mathbb{C} vérifiant l'équation différentielle complexe $f' = af$, où $a \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe fixé. Qu'en est-il si a est une fonction holomorphe sur un domaine de \mathbb{C} ?
- (5) Déterminer l'image par \exp des droites horizontales $\Im z = \alpha$ et des droites verticales $\Re z = \beta$ et de \mathbb{C} ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Démontrer que \exp induit un homéomorphisme de la bande $B_\alpha := \{z \in \mathbb{C}; \alpha - \pi < \Im z < \alpha + \pi\}$ sur le domaine $D_\alpha := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}^+ \cdot e^{i\alpha})$ et déterminer son homéomorphisme inverse (réciproque) ℓ_α .
- (6) Démontrer que ℓ_α est holomorphe sur D_α et calculer sa dérivée. Exprimer ℓ_α à l'aide de la branche principale du logarithme.
- (7) Démontrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur \mathbb{C} :

$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \quad \text{et} \quad \cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Calculer $|\sin z|$ et $|\cos z|$. Les fonctions \cos et \sin sont-elles bornées sur \mathbb{C} ?

- (8) Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2 z + \sin^2 z = 1$.